

DIE VERDELINGSOORDRAG VAN NIE-LINEÊRE GLADSTRYKERS.

DEUR

HANS JULIUS MARCELLA BOUCKAERT

Tesis ingelewer ter gedeeltelike voltooiing aan die vereiste vir die graad *Magister in die
Handelswetenskappe* aan die *Universiteit van Stellenbosch*.



Studieleier: C.H. Rohwer

SEPTEMBER 1996

Verklaring

*Ek, die ondergetekende, verklaar hiermee dat die werk in hierdie tesis vervat, my eie
oorspronklike werk is wat nog nie vantevore in die geheel of gedeeltelik by enige ander
Universiteit ter verkryging van 'n graad voorgelê is nie.*

Datum: 29/11/96

ABSTRACT

In this thesis we consider a variety of min-max based non-linear smoothers, including a novel pair of asymmetric non-linear smoothers.

Assuming a constant signal in white noise a statistical comparison is made using the output distributions of these smoothers.

In this context it is shown that a linear combination of the asymmetric pair outperforms the other considered smoothers.

Results indicate that non-linear smoothers are, in this context, comparable to some linear smoothers. Mention is also made that, if the noise includes an impulsive component, these smoothers easily outperform filters.

ABSTRAK

In die tesis word 'n verskeidenheid van min-maks gebaseerde nie-lineêre gladstrykers, insluitende 'n unieke paar asimmetriese nie-lineêre gladstrykers bespreek.

'n Statistiese vergelyking, aanvarend 'n konstante sein in wit-geraas, word getref deur gebruik van die uittreeverdelings van dié gladstrykers.

In bogenoemde konteks word aangetoon dat 'n lineêre kombinasie van die asimmetriese gladstrykers die ander gladstrykers uitpresteer.

Resultate dui ook daarop dat nie-lineêre gladstrykers, in hierdie konteks, vergelykbaar is met sommige lineêre filters. Dit word ook gewys dat, indien geraas impulsiewe gedrag toon, dié gladstrykers baie beter presteer as lineêre filters.

DANKBETUIGING

My opregte dank aan Dr. C.H. Rohwer vir sy volgehoue ondersteuning en bereidheid om my te lei in 'n interresante, dog veeleisende onderwerp.

INHOUD**BL.**

AFDELING 1	INLEIDING	1
1.1	GEDAGTERAAMWERK	1
1.2	LINEÊRE OPERATORE	3
1.3	NIE-LINEÊRE GLADSTRYKERS	4
1.4	GEDAGTERAAMWERK MET GERAAS AS VERTREKPUNT	7
1.5	IMPULSIEWE GERAAS	8
1.6	VERGELYKINGSMETODE	11
 AFDELING 2	 VERSKEIE NIE-LINEÊRE GLADSTRYKERS	 15
2.1	WISKUNDIGE FORMULERING EN PUNTBEREKENING	15
2.1.1	MEDIAAN	15
2.1.2	REKURSIEWE MEDIAAN	16
2.1.3	DIE LULU-OPERATORE	17
2.1.4	SAMEGESTELDE GLADSTRYKERS	18
2.1.5	BEREKENING VAN UITTREETPUNTE IN SEKERE GRENSGEVALLE	18
2.2	BELANGRIKE EIENSKAPPE VAN BOGENOEMDE GLADSTRYKERS	20
2.2.1	MEDIAAN	21
2.2.2	REKURSIEWE MEDIAAN	28
2.2.3	LULU-OPERATORE	29
2.3	VERDELING VAN GLADSTRYKERS IN KLASSE	32
 AFDELING 3	 STATISTIESE EN WISKUNDIGE GEGEWENS	 33

AFDELING 4	DIE VERDELING VAN DIE UITTREE VAN VERSKILLENDE GLADSTRYKERS	39
4.1	MEDIAANGLADSTRYKER	39
4.2	LULU-OPERATORE	55
4.3	VERGELYKING VAN GLADSTRYKERS DEUR HULLE UITTREEVERDELINGS	66
AFDELING 5		67
5.1	DIE VERGELYKING VAN DIE UITREEVARIANSIES VAN BOSTAANDE VERDELINGS	67
5.2	VERGELYKING VAN 'N LINEÊRE EN NIE-LINEÊRE OPERATOR	73
AFDELING 6	OPSOMMING	75
BYLAE A	PROGRAMME	80
BYLAE B	LATFUNKSIES	92
BIBLIOGRAFIE		94

AFDELING 1

Inleiding

"Mathematics is the most exact science, its conclusions are capable of absolute proof. But this is only because mathematics does not attempt to draw absolute conclusions. All mathematical truths are relative, conditional. "[1]

Bostaande aanhaling is baie toepaslik op die tesis, aangesien die werk wat behandel word gedoen word onder sekere aannames. Die gevolgtrekkings wat gemaak word is egter insiggewend genoeg om die geldigheid van hierdie aannames in 'n wye klas probleme te ondersoek.

1.1 Gedagteraamwerk

Wanneer 'n sekere datary van getalle of verhoudings ontvang word is dit 'n logiese uitgangspunt om die datary te beskou as 'n monsterring van 'n uitgestuurde kontinue-funksie f , wat deur een of ander onverhoedbare eksterne bron, bv. weerlig, mensgemaakte elektromagnetiese steuring, kosmiese strale of ander kleiner amplitudesteuring van verskeie bronne gekontamineer is.

Ideaal gesien behoort die f nou gerekonstrueer te word uit die ontvangde datary. 'n Algemene proses om f te herbou uit 'n monsterring van gekontamineerde data staan bekend as *filtrering* of *geraasverwydering*. Later, veral in die nie-lineêre gevalle, sal daar gepraat word van *gladstryking*, spesifiek om lineêre en nie-lineêre gevalle van mekaar te skei, aangesien die term filtrering tradisioneel deel is van lineêre teorie[2].

Indien daar kennis gedra word van hoe f lyk, is die probleem meer spesifiek. Maar in die meeste gevalle is so 'n vooraf kennis van die uitgestuurde sein f onbekend; 'n manier sal dus gevind moet word om f te rekonstrueer deur die bou van 'n gedagteraamwerk bestaande uit aannames en logiese gevolgtrekkings, met inagneming van moontlike beperkte kennis van f .

Definisie 1.1.1[3]

Enige oneindige datary word deur 'n onderkas letter aangedui, d.w.s.

$$x = \{\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots\}.$$

'n Eindige subversameling van 'n oneindige datary word deur 'n bokas letter aangedui,

$$\text{bv. } Y(s, t) = \{y_s, y_{s+1}, \dots, y_{t-1}, y_t\} \text{ met } s \leq t.$$

Daar sal aanvaar word dat 'n datary x , soos bo gedefinieer, bestaan uit datapunte wat ekwidistant ten opsigte van tyd waargeneem is. So 'n datary kan dus gesien word as die diskretisasie van 'n kontinue funksie $x(t)$ oor tyd. In meeste gevalle toon x tendense waaruit gevolgtrekkings ten opsigte van $x(t)$ gemaak kan word.

Die tendense kan byvoorbeeld:

- 1] konstant oor sekere tydintervalle wees;
- 2] periodies van aard wees;
- 3] stygend of dalend wees;
- 4] 'n kombinasie van bostaande wees;

Die datary x kom egter in die meeste gevalle gekontamineer voor. As eerste gedagte of aanname vir die rekonstruksie van f uit so 'n datary is dit nodig en seker logies om geraas as additief te sien:

$$\text{d.w.s. } x(i) = f(i) + e(i)$$

Hieruit kan die gedagte geskep word om die rye $x(i)$, $f(i)$ en $e(i)$ as vektore te sien.

Die vektore, alhoewel in die praktyk eindig, sal as oneindig beskou word deur, indien nodig, die byvoeg van datapunte voor en agter.

Die versameling X van alle x soos in definisie 1.1.1, onder die aannames dat:

- 1) $\alpha x = \{\dots, \alpha x_{i-1}, \alpha x_i, \alpha x_{i+1}, \dots\}$
- 2) $x + y = \{\dots, x_{i-1} + y_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1} + y_{i+1}, \dots\} \quad \forall x, y \in X$
- 3) $x = f + e$ as en slegs as $x(i) = f(i) + e(i) \quad \forall i$

vorm 'n vektorruimte.

Om terug te keer na die oorspronklike doel om f te rekonstueer uit x , kan as volg geargumenteer word:

Optimaal wil ons 'n operator, sê W , ontwikkel wat die vektor x projekteer op die funksie f , d.w.s. sodat $W(x)=f$ waar $x=f+e$.

Uit bostaande sal volg dat $W(W(x))=W(f)=f$. Die optimale operator sal dus indempotent wees, aangesien herhaaldelike toepassings geen verandering na die eerste iterasie teweeg sal bring nie.

Tot op hede is daar waarskynlik nog nie so 'n ideale operator ontwikkel nie. Indien wel, sal dit heel moontlik net optimaal onder sekere beperkings bestaan. Die probleem ontstaan as gevolg daarvan dat geraas van so 'n aard kan wees dat twee of meer oplossings moontlik is. Die geraas kan self so wees dat $f+e$ 'n sein vorm en dan sal $W(x)=f+e$.

1.2 Lineêre operatore

As aanvaar word dat daar nie 'n optimale W bestaan wat 'n ry x projekteer op f nie, sal 'n paar aanames moontlik van hulp wees. In lineêre teorieë word daar gepoog om 'n ry x af te beeld op 'n element van 'n sekere klas bestaande uit bekende patrone. Daar word dus van die standpunt uitgegaan dat f in die klas van patrone vervat is. Eenvoudig gestel probeer ons om die bekende patroon wat die beste met x ooreenstem te vind.

Bekende patrone is onder meer die volgende:

- 1] die nulry
- 2] die konstante ry 1
- 3] die ry $\langle \cos(\pi i/p) \rangle$
- 4] die ry $\langle \sin(\pi i/p) \rangle$

As f en g patrone is, is dit sinvol om te aanvaar dat $f+g$ ook patroon is en gevolglik in die klas van patrone val. Verder is dit ook redelik om te aanvaar dat 'n skalêre produk van f en g , d.w.s. αf en αg ook patroon vorm. Met bostaande in gedagte sal die klas van patrone 'n subruimte, gestel S vorm.

Die subruimte S is dus die ruimte van alle moontlike seine wat uitgestuur kan word (in die raamwerk). Aangesien S 'n subruimte van die vektorruimte X is, bestaan daar 'n subruimte, sê E , van X met E die ortogonale komplement van S , sodat $S \oplus E = X$. Die ortogonale komplement E van S sou intuïtief as geraas beskou kan word.

Onder die ortogonale komplementopdeling van 'n vektorruimte, in die geval X , volg dus dat enige $x \in X$ as 'n unieke kombinasie van 'n $f \in S$ en $e \in E$ geskryf kan word.

Onder bostaande raamwerk word 'n x deur 'n operator afgebeeld op 'n element van S wat x die "beste" weergee. As x 'n element is van S , sal dus volg dat $P(x)=x$. Net so sal, as x, y elemente is van S , $P(x+y)=x+y=P(x)+P(y)$ en, $P(\alpha x)=\alpha x=\alpha P(x)$ waaruit volg, onder die aannames, dat so 'n operator P lineêr is.

Verder, as x, y elemente is van X , volg dat as $x=f+e$ en $y=g+\hat{e}$, dan is $P(x+y)=P(g+f+e+\hat{e})=g+f$ aangesien $g+f$ 'n element is van S , en $P(\alpha x)=P(\alpha f+\alpha e)=\alpha f$.

Bostaande gedagteraamwerk skep die lineêre teorie raamwerk en hiervandaan die teorie van lineêre gladstryking, beter bekend as filtrering [4], [5], [6], [7], wanneer die proses lokaal gedoen word.

As dit nou bekend is dat die uitgestuurde seine periodies van aard is, sal die klas van seine S bestaan uit alle periodiese funksies. In dié geval is die teorie van Fourier-analise goed ontwikkel en in algemene gebruik.

Verder kan f ook uit x gevind word deur gebruik te maak van die minimering van 'n betrokke norma. Meer bekend is die minimering van die norm $\|x-s\|$ oor alle $s \in S$. Intuïtief beteken dit dat 'n beste passende sein (in die norm) uit S gekies word om as uitree te dien.

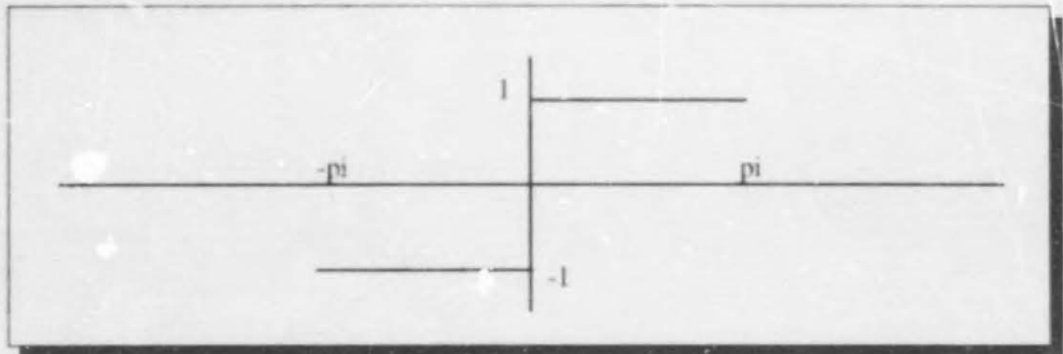
1.3 Nie-lineêre gladstryking

Daar kom in die praktyk egter heelwat voorbeelde voor waar die opbreking van X in twee unieke komponente (subruimtes), waar die een komponent sein en die ander komponent geraas is, nie moontlik is nie.

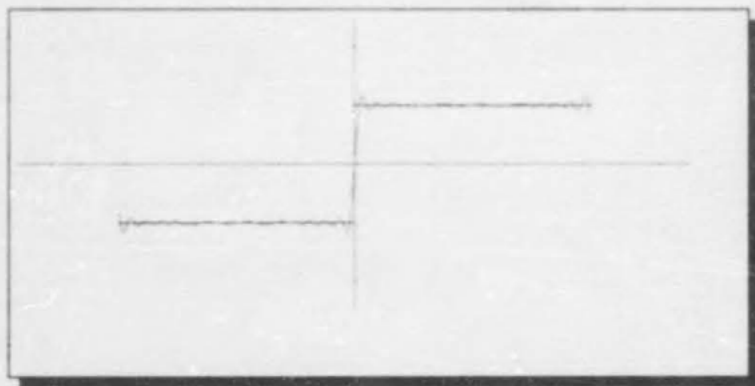
Dit gebeur wanneer twee seinkomponente se som nie as sein beskou kan word nie. Die klas van seine S vorm dus nie 'n subruimte van X nie. Verdere probleme ontstaan indien van die seine diskontinuiteite bevat. By 'n punt van diskontinuiteit sal die Fourier-reeks konvergeer na die gemiddelde van die regter- en linkerlimiet by die punt van diskontinuiteit.

Die volgende voorbeeld illustreer die punt:

Gestel 'n sein word uitgestuur waarvan die volgende 'n onbesoedelde ekstraksie is.



As die ontvangde data deur Fourier-analise benader word (in die geval die eerste twintig elemente) sal die volgende verkry word:



Die diskontinuiteit wat deel is van die oorspronklike sein is dus afgeplat en boonop vind daar spronge plaas aan weerskante van die punt (GIBBS SE FENOMEEN).

Die belangrikheid hiervan is dat, wanneer 'n sein diskontinuiteite bevat, soos in bg. voorbeeld, sekere lineêre filters seindistorsie teweegbring.

Nog 'n probleem wat ontstaan is wanneer geraas impulsiewe gedrag toon, dit wil sê wanneer daar 'n groot impulse van korte duur teenwoordig is. Lineêre filters sal sulke punte afplat en verbreed en so 'n geraaspunt sal dus tot 'n groot mate behoue bly, en selfs slegter word.

Bogenoemde tekortkominge het gelei tot die ontstaan van nie-lineêre gladstrykers.

Net soos by lineêre teorieë is hier ook sekere aannames nodig vir die skep van 'n gedagteraamwerk waarop gebou kan word.

Die volgende aksioma van MALLOWS [8] is hier van belang.

Aksioma 1.3.1[8]

- 1 Die nulry is 'n sein.
- 2 As s 'n sein is dan is $s+k$ ook 'n sein waar k 'n konstante ry data is.
- 3 As s 'n sein is dan sal $(Es)(i)=s(i+1)$ ook 'n sein wees, waar E die skuifoperator is.
- 4 As s 'n sein is sal αs ook 'n sein wees, waar α 'n konstante is.

Net soos by die lineêre teorie, sal dit logies wees om van 'n operator, gestel P , te verwag dat: $P(s)=s$ waar s enige sein is.

Met bostaande aksioma en aanname volg die volgende:

Stelling 1.3.1

Vir enige $s \in S$ geld dat:

- 1] $P(s+k)=s+k=P(s)+P(k)$, vir enige konstante sein k .
- 2] $P(\alpha s) = \alpha s = \alpha P(s)$
- 3] $P(Es)=Es=E(P(s))$

Bewys:

Die bewys volg direk uit die aksiomas.

Daar moet opgelet word dat daar nêrens aangeneem word dat $P(x+y) = P(x) + P(y)$ as x en y seine is.

Dit sal ook gewens wees indien sommige van die volgende sal geld ten opsigte van enige ry $x \in X$. As almal geld, sal ons met 'n ideale proses te doen hê. Daar is egter, soos voorheen genoem, nog nie so 'n proses gekonstrueer nie.

Aksiomas 1.3.2

$$a_1 : P(s) = s \quad \forall s \in S$$

$$a_2 : P(x+k) = P(x) + k \quad \forall x \in X$$

$$a_3 : P(\alpha x) = \alpha P(x) \quad \forall x \in X$$

$$a_4 : P(E(x)) = E(P(x)) \quad \forall x \in X$$

$$a_5 : P(x) \in S \quad \forall x \in X$$

Met bostaande inagenome kan daar gekyk word na verskillende nie-lineêre gladstrykers (wat in Afdeling 2 bespreek word), maar vir eers die volgende.

1.4 Gedagteraamwerk met geraas as vertrekpunt

In die vorige gedagteraamwerk was geraas dit gewees wat oorgebly het nadat die sein uitgehaal is. Dit sou egter ook moontlik wees om die omgekeerde van bostaande te doen, dit wil sê om die gedagteraamwerk om geraas te sentreer en dan die geraas te ekstrapoleer sodat dit wat oorbly, sein is.

Soos by die vorige raamwerk sal dit ook nodig wees om sekere aannames ten opsigte van geraas te maak.

1] Geraas is identies orals, dit wil sê daar moet geen tydafhanklikheid wees nie. As e geraas is, is $E(e)$ ook, met E die skuifoperator.

2] Geraas is onafhanklik verdeel, sodanig dat enige waargenome geraaspunt e_i nie deur enige ander geraaspunt e_j ($i \neq j$) beïnvloed word nie. In statistiese terme moet die kovariansie van enige twee geraaspunte, op verskillende tye waargeneem, gelyk aan nul wees.

Dié vereistes lei daartoe dat die nulry as geraas beskou kan word. As daar teruggegaan word na die lineêre geval, sal gesien word dat die deursnee van die twee vektorsubruimtes S en E die nulry is. Daar is dus 'n ooreenkoms met dié raamwerk waar sein as vertrekpunt gekies is.

Weens die onafhanklikheid en gebrek aan neiging ('trend') behoort die enigste eienskap van 'n ry wat uit geraas bestaan, uit die versameling $\{x(i)\}$ afleibaar te wees. Sulke eienskappe is: die gemiddelde waarde, die standaardafwyking, die kumulatiewe distribusie ens., wat almal uit die distribusie afleibaar is. Die distribusie kan dus as karakterisering van geraas beskou word.

In die meeste gevalle word geraas geneem as die uitree van 'n normaalverdeling. Ander verdelings soos die B-lafunksieverdelings is egter ook 'n opsie. Daar sal in die verhandeling na 'n hele paar moontlike geraas-verdelings gekyk word en berekenings sal volgens die verdelings gedoen word.

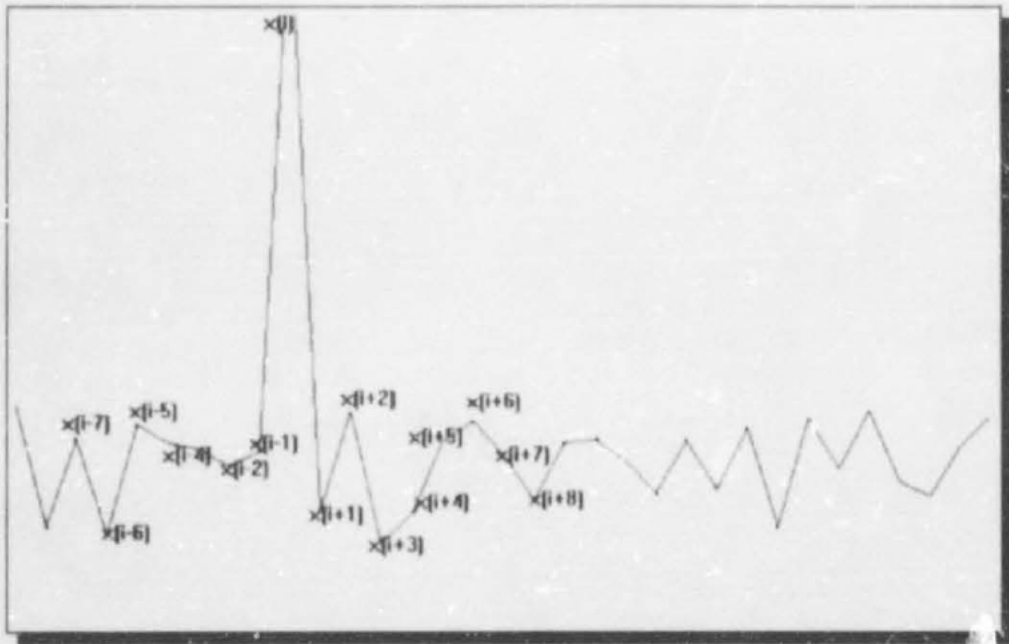
Daar is egter ook gevalle van geraas wat nie gereidelik met verdelings beskryf kan word nie. In baie van die gevalle is dit egter tog moontlik om sekere afleidings ten opsigte van sulke geraas te maak. Die volgende subafdeling kyk na gevalle van geraas wat nie gereidelik met distribusies beskryf kan word.

1.5 Impulsiewe geraas

Impulsiewe geraas is 'n groot impuls of amplitude van korte duur.

In die vorige werk is daar genoem dat lineêre filters nie geskik is vir die verwydering van impulsiewe geraas nie. In hierdie onderafdeling gaan gekyk word na die vermoë van 'n lineêre en nie-lineêre gladstryker om sulke geraas te verwyder.

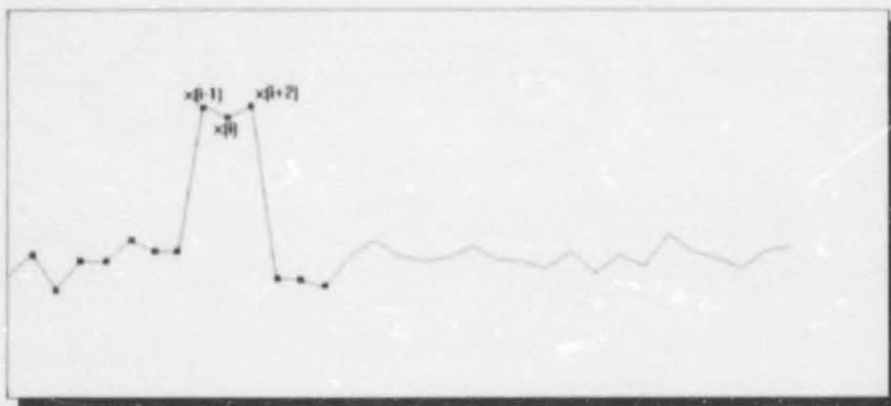
Om bostaande konsep te illustreer, kan daar na die volgende uittreksel van 'n datary gekyk word.

Grafiek 1.5.1

Dit is vir nou eers onbelangrik presies watter sein uitgestuur is en watter geraasbesoedeling plaasgevind het.

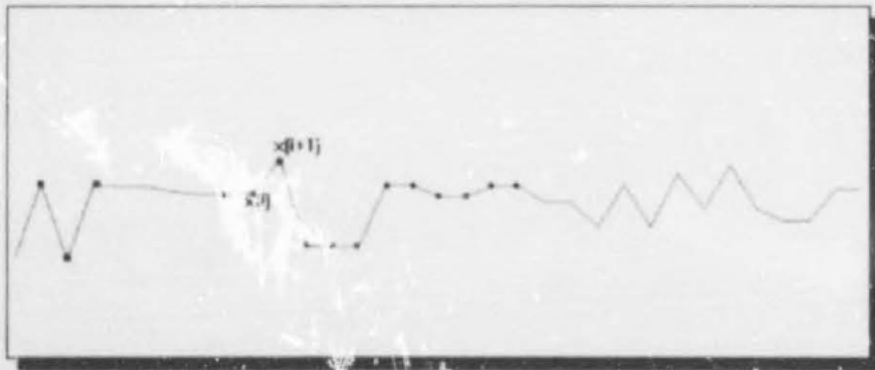
Al wat opgelet kan word, is dat daar by 'n sekere punt $x(i)$ impulsiewe gedrag voorkom.

As bostaande datary nou deur 'n driepunt-Hanningfilter ('n lineêre filter) gestuur word, sal die volgende uittreec verkry word.

Grafiek 1.5.2

Wat dadelik opval, is dat die impulsiewe geraas, alhoewel effens afgeplat, nog wesenlik voorkom. Dit wil voorkom asof die geraasimpuls net verbreed is.

Die uitree wat verkry word as bostaande datary nou deur 'n nie-lineêre gladstryker gestuur word, in hierdie geval die driepuntmediaan, sal as volg daar uitsien



Grafiek 1.5.3

Daar kan duidelik gesien word dat die driepuntmediaan die impulsiewe geraaspunt baie beter verwyder as die driepunt Hanningfilter. Wa. nog opval, is dat die res van die uitree baie ooreenstem met die uitree van die Hanningfilter.

'n Uitgebreide en volledige stel artikels is al geskryf oor die vermoë van 'n nie-lineêre gladstryker om impulsiewe geraas te verwyder [9], [10], [11]. En dit word algemeen aanvaar dat nie-lineêre gladstrykers baie beter in die doel slaag as filters.

Die doel van die tesis gaan dus nie wees om te kyk na die vermoë van 'n gladstryker om impulsiewe geraas te verwyder nie, maar om spesifiek te kyk na 'n manier om verskillende nie-lineêre gladstrykers met mekaar te vergelyk, indien toegepas op 'n sein wat slegs deur goedgeaarde geraas besoedel is (met goedgeaarde geraas word verstaan geraas wat 'n redelike verdeling volg).

1.6 Vergelykingsmetode

In die lineêre teorie bestaan daar bekende metodes om vergelykings tussen operatore te tref. In die nie-lineêre geval is die vergelyking van verskillende operatore heelwat moeiliker en daar is moontlik baie maniere om sulke vergelykings te tref. In die werkstuk word slegs een van die metodes bespreek.

Die metode wat gebruik gaan word om verskillende nie-lineêre gladstrykers met mekaar te vergelyk, gaan statisties van aard wees. Maar voordat die metode uiteengesit word, moet daar 'n paar aannames gemaak word t.w.v. eenvoud in die berekings wat later gedoen sal word.

Gestel 'n sekere datary x word ontvang. As die datary nie deur geraas beïnvloed word nie, is gladstryking oorbodig. Ons aanvaar dus dat enige datary x deur een of ander onverhoedbare eksterne bron gekontamineer is, en dat die gedrag van die kontaminasie 'n redelike verdeling volg.

Aanname 1.6.1 word nou gemaak om die volgende redes:

- 1] Eenvoud in berekenings.
- 2] Daar wil spesifiek gekyk word na die geraasverwyderingseienskappe.
- 3] Slegs operatore met redelike seimbewaringseienskappe gaan behandel word en sodoende behoort verskillende uitgestuurde seinkomponente nie te veel distorsie, op die resultate wat later volg teweeg te bring nie.

Aanname 1.6.1[12]

Die uitgestuurde sein is die nul sein.

Enige ontvangde datary x kan opgedeel word in 'n sein- en geraaskomponent $x=s+g$.

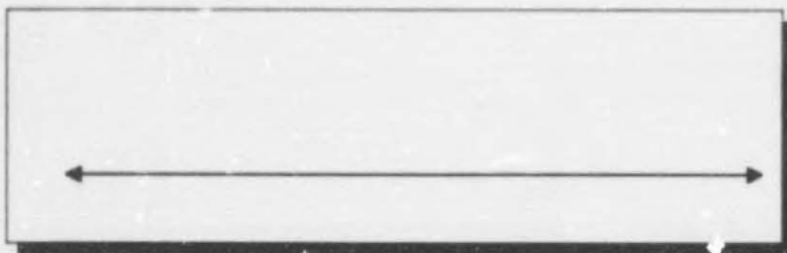
Maar daar word aanvaar dat die uitgestuurde sein die nulsien is, d.w.s $x=0+g$.

Dit in ag geneem volg dus dat ons van enige redelik goeie gladstryker sal verwag om soveel moontlik van die geraaskomponent te verwyder, d.w.s om so na as moontlik die nulry as uittree te lewer (met inagnome van bostaande aanname).

Bostaande skep nou 'n vereenvoudigde model waarin ons nie-lineêre gladstrykers met mekaar kan vergelyk. Modelle van verskillende seinkomponente kan ook geskep en beskou word, maar val buite die bestek van hierdie skripsie.

Die manier waarop die nie-lineêre gladstrykers hier met mekaar vergelyk word, is kortliks as volg: Daar word t.w.v. eenvoud aanvaar dat die uitgestuurde sein die nulsein is, d.w.s. 'n konstante sein. Hierop gaan geraas met 'n spesifieke verdeling bygevoeg word en die nulsein met sy bygevoegde geraas gaan deur die nie-lineêre gladstryker gestuur word om die uittreedata se verdeling te bepaal. Die nie-lineêre gladstryker kan dus geassosieer word met 'n oordragfunksie van een statistiese verdeling na 'n ander. Na die uittreeverdeling bepaal is, gaan die variansie van die uittreeverdeling bepaal word. Die nie-lineêre gladstryker waarvan die uittreeverdeling die kleinste variansie het, sal die mees effektiewe gladstryker wees, aangesien so 'n gladstryker 'n uittree sal gee wat nader om die nulsein gekonsentreer is, as enige van die ander gladstrykers.

Die volgende gaan dus gedoen word: Eers word aanvaar dat die uitgestuurde sein die nulsein is.



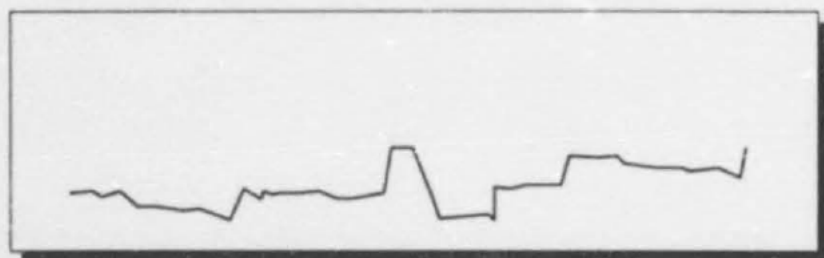
Grafiek 1.6.1

Hierop gaan geraas bygevoeg word. Die geraaspunte is die waargenome punte van 'n stogastiese veranderlike, sê X , met X in dié geval uniform verdeel in $[-0.5, 0.5]$.

Die geraas plus die nulsein lyk dus moontlik as volg:

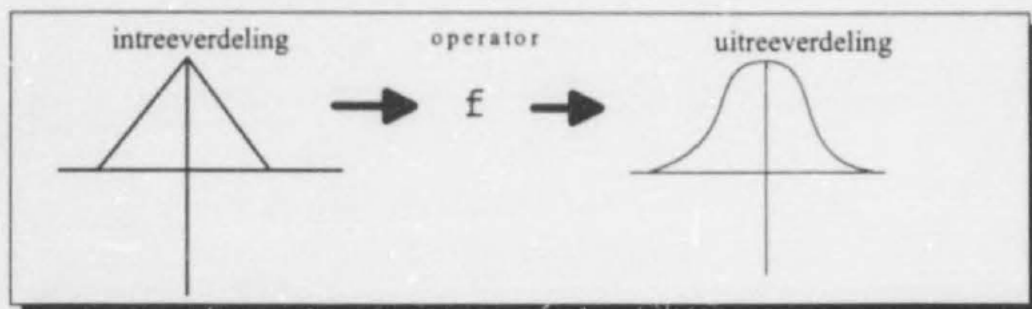
Grafiek 1.6.2

Nadat 'n nie-lineêre gladstryker hierop toegepas is, lyk die datary x moontlik as volg.

Grafiek 1.6.3

Die waarskynlikheidsdigtheidsfunksie van die uitreeverdeling gaan dan vergelyk word met 'n histogram verkry deur simulatie om die korrektheid van die verdeling te toets

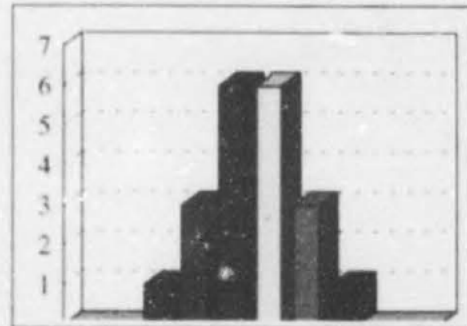
Skematies lyk dit as volg:

Figuur 1.6.1

Na die bepaling van uitreeverdeling van die gladstryker, word die verdeling getoets deur 'n histogram van die uitreedata te bepaal en met die waarskynlikheidsdigtheidsfunksie te vergelyk soos in figuur 1.6.2. Dit word dus beide analities en met simulatie gedoen.

Tabel 1.6.1

Grense	Intreede hoeveelheid	Uittreed hoeveelheid
$(-0.5, -0.4)$	0	0
$(-0.4, -0.3)$	1	0
$(-0.3, -0.2)$	2	1
$(-0.2, -0.1)$	3	3
$(-0.1, 0)$	4	6
$(0, 0.1)$	4	6
$(0.1, 0.2)$	3	3
$(0.2, 0.3)$	2	1
$(0.3, 0.4)$	1	0
$(0.4, 0.5)$	0	0

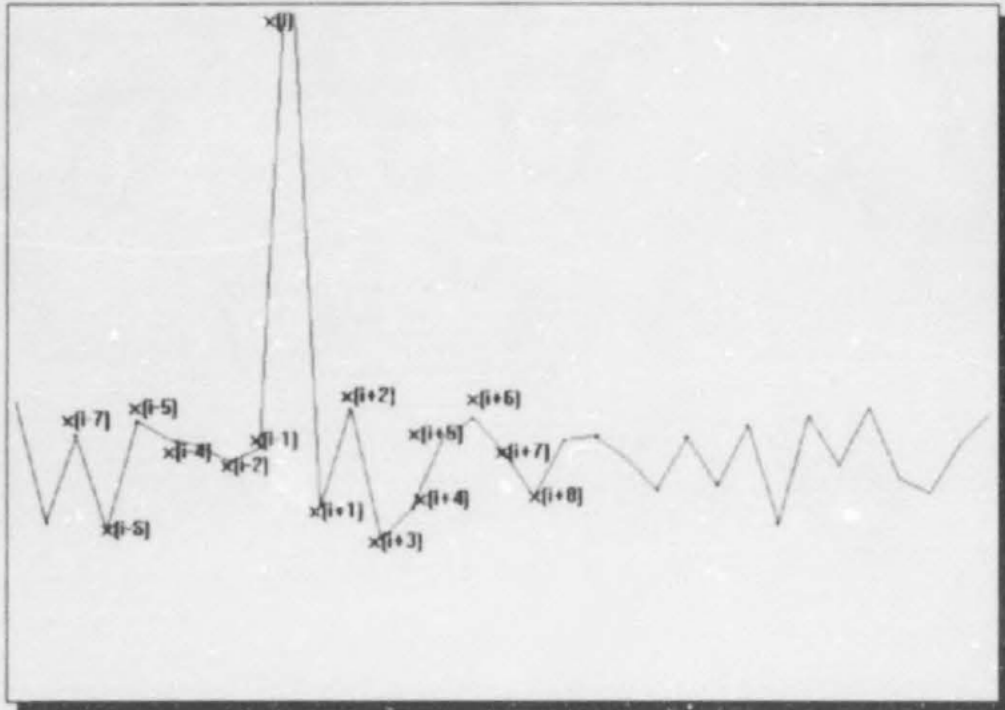
Figuur 1.6.2Histogramvoorstelling van tabel 1.6.1

Voor die berekenings volgens bostaande manier gedoen word, word eers gekyk na die nie-lineêre gladstrykers wat gebruik gaan word in die vergelykingsproses en word daarna kortliks bespreek in terme van hul ontstaan, wiskundige formulering en bekendste eienskappe.

AFDELING 2

Verskeie nie-lineêre gladstrykers.

Wanneer verskillende gladstrykers beskou word, sal die volgende uittreksel van 'n datary gebruik word as intree om die werking en sommige van die eienskappe van die gladstrykers te illustreer.



2.1 Wiskundige formulering en puntberekening.

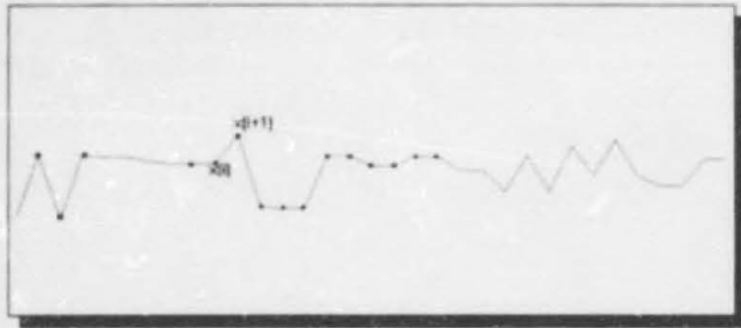
2.1.1 Mediaan

Definisie 2.1.1.1

Laat M_n die operator wees wat 'n ry x afbeeld op $M_n(x)$ sodat:

$$M_n(x_i) = \text{mediaan}\{x_{i-n}, \dots, x_i, \dots, x_{i+n}\}$$

Uit bostaande definisie volg dus dat vir enige datary x , die nie-lineêre gladstryker M_n 'n uitree lewer $M_n(x)$, sodat $M_n(x_i)$ die middelpunt is van $2n+1$ opeenvolgende punte (om $x(i)$ versprei) wat volgens grootte gerangskik is. Daar sal ook na M_n verwys word as 'n $2n+1$ -punt-mediaan. Die mediaan, in die geval M_1 oftewel die driepuntmediaan, sal die volgende uitree op bg. datary lewer.



Grafiek 2.1.1.1

2.1.2 Rekursiewe mediaan

Definisie 2.1.2.1

Laat R_n die operator wees wat 'n ry x afbeeld op $R_n(x)$ sodat:

$$R_n(x_i) = \text{mediaan}\{R_n(x_{i-n}), \dots, R_n(x_{i-1}), x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}\} \quad \forall i$$

Die rekursiewe mediaan is soortgelyk aan die mediaan behalwe dat dit voorheen gladgestrykte punte in berekening bring in die bepaling van die uitree.

Die rekursiewe mediaan, R_1 , sal ook as volg aangedui word MR of M_R

2.1.3 Die LULU-operatore [9]

Definisie 2.1.3.1

Laat L_n, U_n, Δ_n en ∇_n die operatore wees wat 'n ry x afbeeld op $L_n(x), U_n(x), \Delta_n(x)$ en $\nabla_n(x)$ waar:

$$\Delta_n(x_i) = \min\{x_{i-n}, \dots, x_i\} \quad \forall i$$

$$\nabla_n(x_i) = \max\{x_i, \dots, x_{i+n}\} \quad \forall i$$

$$L_n(x_i) = \nabla_n \Delta_n(x_i) \quad \forall i$$

$$U_n(x_i) = \Delta_n \nabla_n(x_i) \quad \forall i$$

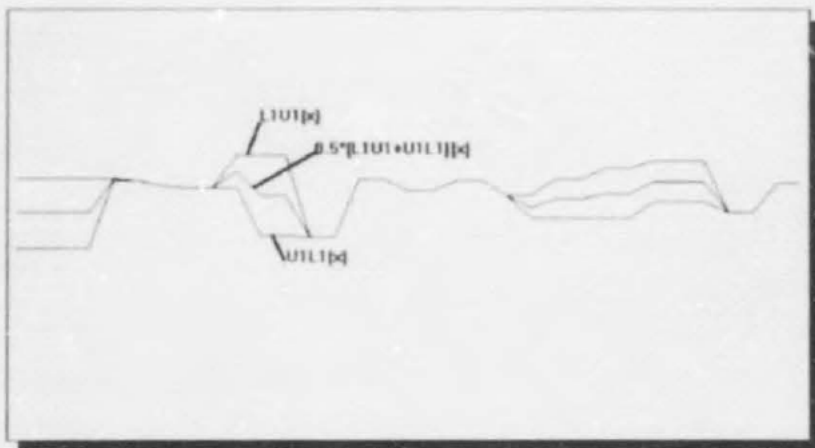
Die operatore $L_n U_n$ en $U_n L_n$ (gevolglik die naam LULU-operatore) sal ook gebruik word waar $L_n U_n(x_i) = L_n(U_n(x_i))$ en $U_n L_n(x_i) = U_n(L_n(x_i))$.

Die berekening van 'n uitteerpunt van die L en U operatore is in die algemeen baie eenvoudig. Gestel ons wil bv. $L_n(x_i)$ bepaal.

$$\begin{aligned} L_n(x_i) &= \nabla_n \Delta_n(x_i) \\ &= \max\{\Delta_n(x_i), \dots, \Delta_n(x_{i+n})\} \\ &= \max\{\min\{x_{i-n}, \dots, x_i\}, \dots, \min\{x_i, \dots, x_{i+n}\}\} \end{aligned}$$

Dieselfde metode word gebruik vir die berekening van $U_n(x_i), L_n U_n(x_i)$ en $U_n L_n(x_i)$.

Die belang van die operatore sal later uitgewys word, maar kan geïllustreer word met die uitree van die operatore (gladstrykers) $L_1 U_1$ en $U_1 L_1$ op bostaande datary.



Grafiek 2.1.3.1

Wat hier op gelet moet word, is dat die operatore $L_n U_n$ en $U_n L_n$ asimmetries van aard is met $U_n L_n(x) \leq L_n U_n(x)$. As finale uitree kan enige van $L_n U_n(x)$ of $U_n L_n(x)$ gekies word, of, soos in die grafiek, 'n lineêre kombinasie van die twee operatore bv. $0.5*(U_n L_n + L_n U_n)(x)$.

2.1.4 Saamgestelde Gladstrykers.

Definisie 2.1.4.1

Vir enige operator W_n kan sy magte gedefinieer word deur,

$$W_n^m(x) = W_n(W_n(\dots W_n(x)\dots)) \text{ m-keer.}$$

d.w.s. die gladstryker W word 'n totaal van m-keer toegepas, elke keer op die nuwe uitree.

Gladstrykers wat 'n herhaaldelike toepassing is van bogenoemde gladstrykers, soos M^n en $M_2 M_1^2$ wat deur Tukey [13], [14] gewild gemaak is, gaan ook gebruik word, aangesien hulle tradisioneel 'n belangrike rol speel in nie-lineêre gladstryking.

2.1.5 Berekening van uittreepunte in s kere grensgevalle.

Gestel nou een van die bogenoemde gladstrykers moet toegepas word op 'n eindige datary $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Die probleem ontstaan dat, afhangende van watter uittreepunt bereken moet word, daar nie genoeg datapunte in Y mag bestaan om 'n uittreepunt te bereken nie.

Om $M_1(x_1)$ te bereken moet mediaan $\{x_0, x_1, x_2\}$ bereken word, maar die punt $x(0)$ bestaan nie. In so 'n geval, of in enige ander geval waar daar nie genoeg datapunte bestaan nie, word daar net genoeg datapunte aan die begin of einde bygevoeg, gelyk aan die eerste of laaste punt, afhangend van watter uittreepunt bereken word. Dit kan dan gebruik word om enige uittreepunt van M_n en die LULU-operatore te bereken.

In die berekening van 'n uittreepunt van die rekursiewe mediaan moet daar egter 'n effens ander benadering gevolg word. Oeskou: $RM(x_1) = \{RM(x_0), x_1, x_2\}$, wat in dié geval gedoen word, is om $R_1(x_0)$ gelyk aan x_1 te stel

Net so om $R_n(x_1)$ te bereken, waar $R_n(x_1) = \{R_n(x_{1-n}), R_n(x_{1-(n-1)}), \dots, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, word $R_n(x_{1-n}) = R_n(x_{1-(n-1)}) = \dots = R_n(x_0) = x_1$ gestel en daarna kan die berekenings op 'n gewone manier voortgesit word.

Die regverdiging en verduideliking van bostaande metodes is in die algemeen baie eenvoudig.
Dit is reeds in artikels behandel [15], en word dus nie hier verder bespreek nie.

2.2 Belangrike eienskappe van nie-lineêre gladstrykers.

In hierdie gedeelte van die werk word die volgende definisies benodig:

Laat $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Definisie 2.2.1

Y is monotoon stygend indien $y_1 \leq y_2 \dots \leq y_n$.

Y is monotoon dalend indien $y_1 \geq y_2 \dots \geq y_n$.

Definisie 2.2.2

'n $Ry\ x$ is n -monotoon indien elke $n+2$ opeenvolgende punte monotoon stygend of dalend is.

Definisie 2.2.3

'n Operator W is idempotent indien $W^2(x) = W(x)$.

Bostaande definisie impliseer dat herhaaldelike toepassing van 'n idempotente operator oorbodig is aangesien daar geen verandering in uitree gelewer word na die eerste toepassing nie.

Definisie 2.2.4

Die *steungebied* van 'n operator W is die kleinste interval $\{a_{i-m}, a_{i+n}\}$ om i sodat $W(x_i)$ slegs afhanklik is van die elemente $\{x_{i-m}, x_{i+n}\}$, (verandering aan x buite die interval sal nie $W(x_i)$ beïnvloed nie). 'n Operator is lokaal indien dit 'n eindige steungebied het.

Die Engelse benaming van *steungebied* is 'span' en word as volg deur Mallows gedefinieer:

" The span $Sp(W)$ of W is the smallest interval of indices such that $W(x)_i$ does depend only on $\{x_j : j - t \in Sp(W)\}$. " [8]

2.2.1 Mediaan

Die mediaan is seker die populêrste nie-linêre gladstryker wat gebruik word en is bekend gemaak deur Tukey[13]. Daarna is dit al deur Beaton en Tukey [14] gebruik in gladstryking van statistiese data, in seinverwerking deur Rabiner[16] et al, Steele en Goodman [17], en Jayant [18] en vir beeldverwerking deur Pratt [19], Frieden [20], en Ataman en Alparslan [21].

Daar is ook van die tekortkominge uitgewys. Die tekortkominge het aanleiding gegee tot die ontwikkeling van latere gladstrykers.

Van die meer algemeen bekende voordele, nadele en eienskappe van die mediaan is die volgende.

1] M_n is lokaal, aangesien daar slegs $2n+1$ punte van 'n dataset, se x , benodig word in die berekening van 'n uitteerpunt.

2]

Stelling 2.2.1.1

$M_n(x_i) = x_i$ indien $\{x_{i-n}, \dots, x_i, \dots, x_{i+n}\}$ n-monotoon is

Bewys van stelling 2.2.1.1

Die bewys volg direk uit definisie 2.1.1.1 aangesien $\{x_{i-n}, \dots, x_i, \dots, x_{i+n}\}$ n-monotoon is.

Dié stelling impliseer dat, indien 'n punt x_i tussen sy bure geleë is, sy uitree onveranderd bly indien M_1 op die punt toegepas word. Die belang lê daarin dat ons van 'n nie-lineêre gladstryker verwag om impulsiewe geraas te verwyder en impulsiewe geraas is per definisie 'n punt x_i wat ver bo of onder albei sy bure geleë is. As 'n punt $x(i)$ dus tussen sy bure geleë is, is dit nie onredelik om te verwag dat so 'n punt nie geraas is nie, aangesien geraas in die algemeen willekeurig van aard is en dus nie 'n monotone patroon sal aaneem nie.

Hieruit kan dus afgelei word dat die mediaan goeie seinbehoudingseienskappe het, terwyl dit tog geraas, veral impulsiewe geraas, verwyder.

$$3] \text{ Mediaan}(\alpha x(i)) = \alpha \text{mediaan}(x(i)) \quad [16]$$

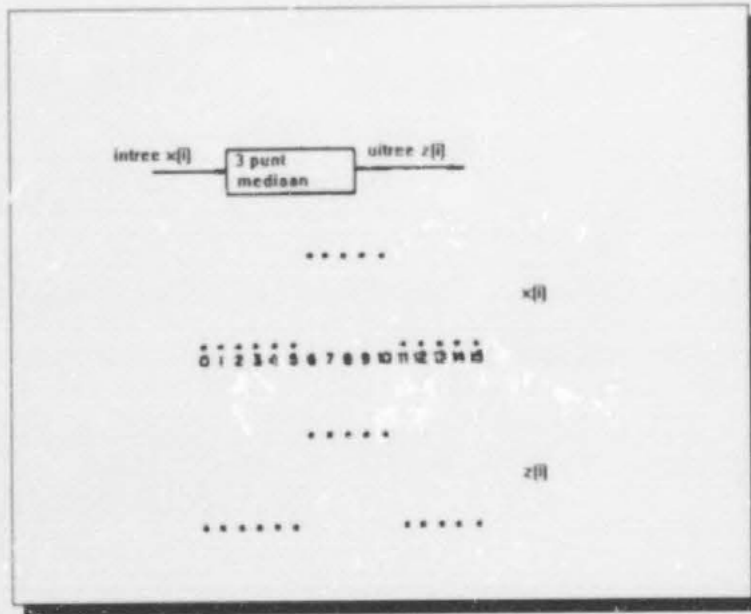
Dit is belangrik, aangesien skalering van die intreedata lei tot dieselfde skalering van die gladgestrykte uitreedata.

Dit kan ook beklemtoon word dat, aangesien die mediaan nie-lineêr is, die volgende nie algemeen sal geld nie :

$$\text{mediaan}(\alpha x(i) + \beta y(i)) = \alpha \text{mediaan}(x(i)) + \beta \text{mediaan}(y(i))$$

4] Mediane sal nie skerp diskontinuiteite in die data smeer nie, solank die duur van die diskontinuiteit nie 'n sekere kritieke tyd oorskry nie [16]. Die eienskap is een van die sleuteleienskappe van die mediaan.

Die volgende voorbeeld illustreer hierdie eienskap:



Die intreedata vertoon skerp diskontinuiteite by die punte $i=7$ en $i=12$.

As die uitreepunte $z(0)$ en $z(18)$ hanteer word soos in die onderafdeling oor randpunte, sal blyk dat die uitree van $z(i)$ presies gelyk is aan die intree $x(i)$.

Selfs as die 3-puntmediaan in bostaande voorbeeld vervang word deur 'n 5-, 7-, of selfs 'n 9-punt mediaan, sal die uitree $z(i)$ onveranderd bly. Hierteenoor, as 'n mediaan groter as nege gebruik word, sal die diskontinuiteit verwyder word en die uitree $z(i)$ sal plat wees.

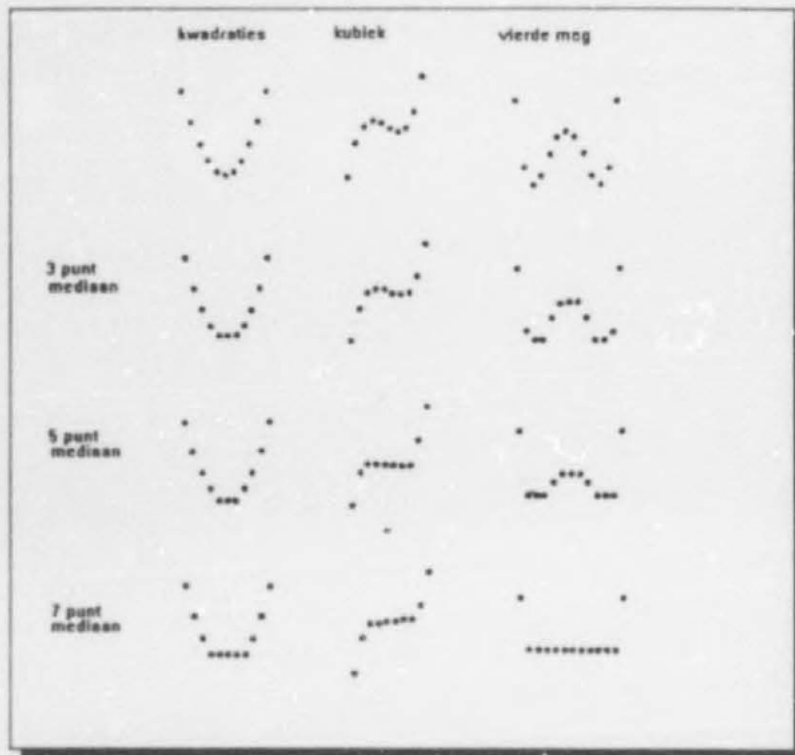
Dit wil sê, die grootte van die mediaan wat gebruik word, is direk afhanklik van die minimum duur van die diskontinuiteit wat die gebruiker wil behou.

Die eienskap is belangrik, veral in spraakprossesering waar, as gevolg van metings en/of verwerkingsfoute, die data dikwels enkel en/of dubbel diskontinuiteite vertoon.

Dit kan maklik gesien word dat 3-, 5-puntmediane sulke foute sal elimineer terwyl groter diskontinuiteite behoue sal bly.

5] Mediane sal benaderd polinome volg. [16]

Die eienskap dat mediane benaderd lae orde polinome volg kan maklik gesien word deur na die uittree van kwadratiese, kubiese en vierdegraadse polinome te kyk.



Die vermoë van 'n gladstryker om 'n redelike onderskeid tussen geraas en sein te tref is van groot belang en al die bogenoemde gladstrykers slaag in die doel.

In hierdie skripsie word slegs die gladstrykers beskou wat 'n goeie verhouding tussen seinbewaring en geraasverwydering toon.

Al die bogenoemde gladstrykers is volledig in artikels behandel en daar is wyd gekyk na hul seinbewaringseienskappe, wat algemeen bekend goed is, en om dié rede word daar slegs gekyk na die operatore wanneer daar vergelykings getref word ten opsigte van hul geraasverwyderingsvermoë.

6]

Stelling 2.2.1.2

$\{M_1(x_{i-1}), x_i, M_1(x_{i+1})\}$ is 1-monotoon indien $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ 1-monotoon is

bogenoemde eienskap sal geld ongeag waar die waardes x_{i-2} en x_{i+2} geleë is.

Bewys van stelling 2.2.1.2:

Die stelling gaan deur middel van teenspraak bewys word.

Gestel dus $\{M_1(x_{i-1}), M_1(x_i), M_1(x_{i+1})\}$ is nie 1-monotoon nie, d.w.s. die volgende moontlikhede kan voorkom:

$$\begin{aligned} 1) \quad & M_1(x_i) < M_1(x_{i+1}) \\ \text{en} \quad & M_1(x_i) < M_1(x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{of } 2) \quad & M_1(x_i) > M_1(x_{i+1}) \\ \text{en} \quad & M_1(x_i) > M_1(x_{i-1}) \end{aligned}$$

As $M_1(x_i) = M_1(x_{i+1})$

of $M_1(x_i) = M_1(x_{i-1})$ dan is dit duidelik dat $\{M_1(x_{i-1}), M_1(x_i), M_1(x_{i+1})\}$ 1-monotoon is, daarom word daar van streng kleiner en groter as gebruik gemaak.

Geval 1

Dit is gegee dat $x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}$ of dat $x_{i+1} \leq x_i \leq x_{i-1}$ aangesien $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ 1-monotoon is.

Gestel a) $x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}$
 d.w.s $M_1(x_i) = x_i$ vanaf stelling 2. 2. 1. 1
 gestel $x_{i-1} = x_i$ dan volg dat $M_1(x_{i-1}) = x_i$ en 'n teenspraak word verkry,
 gestel dus dat $x_{i-1} < x_i$ hieruit volg dat $M_1(x_{i-1}) \leq x_i$ onafhanklik van waar x_{i-2} geleë is, en daar word dus weereens 'n teenspraak verkry.

b) $x_{i+1} \leq x_i \leq x_{i-1}$
 soos by a) volg dat $M_1(x_i) = x_i$
 gestel $x_{i+1} = x_i$ dan is $M_1(x_{i+1}) = x_i$ waaruit volg dat $M_1(x_i) = M_1(x_{i+1})$ en 'n teenspraak word dus verkry.
 gestel dus $x_{i+1} < x_i$ hieruit volg dat $M_1(x_{i+1}) \leq x_i$ onafhanklik van waar x_{i+2} geleë is, en 'n teenspraak word dus verkry.

Geval 2

Die bewys hiervan is feitlik identies aan die van geval 1.

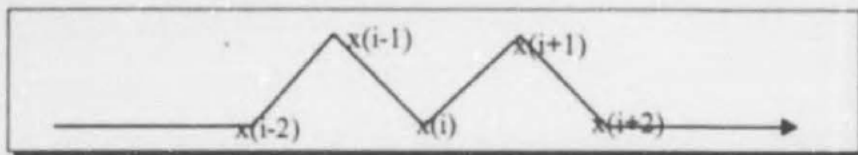
Bogenoemde stelling dui daarop dat enige 1-monotone tendens deur M_1 behou sal word, wat weer daarop dui dat M_1 'n stygende of 'n dalende rysegment as sein beskou en dus nie sal verwyder nie.

7] Een van die ernstige tekortkominge van die mediaan is dat dit nie indempotent is nie, d.w.s. herhaaldelike toepassings lei tot verskillende uittreë.

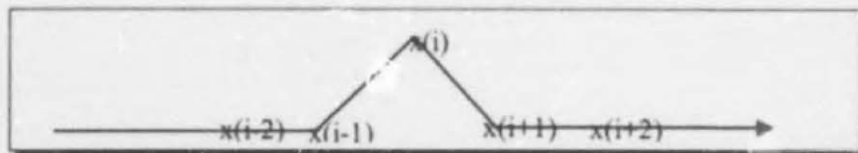
Dit moet as 'n nadeel beskou word aangesien die operator "nie tevrede is" met sy eerste en daaropvolgende uittree en dus nie baie "vertroue" het in sy "oordeel" nie.

Die volgende voorbeeld sal bostaande illustreer:

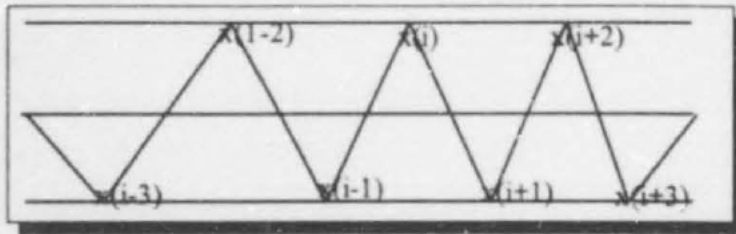
Gestel die volgende data word verkry:



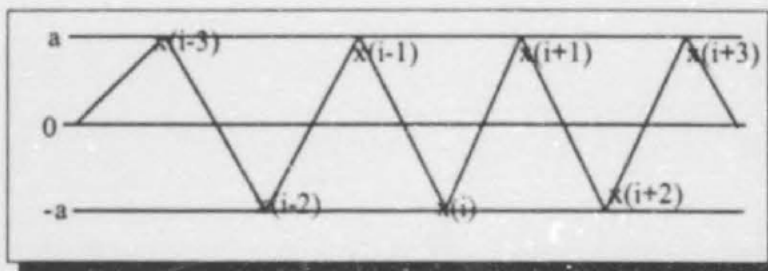
As M nou op die data toegepas word, sal die volgende verkry word:



Die uittree $\{x(i-1), x(i), x(i+1)\}$ is nie 1-monotoon nie. As gevolg hiervan sal die mediaan (toegepas op bostaande uittree) die punt $x(i)$ as geraas beskou en verwyder. Herhaaldelike toepassing van die mediaan lewer dus in die meeste gevalle ander resultate. Gewoonlik sal die meeste van die geraas na drie toepassings verwyder wees. Daar is egter gevalle waar oneindig veel toepassings nie al die geraas sal verwyder nie. Neem die volgende voorbeeld:

Voorbeeld 2.2.1.1

Die mediaan sal in bostaande geval die ry x na $-x$ verander en die uitree sal as volg lyk:



Dus sal nie eens 'n oneindige aantal toepassings van die mediaan 'n uitree gee wat slegs sein is (volgens sy interpretasie van sein) nie.

2.2.2 Rekursiewe mediaan

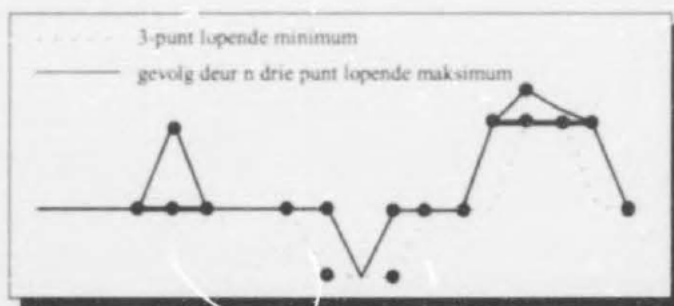
Uit die tekortkoming dat die mediaan nie indempotent is nie, is die RM (Rekursiewe mediaan) ontwikkel. Die gladstryker is wel indempotent en herhaaldelike toepassings sal dus oorbodig wees. Verder stem die algemene kenmerke van die mediaan en die rekursiewe mediaan baie ooreen.

Die RM het wel een tekortkoming wat die mediaan nie het nie, en dit is dat dit nie lokaal is nie en sodoende 'n oneindige steungebied het. Dit is duidelik 'n ongewenste eienskap, omdat 'n verandering by een punt in die sein 'n oneindige invloed sal hê.

Die LULU-operatore [9] oorkom die tekortkominge van die mediaan en die rekursiewe mediaan, terwyl dit tog uitstekende seinbewaringseienskappe besit.

2.2.3 LULU-operatore.

Verwys na grafiek 2.2.3.1. Gestel dat ons 'n konstante datary het waarop af en toe 'n opwaartse geraasimpuls geleë is. Een manier om die geraasimpuls te verwyder van 'n andersins konstante datary, is deur 'n lopende minimum, d.w.s. 'n operator wat die minimum van 'n groep punte kies, oftewel 'n operator wat die kleinste element in 'n venster van lengte n kies. So 'n operator sal alle opwaartse impulse verwyder, behalwe in gevalle waar daar een of meer naasliggende opwaartse impulse is met n die grootte van die venster. As die datary nou ook afwaartse impulse het, sal die lopende minimum die impulse wyer maak. Verder sal die lopende minimum opwaartse tendense vertraag en afwaartse tendense versnel. Hiermee word ook verstaan dat die opwaartse pulse vernou word en die afwaartse pulse verbreed word, soos geïllustreer in grafiek 2.2.3.1. Die tekortkominge kan oorkom word deur die lopende minimum deur 'n lopende maksimum te volg, wat dan die afwaartse impulse tot hul oorspronklike lengte sal verbreed. Die afwaartse impulse sal dus vernou en die opwaartse impulse verbreed word sodat enige monotone toenemende of afnemende gedeeltes behoue sal bly (behalwe moontlik punte tussen twee verskillende tendense). Insgelyks kan daar beweer word dat 'n lopende maksimum gevolg deur 'n lopende minimum afwaartse impulse sal verwyder en monotone gedeeltes min of meer sal behou. Hierdie gedagtes het gelei tot die LULU-gladstrykers, uiteengesit in 2.1.2. [3]



Grafiek 2.2.3.1

Onder die meer belangrikke eienskappe van die LULU-operatore is die volgende:

1) Al die operatore L_n , U_n , $U_n L_n$, $L_n U_n$ is lokaal. Dit kan maklik geverifieer word deur na die definisie van die operatore te kyk.

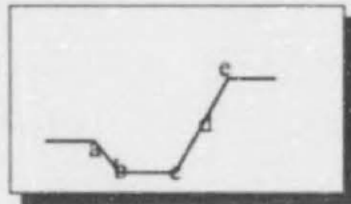
2] Die operatore L_n en U_n is albei indempotent en dus tevrede met hul uittree. Die probleem is dat 'n ander operator, soos byvoorbeeld die mediaan, nie tevrede sal wees met die voorafgenoemde operatore se uittree d.w.s. $M_n L_n(x) \neq L_n(x)$, die rede hiervoor is dat L en U nie 'n monotone uittree lewer nie. Onderstaande voorbeeld sal bogenoemde uitlig:

voorbeeld 2.2.3.1

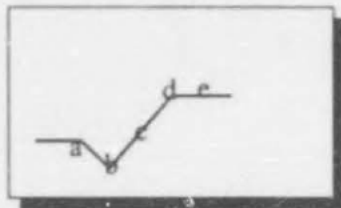


L_1 toegepas op bostaande punte sal die volgende uittree lewer:

$$\Delta_1(x) =$$



$$\nabla_1 \Delta_1(x) =$$



Uit die voorbeeld is dit duidelik dat die uittree van L_1 nie monotoon is nie, en gevolglik sal die mediaan die uittree beïnvloed.

Laastens dien ook genoem te word dat die operatore, net soos die mediaan, 'n punt $x(i)$ onveranderd sal laat indien die punt monotoon ten opsigte van sy bure is.

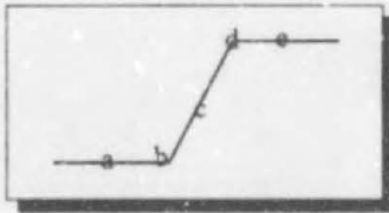
Bogenoemde tekortkominge word oorbrug deur die invoer van die operatore $L_n U_n$ en $U_n L_n$.

3] Die volgende stelling kan bewys word.

Stelling 2.2.3.1 [9]

$L_n U_n$ en $U_n L_n$ se uitree is n -monotoon.

$U_1 L_1$ sal ten opsigte van bst. voorbeeld die volgende uitree lewer wat monotoon is.



4] $U_n I_n$ en $I_n U_n$ is albei ook indempotent, dit volg omdat $U_n L_n$ en $L_n U_n$ geen punt wat tussen van sy bure geleë is, sal verander nie. Uit die vorige stelling weet ons dat die uitree na 'n eerste toepassing van $U_n L_n$ of $L_n U_n$ monotoon is.

5] Die volgende stelling kan bewys word.

Stelling 2.2.3.2 [9]

$$U_n L_n \leq M_n^m \leq L_n U_n$$

wat impliseer dat $U_n L_n$ geraas nie slegter na bo verwyder en $L_n U_n$ geraas nie slegter na onder verwyder as die mediaan (M_n^m).

2.3 Verdeling van nie-lineêre gladstrykers in klasse.

Soos voorheen genoem, word slegs die nie-lineêre gladstrykers wat goeie seinbewarings-eienskappe het, gebruik in die vergelykingsproses (bv. bostaande operatore).

Hierna word daar gekyk na die verskillende seinbewaringseienskappe en daarvolgens indelings gedoen.

Om dit te illustreer kan bv. na die werking van M_1 en M_2 gekyk word.

M_2 sal enige 1-monotone datasegment, wat nie n-monotoon is vir $n > 1$ nie, as geraas beskou en dus gedeeltelik verwyder terwyl M_1 so 'n segment as sein sal beskou en gevolglik onveranderd laat.

Logies hieruit volg dan dat M_2 baie sterker geraasverwyderingseienskappe het (ten koste van seindistorsie) en gevolglik sal die uittreeverdeling van die operator 'n kleiner variansie lewer as M_1 . Dieselfde sal gesê kan word vir enige M_n en M_p met bv. $p > n$. Sulke operatore sal dus nie in 'n ooreenstemmende klas vergelyk kan word nie.

Operatore soos $M_1^2, M_1^3, L_1 U_1, U_1 L_1$ en moontlik ook $0.5 * (L_1 U_1 + U_1 L_1)$ val egter in dieselfde klas, aangesien hulle almal 1-monotone datasegmente sal behou en gevolglik ooreenstemmende seinbewaringseienskappe besit.

Wanneer die uittreeverdelings bepaal word, vir 'n gegewe intreeverdeling, sal daar 'n grafiek gegee word waar al die uittreeverdelings (van al die operatore, of hul nou in dieselfde klas val of nie) tesame geplot word, sodat daar gesien kan word watter aansienlike verbeterings plaasvind (ten opsigte van uittreevariensies) indien M_2 byvoorbeeld in plaas van M_1 gebruik word.

Afdeling 3Statistiese en Wiskundige gegewens [23]Definisie 3.1

Die produk van die eerste n natuurlike getal word die fakulteit van n genoem en aangedui as $n!$.

$$0! = 1$$

$$n! = n * (n-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1) * n!$$

Definisie 3.2

Die aantal verskillende maniere om r voorwerpe uit n te kies word n kombinasie r genoem en aangedui as $\binom{n}{r}$.

Stelling 3.1

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Laat A en B twee gebeurtenisse wees.

Definisie 3.3

Die waarskynlikheid dat 'n gebeurtenis A sal plaasvind word aangedui deur $P(A)$.

Definisie (voorwaardelike waarskynlikheid).

Die waarskynlikheid dat A sal plaasvind gegee B vind plaas word as volg aangedui $P(A/B)$.

Stelling 3.2

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ met } P(A \cap B) = P(A \text{ en } B)$$

Definisie 3.4

Twee gebeurtenisse is onafhanklik indien: $P(A/B) = P(A)$.

Laat X 'n stogastiese veranderlike wees, d.w.s. X kan waardes in 'n sekere interval aanneem, met 'n vaste waarskynlikheid. Aanvaar dat X 'n kontinue verdeling het.

Definisie 3.5 (waarskynlikheidsdigtheidsfunksie (wdf.))

$$P(X = x) = f_X(x)$$

Definisie 3.6 (verdelingsfunksie (vf.))

$$P(X \leq x) = F_X(x)$$

Stelling 3.3

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^u f_X(x) dx$$

Definisie 3.7.

Die verwagte waarde van 'n stogastiese veranderlike X word aangedui deur $E(X)$, en as volg gedefinieer:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Stelling 3.4

- 1] As k 'n konstante is en X is 'n stogastiese veranderlike met kontinue verdeling, dan geld die volgende:

$$E(k) = k$$

$$E(kX) = kE(X)$$

- 2] As Y 'n stogastiese veranderlike is en Z is gelyk aan die som van die twee stogastiese veranderlikes X en Y , dan :

$$E(Z) = E(X) + E(Y).$$

- 3] As die stogastiese veranderlike Z gelyk is aan die produk van die twee stogastiese veranderlikes X en Y , dan:

$$E(Z) = E(X)E(Y).$$

Definisie 3.8

Die variansie van 'n stogastiese veranderlike X word aangedui deur $\text{var}(X)$ en as volg gedefinieer:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Die standaardafwyking van die veranderlike X is $\sqrt{\text{var}(X)}$

Stelling 3.5

As X en Y onafhanklike stogastiese veranderlikes is, en k , a , b is konstantes, dan geld die volgende:

1] $\text{var}(kX) = k^2 \text{var}(X)$

2] $\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y)$

Definisie 3.9 (Voorwaardelike verwagte waardes)

Die voorwaardelike verwagte waarde van 'n stogastiese veranderlike X , gegee dat 'n ander stogastiese veranderlike Y gelyk is aan y is:

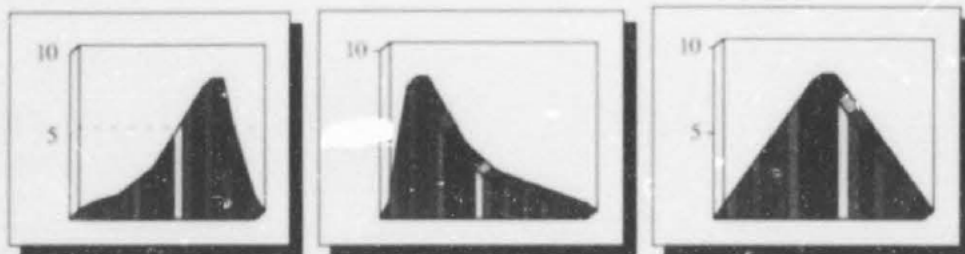
$$E(X/Y=y) = \int_{\text{oor alle } x} xP(X=x/y=y)dx$$

Stelling 3.6

$$E(X) = E_{\text{oor } y}(E(X/Y))$$

Opmerking 3.1

'n Wdf. kan skeef na links, skeef na regs of simmetries verdeel wees:

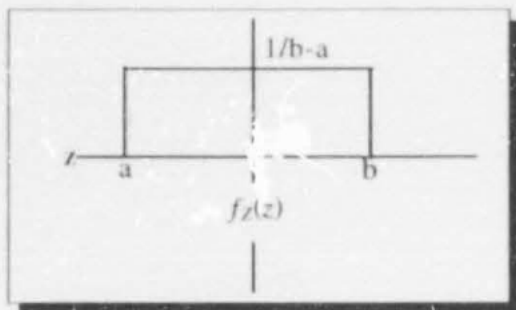


Laat Z 'n stogastiese veranderlike wees met verdelingsfunksie(vf.) $F_Z(z)$ en waarskynlikheidsdigtheidsfunksie(wdf.) $f_Z(z)$. (3.1)

Definisie 3.10

Z het 'n uniforme verdeling indien $f_Z(z) = \frac{1}{b-a}$ waar $a \leq z \leq b$
 $= 0$ andersins

As Z 'n Uniforme verdeling het, dan is die waarskynlikheid dat Z 'n waarde tussen a en b sal aanneem ewe groot. Indien a en b simmetries om nul is, d.w.s. die $E(Z)=0$, dan sal die grafiek van $f_Z(z)$ as volg lyk:

Figuur 3.1

In die meeste gevalle is die berekening van die kumulatiewe uitreeverdeling van voorafgenoemde gladstryker, ongeag die intreeverdeling, moontlik sonder werklike komplikasies, daar is egter gevalle waar die berekenings baie moeilik word, afhangend van die intreeverdeling. In sulke gevalle word die Uniforme-verdeling as intreeverdeling gebruik en sodoende word berekenings heelwat vereenvoudig.

Die uniforme verdeling sal ook as intreeverdeling gebruik word in die berekenings van sekere wdf., bloot vir eenvoud in berekening. Die voorafgaande twee opmerkings sal wel later meer duidelik word wanneer die berekenings gedoen word.

Definisie 3.11

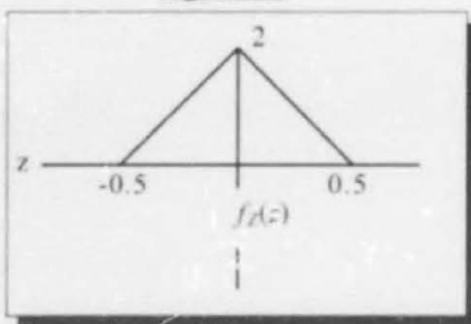
Z is 'n orde 2 B-latfunksie op $[-0.5, 0.5]$ indien :

$$f_Z(z) = 4z + 2 \text{ as } -0.5 \leq z \leq 0$$

$$f_Z(z) = -4z + 2 \text{ as } 0 \leq z \leq 0.5$$

Die grafiek van $f_Z(z)$ soos in definisie 3.11 lyk as volg :

Figuur 3.2



Die wdf. is in figuur 1.1.1 as 'n voorbeeld gebruik. Die verdeling gaan selde gebruik word, maar is van belang aangesien dit 'n aanloop tot die Normaal- of Gaussiese verdeling is.

Definisie 3.12 Die Normaalverdeling.

Z is normaal verdeel indien :

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z-\mu}{\sigma_z} \right)^2 \right)$$

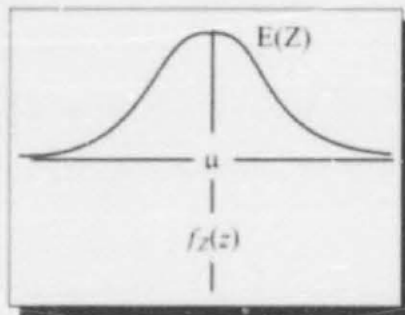
met

$$-\infty \leq z \leq \infty$$

Die twee parameters μ, σ , is onderskeidelik die gemiddelde en standaardafwyking van bostaande verdeling.

Die grafiek van die wdf van die stogastiese veranderlike Z met 'n Normaalverdeling lyk as volg:

Figuur 3.3



Aangesien ons met die nulsein gaan werk, kan die aanname gemaak word dat $\mu = 0$. (3.2)

Die aanname word gemaak, want ons wil hê dat die geraas simmetries om die nulsein versprei moet wees. Die Normaalverdeling is die ideale intreeverdeling, maar as gevolg van die ingewikkelde berekenings in die bepaling van die uitreeverdeling word die verdeling selde in die skripsie gebruik.

In die volgende afdeling gaan daar na 'n hele paar nie-lineêre gladstrykers gekyk word.

Afdeling 4Die verdeling van die uittree van verskillende gladstrykers.4.1 Mediaan.Definisie 4.1.1

$P(G_n^m(X_i) \leq y)$ = die waarskynlikheid dat die uittree $G_n^m(X_i)$ van 'n gladstryker G_n^m met intree X_i , kleiner of gelyk is aan y , waar y enige reële getal is tussen die grense van die vf $F_{X_i}(x_i)$, met $F_{X_i}(x_i)$ die verdelingsfunksie van onafhanklike geraasimpulse.

Opmerking:

In die werk wat volg sal daar gebruik gemaak word van die term: ' die uittreeverdeling van G_n^m ' met G_n^m 'n gladstryker, hiermee word daar geïmpliseer dat die intree van die genoemde gladstryker 'n bepaalde verdeling, gestel X_i , volg en gevolglik sal die uittree van die gladstryker $G_n^m(X_i)$ 'n stogastiese veranderlike wees met 'n spesifieke verdeling.

Die tipe geraas wat gebruik word, sal strek van Uniforme-geraas tussen $[-0.5, 0.5]$ tot by Gausiese-geraas, oftewel geraas wat Normaalverdeel is. Die geraas wat hier genoem word, is die intree waarna in bostaande definisie verwys is.

Vir die doel van die ondersoek sal aanvaar word dat die sein wat uitgestuur is, die nulsein is. As daar dus 'n gladstryker op die inkomende data toegepas word, sal daar van 'n goeie gladstryker verwag word om soveel as moontlik van die geraas te verwyder onderhewig aan die beperkings van die ander eise op die gladstryker. Dit wil sê om so na as moontlik terug die nulsein as uittree te kry. In statistiese terme probeer ons om die standaardafwyking van die uittree te minimeer. Tensy anders vermeld, sal daar aanvaar word dat geraas Uniform tussen $[-0.5, 0.5]$ versprei is. Dit word gedoen vir eenvoud in die berekening van die wdf. en in die teken van die grafieke (soos later wel gesien sal word).

Daar gaan nou na die verdeling van die mediaan se uittree gekyk word.

Al die onderstaande resultate is getoets deur histogramme om hul korrektheid te verifieer. Aangesien die stogastiese veranderlikes X_i identies verdeel is, stel $X_i = X \quad \forall i$.

Stelling 4.1.1 [12], [24]

$$P(M_n(X_i) \leq y) = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{n+1-j} F_X^j(y) (1 - F_X^{2n+1-j}(y))$$

waar F die verdelingsfunksie van die onafhanklike geraasimpulse is, d.w.s. die waarskynlikheid dat X kleiner of gelyk is aan y , oftewel:

$$P(X \leq y)$$

Bewys:

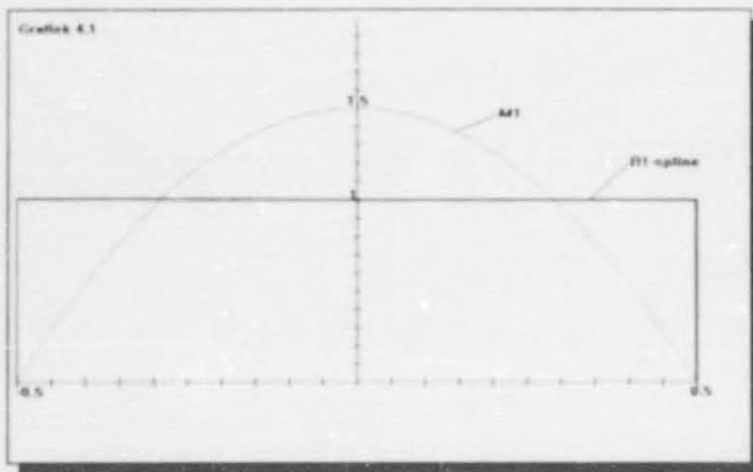
Vir $M_n(x_i)$ om $\leq y$ te wees moet $n+1$ of meer van die elemente in $\{x_{i-n}, \dots, x_i, \dots, x_{i+n}\}$ kleiner of gelyk aan y wees.

Uit die stelling volg die volgende resultate:

Resultaat 1

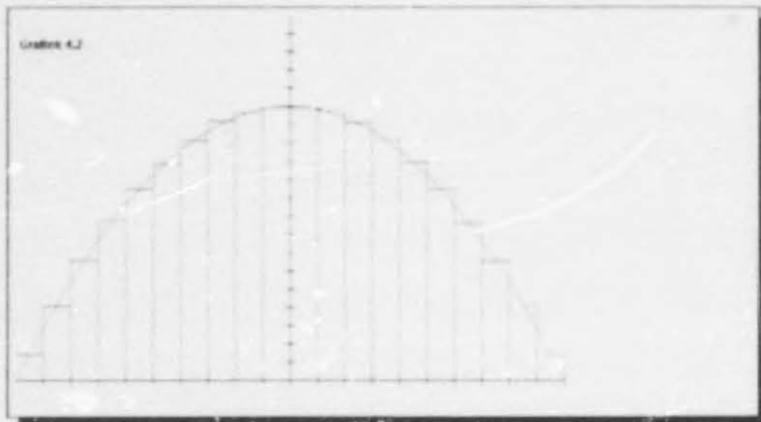
$$F_{M_1(X)}(y) = 3F_X^2(y) - 2F_X^3(y)$$

en wdf $= 6F_X(y)(1 - 6F_X(y))$, indien X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel is.



Grafiek 4.1 Die uitreeverdeling van $M_1(X)$ indien die intreegeraas Uniform $[-0.5, 0.5]$ verdeel is.

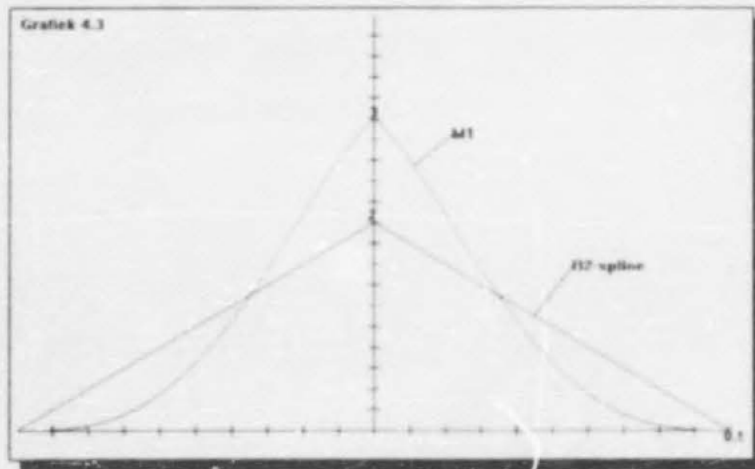
Bestaande grafiek kan getoets word met 'n histogram verkry deur simulatie, in dié geval is daar 500000 punte gebruik in die bepaal van die histogram, en lyk as volg :



Grafiek 4.2 Die uitreeverdeling van $M_1(X)$ getoets met 'n histogram verkry deur simulatie.

Indien die intreegeraas egter volgens 'n B2-latfunksie (sien vorige afdeling) verdeel is, sal die wdf. van die uitree van 'n driepunt mediaan oftewel M_1 as volg lyk :

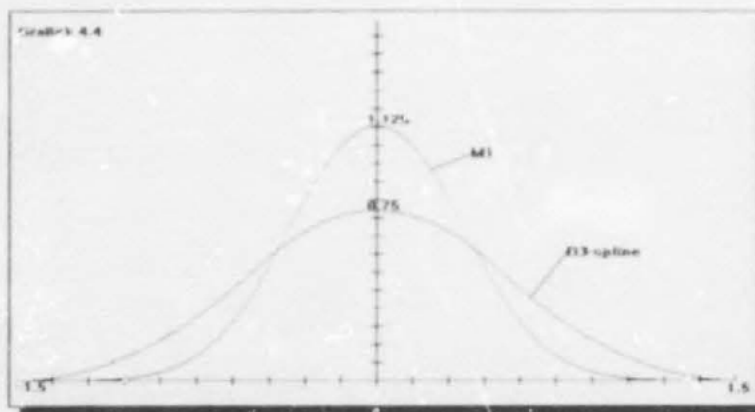
$$\begin{aligned} \text{wdf.} &= 6 * f_X(x) * (F_X(x) - F_X^2(x)), \text{ met } X \text{ verdeel volgens 'n B2-latfunksie.} \\ &= 6 * (4x + 2)(2x^2 + 2x + 0.5 - (2x^2 + 2x + 0.5)^2) \text{ vir } x \leq 0 \\ &= 6 * (-4x + 2)(-2x^2 + 2x + 0.5 - (-2x^2 + 2x + 0.5)^2) \text{ vir } x > 0 \end{aligned}$$



Grafiek 4.3 Die uitreeverdeling van $M_1(X)$ met intree 'n B2-latfunksie verdeling.

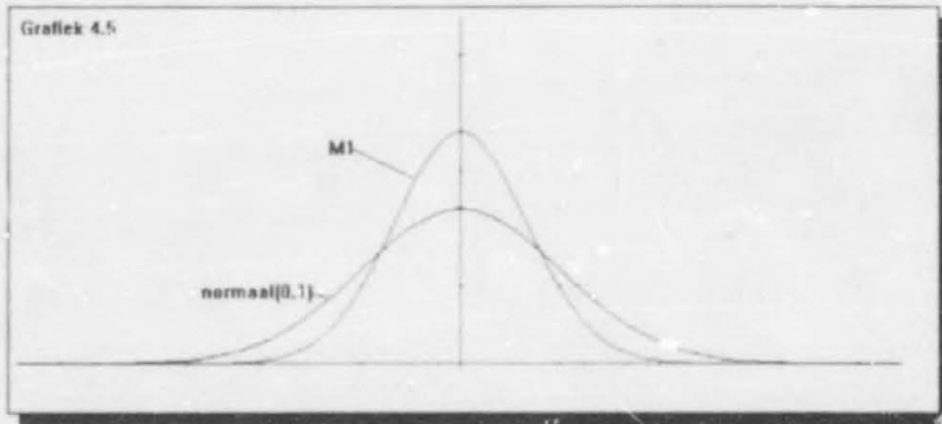
Met die B3-latfunksie as intreeverdeling sal die uitreeverdeling van M_1 as volg lyk:

$$\begin{aligned} \text{wdf.} &= 0.5 * (x + 1.5)^5 * (1 - 1/6 * (x + 1.5)^3) \text{ vir } -1.5 \leq x \leq -0.5 \\ &= 3 * (1.5 - 2x^2) * (0.75x - 1/3 * x^3 + 0.5 - (0.75x - 1/3 * x^3 + 0.5)^2) \text{ vir } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ &= 5 * (x - 1.5)^2 * ((1/6 * (x - 1.5)^3 + 1) - (1/6 * (x - 1.5)^3 + 1)^2) \text{ vir } 0.5 \leq x \leq 1.5 \end{aligned}$$



Grafiek 4.4 Die uitreeverdeling van $M_1(X)$ indien die intreegeraas volgens 'n B3-latfunksie verdeel is.

Laastens, as X Normaal(0,1) verdeel is, sal die uitreeverdeling van die driepuntmediaan as volg lyk:



Grafiek 4.5 Die uitreeverdeling van $M_1(X)$ indien die intree Normaal[0,1] verdeel is.

Resultaat 2

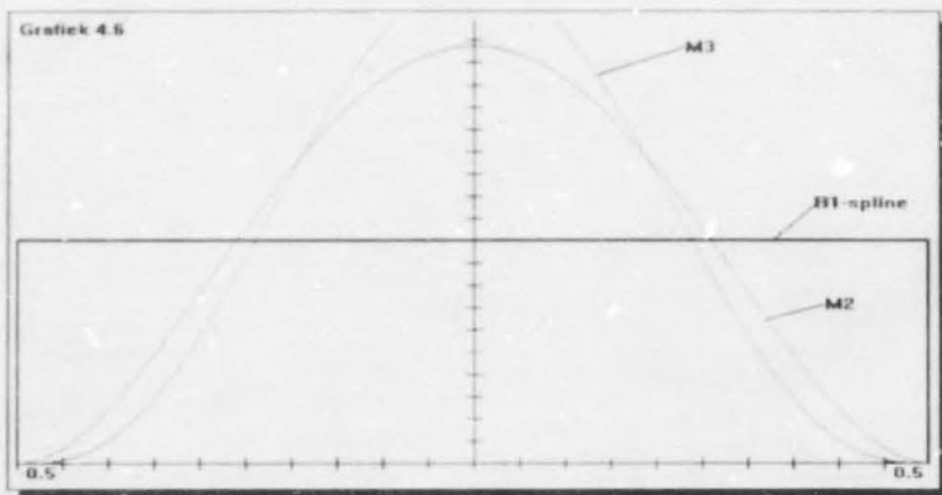
$$F_{M_2(X)}(y) = 10F_X^3(y) - 15F_X^4(y) + 6F_X^5(y)$$

en wdf $= 30F_X^2(y)(1 - 2F_X(y) + F_X^2(y))$, X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel.

Resultaat 3

$$F_{M_3(X)}(y) = 35F_X^4(y) - 84F_X^5(y) + 70F_X^6(y) - 20F_X^7(y)$$

en wdf $= 140F_X^3(y)(1 - 3F_X(y) + 3F_X^2(y) - F_X^3(y))$, X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel.



Grafiek 4.6 Die Uitreeverdelings van $M_2(X)$ en $M_3(X)$ indien die intreegeraas Uniform tussen $[-0.5, 0.5]$ verdeel is.

Resultaat 4

$$F_{M_1(X_i)}(y) = 126F_X^5(y) - 420F_X^6(y) + 540F_X^7(y) - 315F_X^8(y) + 70F_X^9(y) \\ \text{en wdf.} = 630F_X^4(y)(1 - 4F_X^1(y) + 6F_X^2(y) - 4F_X^3(y) + F_X^4(y)), \text{ indien } X \\ \text{Uniform}(-0.5, 0.5) \text{ verdeel is}$$

Daar moet op gelet word dat $f_X'(y) = 1$ en dat $F_X(y) = y + 0.5$ indien X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel is, waaruit die resulterende waarskynlikheidsdigtheidsfunksies volg.

Vervolgens gaan daar gekyk word na herhaaldelike toepassings van die mediaan. Dit is egter nie so eenvoudig om dit te bereken nie, omdat bostaande formule in stelling 4.1.1 nie gebruik kan word nie, aangesien die formule slegs geskik was vir onafhanklike verdelings. As ons bv. $M_1 M_1(X_i)$ se verdeling wil bepaal sal bst. formule nie geld nie, aangesien die intree bestaan uit stogastiese veranderlikes wat nie onafhanklik is nie. Om dit te oorbrug word daar van voorwaardelike stogastiese veranderlikes gebruik gemaak.

Die volgende illustreer die metode hieronder gebruik:

Gestel mens wil $P(\min(X_i, X_{i+1}) \leq y)$ bepaal, wetend dat

$$P(A \leq y) = P(B \leq y)P(A \leq y|B \leq y) + P(B > y)P(A \leq y|B > y) \text{ volg}$$

$$P(\min(X_i, X_{i+1}) \leq y) = P(X_i \leq y)P(\min(X_i, X_{i+1}) \leq y|X_i \leq y) + P(X_i > y)P(\min(X_i, X_{i+1})|X_i > y) \\ = P(X_i \leq y) + P(X_i > y)P(X_{i+1} \leq y),$$

want $P(\min(X_i, X_{i+1}) \leq y|X_i \leq y) = 1$, aangesien $X_i \leq y$ impliseer $\min(X_i, X_{i+1}) \leq y$, en dus sal die gebeurtenis altyd plaasvind, onder die voorwaarde, en is dus gelyk aan 1.

Bostaande is egter 'n baie eenvoudige voorbeeld. In verdere gevalle sal dit nodig wees om die voorwaardelike waarskynlikheidsproses hehaaldelik uit te voer vir die daaropvolgende verkrygte waarskynlikhede. Daar word gevolglik van 'n iteratiewe proses gebruik gemaak tot dat geëindig word met 'n bepaalbare waarskynlikheid, en vir resultaat doeleindes wanneer $P(X_j \leq y)$ of $P(X_j > y)$ bereik word.

Die toepassing van $\Delta_n(X_i)$ en $\nabla_n(X_i)$ hieronder is soos in Definisie 2.1.3.1, met $\Delta(X_i)$ en $\nabla(X_i)$ onderskeidelik gebruik in plaas van $\Delta_1(X_i)$ en $\nabla_1(X_i)$.

$$P(M_1^2(X_i) \leq y) = P_1(\text{mediaan}\{M_1(X_{i-1}), M_1(X_i), M_1(X_{i+1})\} \leq y)$$

=

$$+ P(X_{i-2} > y)P_3(\text{mediaan}\{\nabla(X_{i-2}), M_1(X_i), M_1(X_{i+1})\} \leq y)$$



$$=P(X_{i-2} \leq y) [2] [P(X_{i-1} \leq y) P_4(\min\{\Delta(X_{i+1}), M_1(X_{i+1})\} \leq y) + P(X_{i-1} > y) P_5(\text{mediaan}\{X_i, \nabla(X_i), M_1(X_{i+1})\} \leq y)]$$

$$=P(X_{i-2} \leq y) [2] [P(X_{i-1} \leq y) [4] [P(X_i \leq y) + P(X_i > y) P_4(\min\{X_{i+1}, \nabla(X_{i+1})\} \leq y)] + P(X_{i-1} > y) [5] [P(X_i \leq y) P_9(\min\{X_{i+1}, \Delta(X_{i+2})\} \leq y) + 0]]$$

$$=P(X_{i-2} \leq y) [2] [P(X_{i-1} \leq y) [4] [P(X_i \leq y) + P(X_i > y) [8] [P(X_{i+1} \leq y) + 0] + P(X_{i-1} > y) [5] [P(X_i \leq y) [9] [P(X_{i+1} \leq y) + P(X_{i+1} > y) P(X_{i+2} \leq y)]]]$$

$$P(X_{i-2} > y) P_3(\text{mediaan}\{\nabla(X_{i-2}), M_1(X_i), M_1(X_{i+1})\} \leq y)$$

$$=P(X_{i-2} > y) [3] [P(X_{i-1} \leq y) P_6(\text{mediaan}\{X_i, \Delta(X_{i+1}), M_1(X_{i+1})\} \leq y) + P(X_{i-1} > y) P_7(\max\{\nabla(X_i), M_1(X_{i+1})\} \leq y)]$$

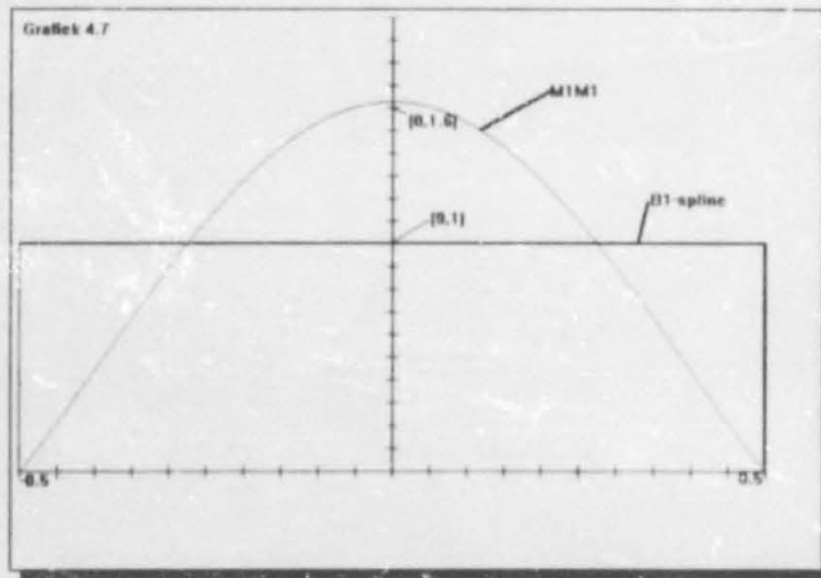
$$=P(X_{i-2} > y) [3] [P(X_{i-1} \leq y) [6] [P(X_i \leq y) + P(X_i > y) P_{10}(\max\{X_{i+1}, \nabla(X_{i+1})\} \leq y)] + P(X_{i-1} > y) [7] [P(X_i > y) P_{11}(\max\{X_{i+1}, \Delta(X_{i+2})\} \leq y) + 0]]$$

$$=P(X_{i-2} > y) [3] [P(X_{i-1} \leq y) [6] [P(X_i \leq y) + P(X_i > y) [10] [P(X_{i+1} \leq y) P(X_{i+2} \leq y)] + P(X_{i-1} > y) [7] [P(X_i > y) [11] [P(X_{i+1} \leq y)]]]$$

$$= F_X^3(y)(1 + 1 - F_X(y) + 1 - F_X(y) + 1 + F_X^2(y) - 2F_X(y) + 1 + F_X^2(y) - 2F_X(y)) + F_X^2(y)(1 - F_X(y) + 1 + F_X^2(y) - 2F_X(y)) \quad (4.1.1)$$

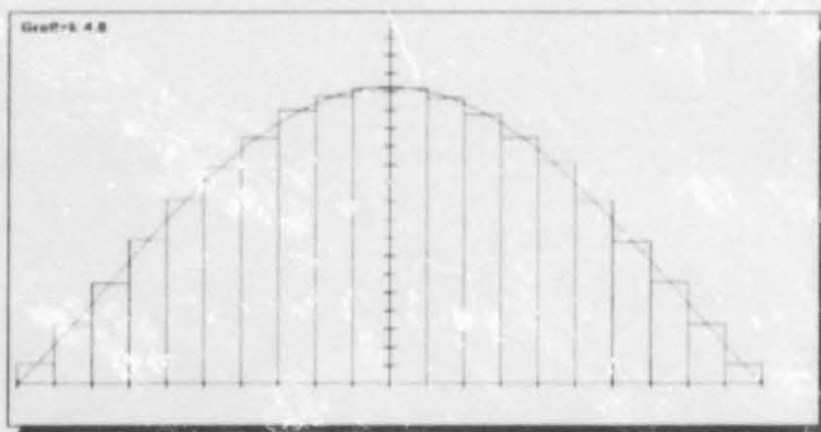
$$= 2F_X^2(y) + 2F_X^3(y) - 5F_X^4(y) + 2F_X^5(y) \quad (4.1.2)$$

met wdf. $\approx 4F_X(y) + 6F_X^2(y) - 20F_X^3(y) + 10F_X^4(y)$, indien X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel is. (4.1.3)

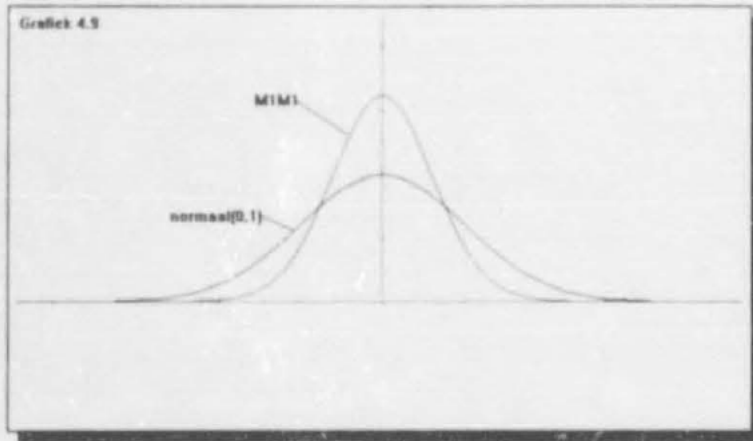


Grafiek 4.7 Die uitreeverdeling van $M_1^2(X)$ indien die intreegeraas volgens 'n B1-latticefunksie verdeel is.

Bostaande grafiek kan net soos voorheen ook geverifieer word deur simulatie en 'n histogram van waargenome uitreepunte en lyk as volg:



Grafiek 4.8 Die uitreeverdeling van $M_1^2(X)$ getoets met 'n histogram verkry deur simulatie.



Grafiek 4.9 Die uittreeverdeling van $M_1^2(X)$ indien die intreegeraas Normaal $[0,1]$ verdeel is.

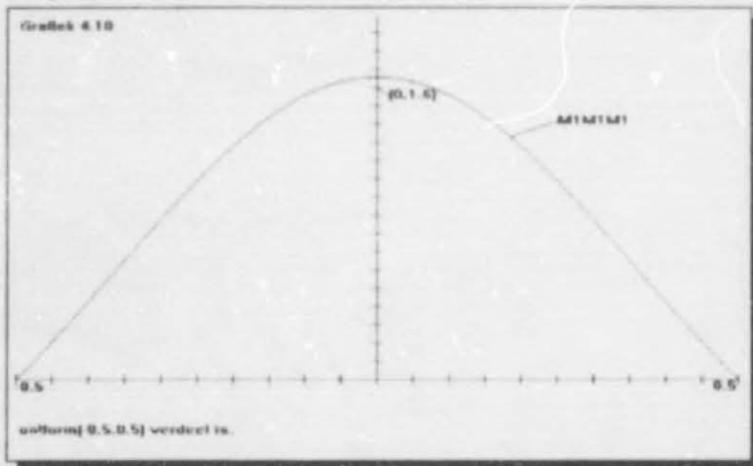
Op soortgelyke maniere kan M_1^3 , M_2M_1 en M_1M_2 se uittreeverdelings bepaal word, as gevolg van die lengte van die berekenings word slegs die resultate verskaf:

$$F_{M_1^3(X)}(y) = 2F_X^2(y) + F_X^3(y) - 7F_X^4(y) + 7F_X^5(y) - 2F_X^6(y) \quad (4.1.4)$$

met wdf.

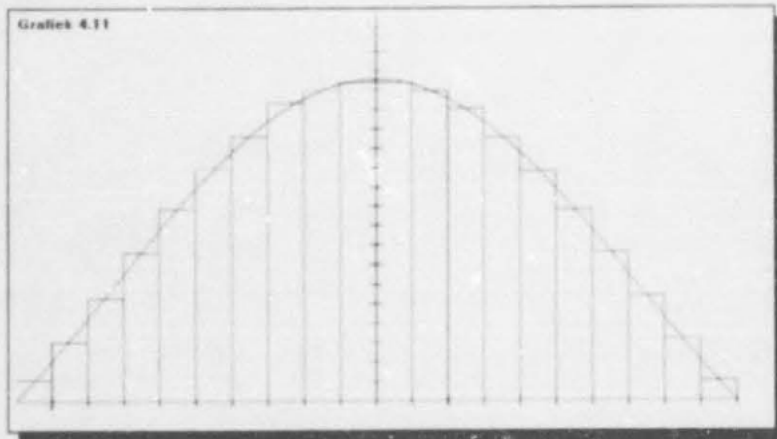
$$= 4F_X(y) + 3F_X^2(y) - 35F_X^4(y) + 42F_X^5(y) - 14F_X^6(y), \text{ indien } X \text{ Uniform}(-0.5, 0.5) \text{ verdeel is.} \quad (4.1.5)$$

Die grafiek van die uittreeverdeling van M_1^3 indien X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel is.



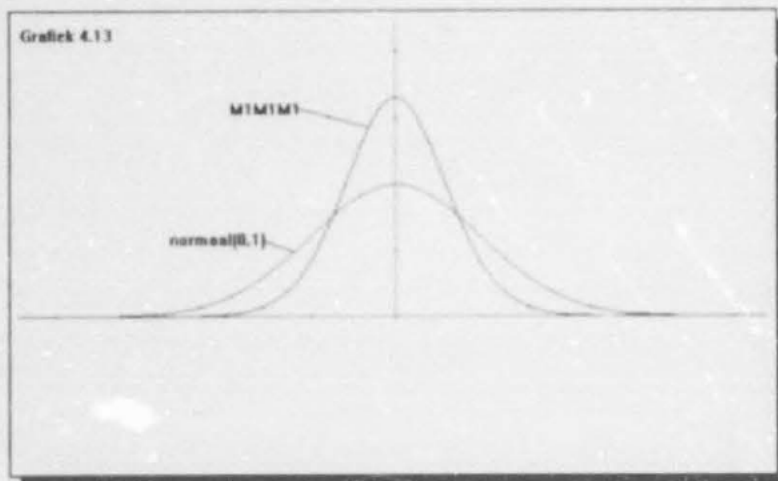
Grafiek 4.10 Die uittreeverdeling van $M_1^3(X)$ indien die intreegeraas Uniform $[-0.5, 0.5]$ verdeel is.

As die grafiek getoets word deur 'n histogram, lyk die resultaat as volg:



Grafiek 4.11 Die uitreeverdeling van $M_1^1(X)$ met intree X verdeel Uniform $[-0.5, 0.5]$, getoets deur 'n histogram verkry deur simulatie.

Die grafiek van die uitreeverdeling van M_1^1 indien X Normaal(0,1) verdeel is.



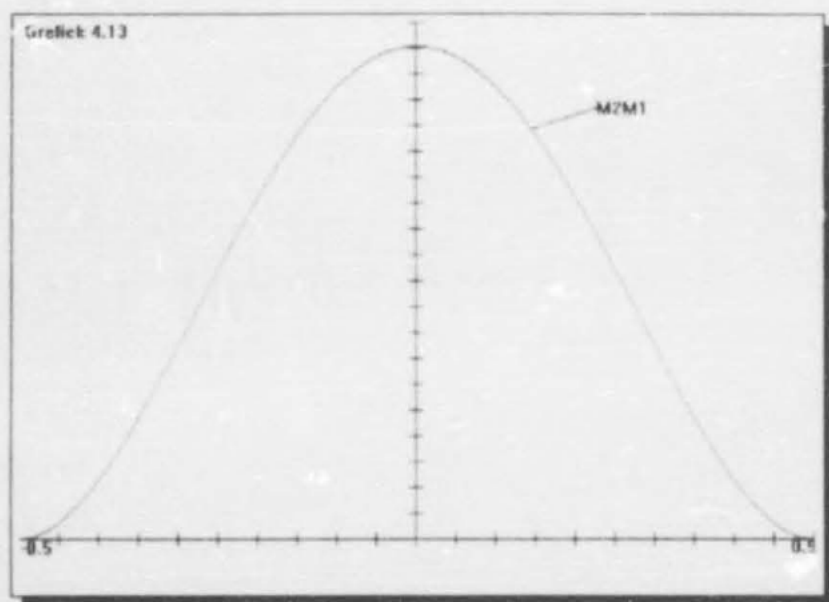
Grafiek 4.12 Die uitreeverdeling van $M_1^1(X)$ met intree die Normaal $[0, 1]$ verdeling.

$$F_{M_2M_1(X)}(y) = 9F_X^3(y) - 10F_X^4(y) - 3F_X^5(y) + 7F_X^6(y) - 2F_X^7(y) \quad (4.1.6)$$

met wdf.

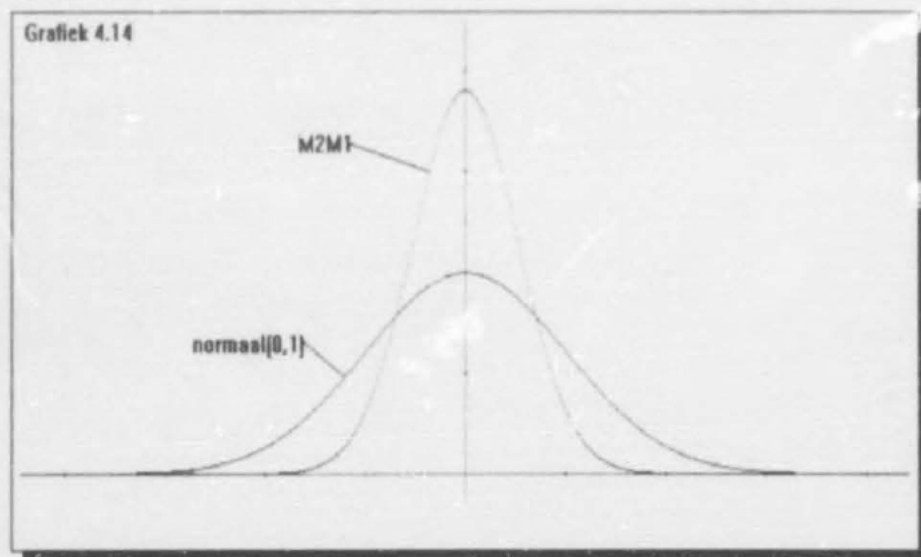
$$= 27F_X^2(y) - 40F_X^3(y) - 15F_X^4(y) + 42F_X^5(y) - 14F_X^6(y), \text{ indien } X \text{ Uniform } (-0.5, 0.5) \text{ verdeel is.} \quad (4.1.7)$$

Die grafiek van die uitreeverdeling van M_2M_1 , indien X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel is.



Grafiek 4.13 Die uitreeverdeling van $M_2M_1(X)$ met die intreegeraas Uniform $[-0.5, 0.5]$ verdeel.

Die grafiek van die uitreeverdeling van M_2M_1 indien X Normaal $[0, 1]$ verdeel is.



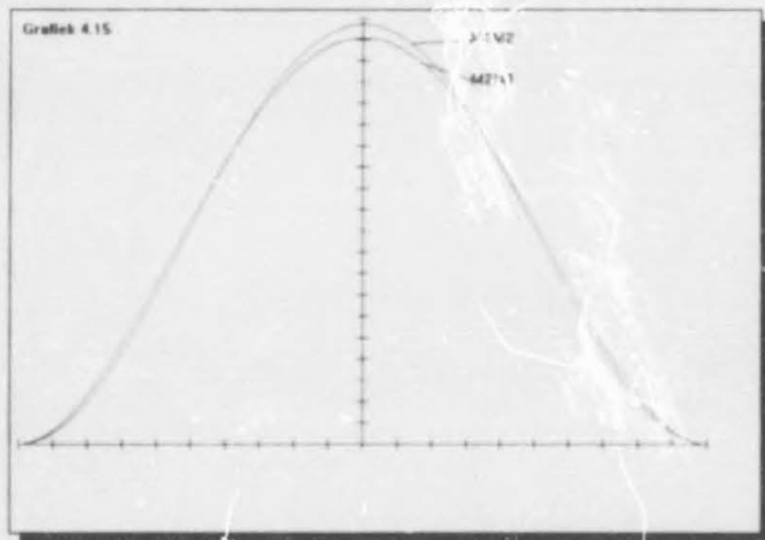
Grafiek 4.14 Die uitreeverdeling van $M_2M_1(X)$ indien geraas Normaal $[0, 1]$ verdeel is.

$$F_{M_1M_2(X)}(y) = 7F_X^3(y) - 21F_X^5(y) + 21F_X^6(y) - 6F_X^7(y) \quad (4.1.8)$$

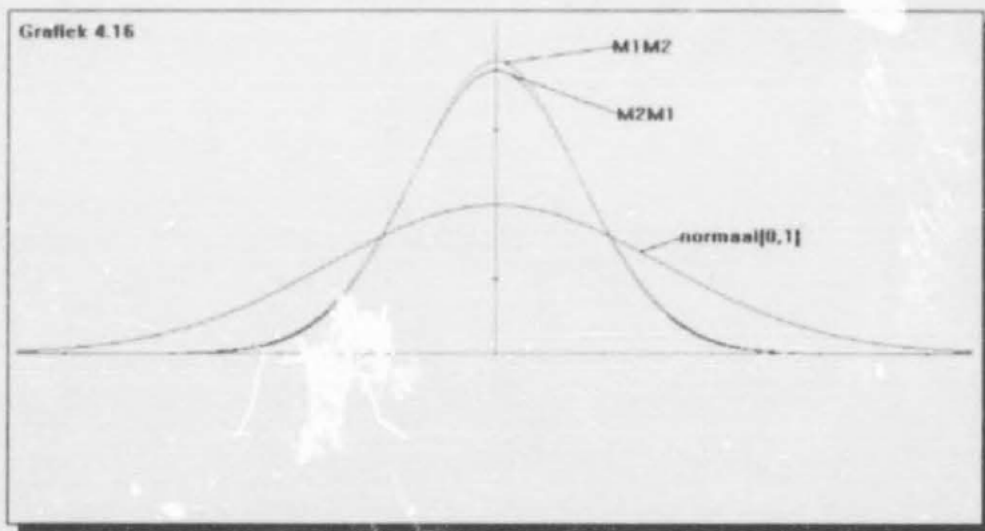
met wdf.

$$= 21F_X^2(y) - 105F_X^4(y) + 126F_X^5(y) - 42F_X^7(y), \text{ indien } X \text{ uniform } [-0.5, 0.5] \text{ verdeel is.} \quad (4.1.9)$$

Die grafiek van die uitreeverdeling van M_1M_2 indien X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel is.



Grafiek 4.15 Vergelykende grafiek van die uitreeverdelings van $M_2M_1(X)$ en $M_1M_2(X)$ indien die intreegeraas Uniform $[-0.5, 0.5]$ verdeel is.



Grafiek 4.16 Vergelykende grafiek van die uitreeverdelings van $M_2M_1(X)$ en $M_1M_2(X)$ indien die intreegeraas Normaal $[0, 1]$ verdeel is.

Die verdeling van $0.5 * (M_1 + M_1^2)$ se uitree is heelwat moeiliker om te bepaal as bg. se uitree en 'n soortgelyke verdeling sal later meer volledig gedoen word. Basies word die gesamentlike verdeling eers bepaal d.w.s

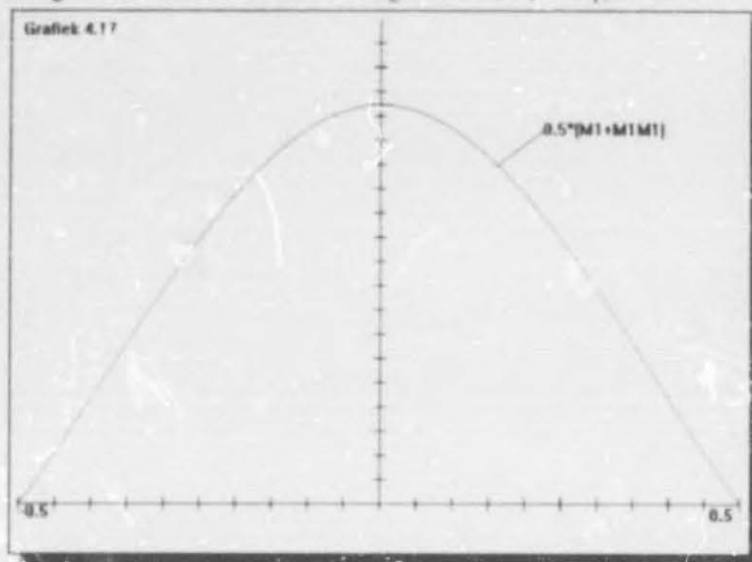
$P(M_1^2(X_i) \leq y, M_1(X_i) \leq y)$ word eers bepaal en dan word $P(0.5 * (M_1^2(X_i) + M_1(X_i)) \leq y)$

bepaal, deur eers die afgeleide van die eerste funksie te bepaal en daarna oor die regte gebied te integreer om die nodige resultaat te bepaal. Daar word eers met die antwoord volstaan met $X \text{ Uniform}(-0.5, 0.5)$ verdeel en $y \leq 0$.

$$\begin{aligned} P(0.5 * (M_1^2(X_i) + M_1(X_i)) \leq y) &= 1/8 + y/2 - 2y^3 - 2y^4 + (y + 1/2)(11/2 - 3y - 14y^2 - 4y^3) \\ &\quad + (y + 1/2)^2(-9/2 + 6y + 18y^2) \\ &\quad + (y + 1/2)^3(-4/3 - 8y) \\ &\quad + (y + 1/2)^4 \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Aangesien die gladstryker simmetries is, kan die resultaat vir $y \geq 0$ bepaal word deur die spieëlbeeld van bostaande resultaat te bepaal.

Die grafiek van die uitreeverdeling van $0.5(M_1 + M_1^2)$ indien $X \text{ Uniform}(-0.5, 0.5)$ verdeel is.



Grafiek 4.17 Die uitreeverdeling van $[0.5 * (M_1 + M_1^2)](X)$ indien $X \text{ Uniform}[-0.5, 0.5]$ verdeel is.

Daar gaan nou gekyk word na die verdeling van die uitree van die rekursiewe mediaan.

Ter wille van eenvoud gaan slegs na die mees basiese geval gekyk word, d.w.s. dat

Rekursiewe mediaan van $x_i = \text{mediaan}\{\text{mediaan}\{M_R(X_{i-1}), X_i, X_{i-1}\}, X_i, X_{i+1}\} = R_i$

Met $M_R = \text{Rekursiewe mediaan} = R_1 = MR$

$$P(M_R(X_i) \leq y) = P_1(\text{mediaan}\{\text{mediaan}\{M_R(X_{i-2}), X_i, X_{i-1}\}, X_i, X_{i+1}\} \leq y)$$

Dit volg dus dat:

$$[1] P(\text{mediaan}\{\text{mediaan}\{M_R(X_{i-2}), X_i, X_{i-1}\}, X_i, X_{i+1}\} \leq y)$$

$$= P(X_i \leq y) P_2(\min\{\min\{M_R(X_{i-2}), X_{i-1}\}, X_{i+1}\} \leq y)$$

+

$$P(X_i \leq y)P_2(\min\{\min\{M_R(X_{i-2}), X_{i-1}\}, X_{i+1}\} \leq y) +$$

$$= P(X_i \leq y) [2] \{ P(X_{i+1} \leq y) + P(X_{i+1} > y)P_4(\min\{M_R(X_{i-2}), X_{i-1}\} \leq y) \}$$

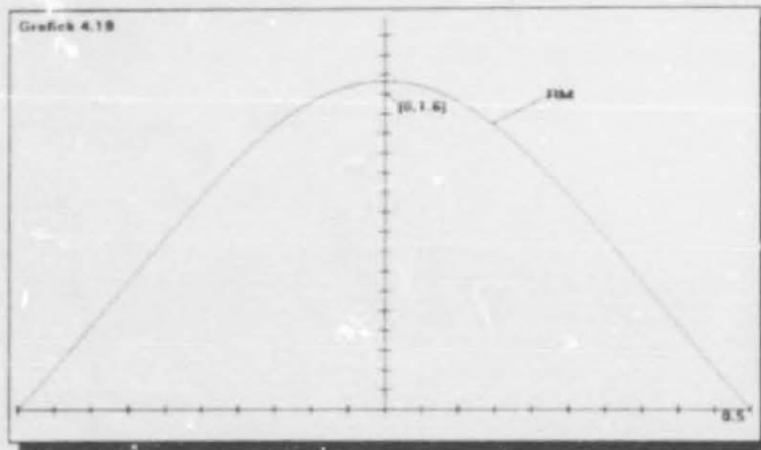
$$= P(X_i \leq y) [2] \{ P(X_{i+1} \leq y) + P(X_{i+1} > y) [4] \{ P(X_{i-1} \leq y) + P(X_{i-1} > y)P(\{M_R(X_{i-2}) \setminus X_{i-1} \} \leq y) \} \}$$

$$= P(X_i > y) [3] \{ P(X_{i+1} \leq y)P_5(\max\{M_R(X_{i-2}), X_{i-1}\} \leq y) \}$$

$$= P(X_i > y) [3] \{ P(X_{i+1} \leq y) [5] \{ P(X_{i-1} \leq y)P(\{M_R(X_{i-2}) \setminus X_{i-1} \} \leq y) \} \}$$

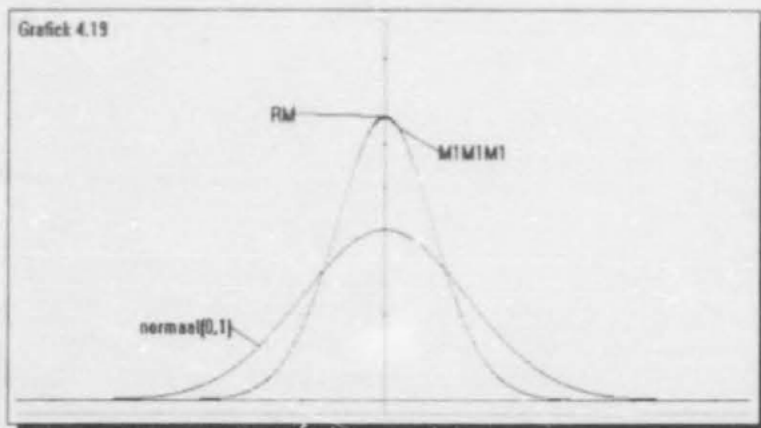
$$= F_X^2(y)(2 - F_X(y)) + F_X(y)(1 - F_X(y))P(M_R(X_{n-2}) \leq y) \quad (4.1.11)$$

d.w.s. $P(M_R(X_i) \leq y) = F_X^2(y)(2 - F_X(y))/(1 - F_X(y)(1 - F_X(y)))$ die resultaat stem ooreen met die resultaat verkry deur Mallows[8]. Die manier wat Mallows gebruik het in die oplos van die probleem verskil egter van bostaande.



Grafiek 4.18 Die grafiek van die uittreeverdeling van RM indien X Uniform $(-0.5, 0.5)$ verdeel is.

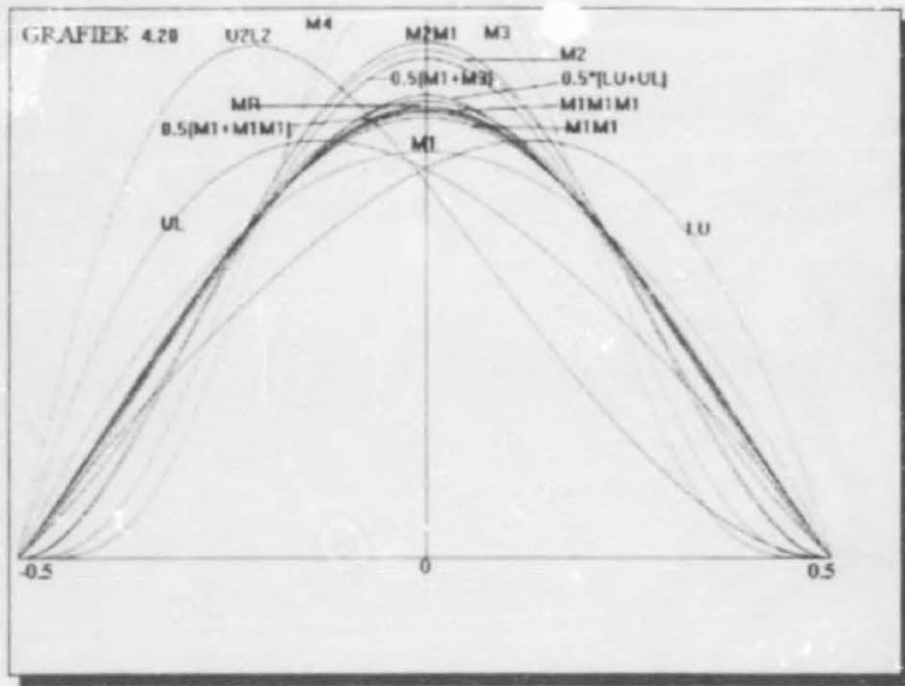
Die grafiek van die uittreeverdelings van die RM en M_1^3 indien X Normaal $(0, 1)$ verdeel is.



Grafiek 4.19 Die uittreeverdelings van RM en $M_1^3(X)$ indien X Normaal $[0, 1]$ verdeel is.

As daar na die grafieke van die uitreeverdelings van M_R en M_1^3 gekyk word sal daar gesien word dat die twee grafieke feitlik op mekaar geleë is. Hieruit kan ons aflei dat die verdelings $M_R(X_i)$ en $M_1^-(X_i)$ nie ver van mekaar kan verskil nie.

Vergelykende grafiek van verskeie nie-lineêre operatore (insluitend 'n paar wat nog behandel gaan word) se uitreeverdelings met intree die stogastiese veranderlike X wat Uniform(-0.5,0.5) verdeel is.



4.2 LULU OPERATORE

In hierdie afdeling gaan ons spesifiek na die uittreeverdeling van U_n en die gesamentlike uittreeverdeling van $L_n U_n$ en $U_n L_n$, dus $P(U_n L_n(X_i) \leq y, L_n U_n(X_i) \leq y)$, kyk, aangesien L_n net die speelbeeld van U_n is en die uittreeverdeling van $U_n L_n, L_n U_n$ en $0.5*(L_n U_n + U_n L_n)$ uit die gesamentlike uittreeverdeling van $L_n U_n$ en $U_n L_n$ bepaal kan word.

Die uittreeverdeling van U_1 .

$$\begin{aligned} P(U_1(X_i) \leq y) &= P(\Delta_1 \nabla_1(X_i) \leq y) \\ &= P(\min(\max(X_{i-1}, X_i), \max(X_i, X_{i+1})) \leq y) \\ &= 1 - P(\max(X_{i-1}, X_i) > y, \max(X_i, X_{i+1}) > y) \\ &= 1 - P(\nabla_1 X_{i-1} > y, \nabla_1 X_i > y) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$P(\nabla_1 X_{i-1} > y, \nabla_1 X_i > y)$$

$$= P(X_{i-1} > y)P(\nabla_1 X_i > y) + P(X_{i-1} \leq y)P(X_i > y, \nabla_1 X_i > y)$$

$$\begin{aligned} &= P(X_{i-1} \leq y) \{ P(X_i \leq y)0 + P(X_i > y) \} + P(X_{i-1} > y) \{ P(X_i \leq y)P(X_{i+1} > y) + \\ &\quad P(X_i > y) \} \end{aligned}$$

wat na vereenvoudiging

$$\begin{aligned} &= P(X_{i-1} \leq y)P(X_i \leq y)0 + P(X_{i-1} \leq y)P(X_i > y) + P(X_{i-1} > y)P(X_i \leq y)P(X_{i+1} > y) + \\ &\quad P(X_{i-1} > y)P(X_i > y) \\ &= F_X(y)(1 - F_X(y)) + F_X(y)(1 - F_X(y))^2 + (1 - F_X(y))^2 = 1 - 2F_X^2(y) + F_X^3(y) \end{aligned}$$

As die resultaat nou van 1 afgetrek word, volg dat die verdeling van U_1 se uittree gelyk is aan $2F_X^2(y) - F_X^3(y) = F_X^2(y)(2 - F_X(y))$ (4.2.2)

Op 'n soortgelyke manier volg dat die uittreeverdelings van U_2 en U_3 ondeskeidelik gelyk is aan:

$$3F_X^3(y) - 2F_X^4(y) \text{ en } 4F_X^4(y) - 3F_X^5(y). \quad (4.2.3) \text{ en } (4.2.4)$$

Hieruit kan 'n algemene vorm vir U_n afgelei word nl.

$$(n+1)F_X^{n+1}(y) - nF_X^{n+2}(y) \quad (4.2.5)$$

Die verdeling van L_n se uittree kan nou maklik hieruit afgelei word, deur in bostaande formule vir y met $-y$ te vervang en die resultaat van een af te trek. Die wdf. van U_n en L_n se uittreeverdelings kan ook maklik verkry word deur die afgeleide te bepaal. As $F_X(y) = y + 0.5$ d.w.s. as geraas Uniform oor $[-0.5, 0.5]$ beskou word, volg dat $f_{U_n(X_i)}(y) = (n+1)^2 F_X(y) - n(n+2)F_X^{n+1}(y)$ aangesien $f_X(y) = 1$. (4.2.6)

Volgende gaan daar gekyk word na $P(U_1 L_1 \leq t, L_1 U_1 \leq s) = P(L_1 U_1 \leq s, U_1 L_1 \leq t)$

Die berekening van die waarskynlikheid is aansienlik langer as in die voorafgaande probleme en 'n soortgelyke uitlegproses sal dus onprakties van aard wees.

As daar gekyk word na die oplos van die uittreewaarskynlikhede van M_1^2 en die Rekursiewe mediaan, sal opgelet word dat 'n waarskynlikheid wat gevolg word deur 'n voetskrif i (bv. $P_i(\cdot)$) ter eniger tyd vervang kan word deur die resulterende waarskynlikhede wat vir i volg.

Vervolgens gaan daar van 'n uitlegprosedure soortgelyk aan bg. gebruik gemaak word. Enige waarskynlikheid, gevolg deur 'n voetskrif, sal afsonderlik behandel word by die ooreenstemmende waarde van die voetskrif.

Verder sal daar ook gebruik gemaak word van die getal I indien 'n gebeurtenis plaasvind en die getal 0 indien 'n gebeurtenis nie kan plaasvind nie. Gestel ons het die volgende waarskynlikheid $P(A < s, B < s, C < t, D < t)$ met A, B, C en D gebeurtenisse. Indien die waarskynlikheid $P(I, I, C < t, 0)$ as volg aangedui word, impliseer dit dat gebeurtenisse A en B altyd kleiner as s is en dat gebeurtenis D nooit kleiner as t kan wees. Bostaande waarskynlikheid is egter ook gelyk aan nul, aangesien een van die gebeurtenisse nie kan plaasvind nie. Indien een van die gebeurtenisse nie kan plaasvind nie, is die ander inskrywings dus oorbodig en dit sal gevolglik in meeste gevalle uitgelaat word.

Daar gaan eers gekyk word na die geval waar $t < s$:

$$\begin{aligned} P(U_1 L_1 \leq t, L_1 U_1 \leq s) &= P(L_1 U_1 \leq s, U_1 L_1 \leq t) \\ &= P_a(\Delta_2 \nabla X_i \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \nabla_2 \Delta X_{i-1} \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \\ &+ P_b(\Delta_2 \nabla X_i \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \nabla_2 \Delta X_{i-1} \leq t, \nabla_2 \Delta X_i > t) \\ &+ P_c(\Delta_2 \nabla X_i \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \nabla_2 \Delta X_i \leq t, \nabla_2 \Delta X_{i-1} > t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P_a(\Delta_2 \nabla X_i \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \nabla_2 \Delta X_{i-1} \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \\ &= P(X_{i-2} \leq t) P_1(\min(X_{i-1}, \nabla X_{i-1}, \nabla X_i) \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \max(\Delta X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \\ &+ P(t < X_{i-2} \leq s) P_2(\min(X_{i-1}, \nabla X_{i-1}, \nabla X_i) \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \max(X_{i-1}, \Delta X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \\ &+ P(X_{i-2} > s) P_3(\min(\nabla X_{i-1}, \nabla X_i) \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \max(X_{i-1}, \Delta X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad &P(X_{i-1} \leq t) P_4(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \Delta X_{i+1} \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \\ &+ P(t < X_{i-1} \leq s) P_5(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \max(X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}, X_i) \leq t) \\ &+ P(X_{i-1} > s) P_6(\nabla X_i \leq s, \min(\nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \max(X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}, X_i) \leq t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad &P(X_{i-1} \leq t) P_7(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \Delta X_{i+1} \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \\ &+ P(t < X_{i-1} \leq s) P(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, 0,) \\ &+ P(X_{i-1} > s) P(\nabla X_i \leq s, \min(\nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, 0,) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad &P(X_{i-1} \leq t) P_8(\min(X_i, \nabla X_i), \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \Delta X_{i+1} \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \\ &+ P(t < X_{i-1} \leq s) P(, 0,) \\ &+ P(X_{i-1} > s) P(, 0,) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad &P(X_i \leq t) P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\ &+ P(t < X_i \leq s) P_{10}(1, 1, X_{i+1} \leq t, \max(X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t,) \\ &+ P(X_i > s) P_{11}(1, \nabla X_{i+1} \leq s, X_{i+1} \leq t, \max(X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5 \quad P(X_i \leq t)P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
& + \quad P(t < X_i \leq s)P(1, 1, 0, 0) \\
& + \quad P(X_i > s)P(1, \nabla X_{i+1} \leq s, 0, 0) \\
& 6 \quad P(X_{i-1} \leq t)P_{12}(X_{i+1}, \min(X_{i+1}, \nabla X_{i+1}) \leq s, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
& + \quad P(t < X_{i-1} \leq s)P(X_{i+1} \leq s, \min(X_{i+1}, \nabla X_{i+1}) \leq s, 0, 0) \\
& + \quad P(X_i > s)P(0, \nabla X_{i+1} \leq s, 0, 0) \\
& 7 \quad P(X_i \leq t)P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
& + \quad P(t < X_i \leq s)P_{10}(1, 1, X_{i+1} \leq t, \max(X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t,) \\
& + \quad P(X_i > s)P_{11}(1, \nabla X_{i+1} \leq s, X_{i+1} \leq t, \max(X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \\
& 8 \quad P(X_i \leq t)P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
& + \quad P(t < X_i \leq s)P_{10}(1, 1, X_{i+1} \leq t, \max(X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t,) \\
& + \quad P(X_i > s)P(0, , ,) \\
& 9 \quad P(X_{i+1} \leq t) \\
& + \quad P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} \leq t) \\
& 10 \quad P(X_{i+1} \leq t) \\
& + \quad P(X_{i+1} > t)0 \\
& 11 \quad P(X_{i+1} \leq t)P(X_{i+2} \leq s) \\
& + \quad P(X_{i+1} > t) \\
& 12 \quad P(X_{i+1} \leq t) \\
& + \quad P(t < X_{i+1} \leq s)P_{10}(1, 1, 1, X_{i+2} \leq t,) \\
& + \quad P(X_{i+1} > s)0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = P(X_{i-2} \leq t)P(X_{i-1} \leq t)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} \leq t)P(X_{i-1} \leq t)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} \leq t)P(X_{i-1} \leq t)P(t < X_i \leq s)P(X_{i+1} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} \leq t)P(X_{i-1} \leq t)P(X_i > s)P(X_{i+1} \leq t)P(X_{i+2} \leq s) \\
& + P(X_{i-2} \leq t)P(t < X_{i-1} \leq s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} \leq t)P(t < X_{i-1} \leq s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} \leq t)P(X_{i-1} > s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} \leq t)P(X_{i-1} > s)P(X_i \leq t)P(t < X_{i+1} \leq s)P(X_{i+2} \leq t) \\
& + P(t < X_{i-2} \leq s)P(X_{i-1} \leq t)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\
& + P(t < X_{i-2} \leq s)P(X_{i-1} \leq t)P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} \leq t) \\
& + P(t < X_{i-2} \leq s)P(X_{i-1} \leq t)P(t < X_i \leq s)P(X_{i+1} \leq t) \\
& + P(t < X_{i-2} \leq s)P(X_{i-1} \leq t)P(X_i > s)P(X_{i+2} \leq s) \\
& + P(X_{i-2} > s)P(X_{i-1} \leq t)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} > s)P(X_{i-1} \leq t)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} \leq t) \\
& + P(X_{i-2} > s)P(X_{i-1} \leq t)P(t < X_i \leq s)P(X_{i+1} \leq t)
\end{aligned}$$

$$= F_X^4(t) + F_X^4(t)(1 - F_X(t)) + F_X^3(t)(F_X(s) - F_X(t)) + F_X^3(t)(1 - F_X(s))F_X(s) + F_X^3(t)(F_X(s) - F_X(t))$$

$$\begin{aligned}
& +F_X^3(t)(1-F_X(t))(F_X(s)-F_X(t)) + F_X^3(t)(1-F_X(s)) + F_X^3(t)(1-F_X(s))(F_X(s)-F_X(t)) \\
& +F_X^3(t)(F_X(s)-F_X(t)) + F_X^3(t)(1-F_X(t))(F_X(s)-F_X(t)) + F_X^2(t)(F_X(s)-F_X(t))^2 \\
& +F_X^2(t)F_X(s)(1-F_X(s))(F_X(s)-F_X(t)) + F_X^3(t)(1-F_X(s)) + F_X^3(t)(1-F_X(t))(1-F_X(s)) \\
& +F_X^2(t)(1-F_X(s))(F_X(s)-F_X(t))
\end{aligned}$$

Na vereenvoudiging is bostaande gelyk aan :

$$2F_X^3(t) - 4F_X^4(t) + F_X^5(t) + 2F_X(s)F_X^3(t) - F_X^3(t)F_X^2(s) + F_X^2(s)F_X^2(t) - F_X^3(s)F_X^2(t) + F_X^2(t)F_X(s)$$

$$\begin{aligned}
& P_6(\Delta_2 \nabla X_i \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \nabla_2 \Delta X_{i-1} \leq t, \nabla_2 \Delta X_i > t) \\
= & P(X_{i-2} \leq t)P_1(\min(X_{i-1}, \nabla X_{i-1}, \nabla X_i) \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \max(\Delta X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \\
+ & P(t < X_{i-2} \leq s)P_2(\min(X_{i-1}, \nabla X_{i-1}, \nabla X_i) \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \max(X_{i-1}, \Delta X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \\
+ & P(X_{i-2} > s)P_3(\min(\nabla X_{i-1}, \nabla X_i) \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \max(X_{i-1}, \Delta X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \nabla_2 \Delta X_i \leq t) \\
1 & P(X_{i-1} \leq t)P_4(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \Delta X_{i+1} \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \\
+ & P(t < X_{i-1} \leq s)P_5(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \max(X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}, X_i) \leq t) \\
+ & P(X_{i-1} > s)P_6(\nabla X_i \leq s, \min(\nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \max(X_i, \Delta X_{i+1}) \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}, X_i) \leq t) \\
2 & P(X_{i-1} \leq t)P_7(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \Delta X_{i+1} \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \\
+ & P(t < X_{i-1} \leq s)P(1, \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, 0,) \\
+ & P(X_{i-1} > s)P(\nabla X_i \leq s, \min(\nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, 0,) \\
3 & P(X_{i-1} \leq t)P_8(\min(X_i, \nabla X_i), \min(X_i, \nabla X_i, \nabla X_{i+1}) \leq s, \Delta X_{i+1} \leq t, \max(\Delta X_{i+1}, \Delta X_{i+2}) \leq t) \\
+ & P(t < X_{i-1} \leq s)P(, , 0,) \\
+ & P(X_{i-1} > s)P(, , 0,) \\
4 & P(X_i \leq t)P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
+ & P(t < X_i \leq s)P_{10}(1, 1, X_{i+1} \leq t, 0) \\
+ & P(X_i > s)P_{11}(1, \nabla X_{i+1} \leq s, X_{i+1} \leq t, 0) \\
5 & P(X_i \leq t)P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) + \\
+ & P(t < X_i \leq s)P(1, 1, 0, 1) \\
+ & P(X_i > s)P(1, \nabla X_{i+1} \leq s, 0, 1) \\
6 & P(X_i \leq t)P_{12}(X_{i+1}, \min(X_{i+1}, \nabla X_{i+1}) \leq s, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
+ & P(t < X_i \leq s)P(X_{i+1} \leq s, \min(X_{i+1}, \nabla X_{i+1}) \leq s, 0, 1) \\
+ & P(X_i > s)P(0, \nabla X_{i+1} \leq s, 0, 1) \\
7 & P(X_i \leq t)P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
+ & P(t < X_i \leq s)P_{10}(1, 1, X_{i+1} \leq t, 0) \\
+ & P(X_i > s)P_{11}(1, \nabla X_{i+1} \leq s, X_{i+1} \leq t, 0) \\
8 & P(X_i \leq t)P_9(1, 1, 1, \Delta X_{i+2} \leq t) \\
+ & P(t < X_i \leq s)P_{10}(1, 1, X_{i+1} \leq t, 0) \\
+ & P(X_i > s)P_{11}(0, , , 0)
\end{aligned}$$

$$9 \quad P(X_{i+1} \leq t)0 \\ + \quad P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} > t)$$

$$10 \quad P(X_{i+1} \leq t)0 \\ + \quad P(X_{i+1} > t)0$$

$$11 \quad P(X_{i+1} \leq t)0 \\ + \quad P(X_{i+1} > t)0$$

$$12 \quad P(X_{i+1} \leq t)0 \\ + \quad P(t < X_{i+1} \leq s)P_{10}(1, 1, 1, X_{i+2} > t,) \\ + \quad P(X_{i+1} > s)0$$

$$\begin{aligned} &= P(t < X_{i-2} \leq s)P(t < X_{i-1} \leq s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\ &+ P(t < X_{i-2} \leq s)P(t < X_{i-1} \leq s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} \leq t) \\ &+ P(t < X_{i-2} \leq s)P(X_{i-1} > s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\ &+ P(t < X_{i-2} \leq s)P(X_{i-1} > s)P(X_i \leq t)P(t < X_{i+1} \leq s)P(X_{i+2} \leq t) \\ &+ P(X_{i-2} > s)P(t < X_{i-1} \leq s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\ &+ P(X_{i-2} > s)P(t < X_{i-1} \leq s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} > t)P(X_{i+2} \leq t) \\ &+ P(X_{i-2} > s)P(X_{i-1} > s)P(X_i \leq t)P(X_{i+1} \leq t) \\ &+ P(X_{i-2} > s)P(X_{i-1} > s)P(X_i \leq t)P(t < X_{i+1} \leq s)P(X_{i+2} \leq t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= F_X^2(t)(F_X(s) - F_X(t))^2 + F_X^2(t)(1 - F_X(t))(F_X(s) - F_X(t))^2 + F_X^2(t)(1 - F_X(s))(F_X(s) - F_X(t)) \\ &+ F_X^2(t)(1 - F_X(s))(F_X(s) - F_X(t))^2 + F_X^2(t)(1 - F_X(s))(F_X(s) - F_X(t)) \\ &+ F_X^2(t)(1 - F_X(t))(F_X(s) - F_X(s))(1 - F_X(t)) + F_X^2(t)(1 - F_X(s))^2 + F_X^2(t)(1 - F_X(s))^2 \end{aligned}$$

$$= t^2 F_X^2(t) - 4F_X^3(t) + 4F_X^4(t) - F_X^5(t) + 2F_X^2(s)F_X^2(t) - 2F_X^3(t)F_X(s) - F_X^2(s)F_X^2(t) - F_X^2(s)F_X^3(t)$$

Die derde geval $P_c(\Delta_2 \nabla X_i \leq s, \Delta_2 \nabla X_{i+1} \leq s, \nabla_2 \Delta X_i \leq t, \nabla_2 \Delta X_{i+1} > t)$ kan net soos die geval hierbo behandel word, d.w.s. geval b. Die geval ,geval c, lewer dieselfde antwoord as geval b. Die som van die drie gevalle, $P(U_1 L_1 X_i \leq t, L_1 U_1 X_i \leq s)$ is gelyk aan:

$$2F_X^2(t) - 6F_X^3(t) + 4F_X^4(t) - F_X^5(t) + 5F_X(s)F_X^2(t) - 2F_X^3(t)F_X(s) - F_X^2(s)F_X^2(t) + F_X^2(s)F_X^3(t) - F_X^3(s)F_X^2(t) \quad (4.2.7)$$

Die geval wat bo behandel word, is slegs geldig wanneer $t < s$ vir die geval waar $t \geq s$ volg dat:

$$P(U_1 L_1 X_i \leq t, L_1 U_1 X_i \leq s) = P(L_1 U_1 X_i \leq s) \text{ as } s \leq t \quad (4.2.8)$$

aangesien $L_n U_n$ altyd groter as $U_n L_n$ is.

Gesamentlik volg dat:

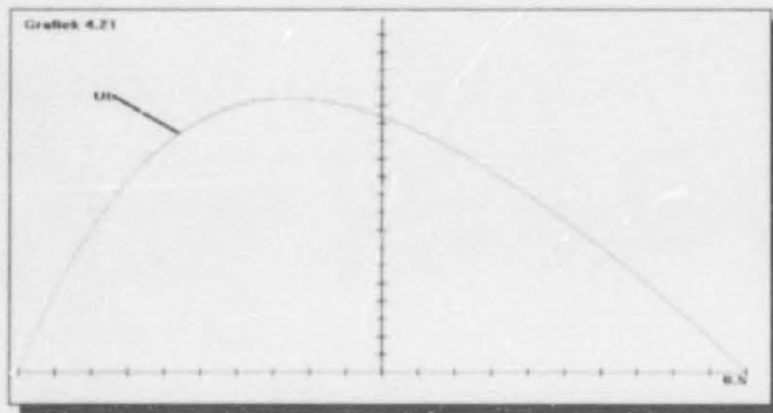
$$P(U_1 L_1 X_i \leq t, L_1 U_1 X_i \leq s) = P(L_1 U_1 X_i \leq s) \text{ as } s \leq t$$

$$2F_X^2(t) - 6F_X^3(t) + 4F_X^4(t) - F_X^5(t) + 5F_X(s)F_X^2(t) - 2F_X^3(t)F_X(s) - F_X^2(s)F_X^2(t) + F_X^2(s)F_X^3(t) - F_X^3(s)F_X^2(t) \text{ as } 1 < s \quad (4.2.9)$$

Die verdeling van die uitree van $U_1 L_1$ en $L_1 U_1$ kan nou maklik uit bostaande formule bepaal word.

Om $P(U_1 L_1 \leq t)$ te bepaal word s gewoonweg as ∞ gekies en in bostaande formule vervang waaruit volg dat:

$$P(U_1 L_1 X_i \leq t) = 2F_X^2(t) - 6F_X^3(t) + 4F_X^4(t) - F_X^5(t) + 5F_X^2(t) - 2F_X^3(t) - F_X^2(t) + F_X^3(t) - F_X^2(t) = 5F_X^2(t) - 7F_X^3(t) + 4F_X^4(t) - F_X^5(t) \text{ want } F_X(\infty) = 1 \quad (4.2.10)$$



Grafiek 4.21 Die uitreeverdeling van $U_1 L_1(X)$ indien X Uniform $[-0.5, 0.5]$ verdeel is.

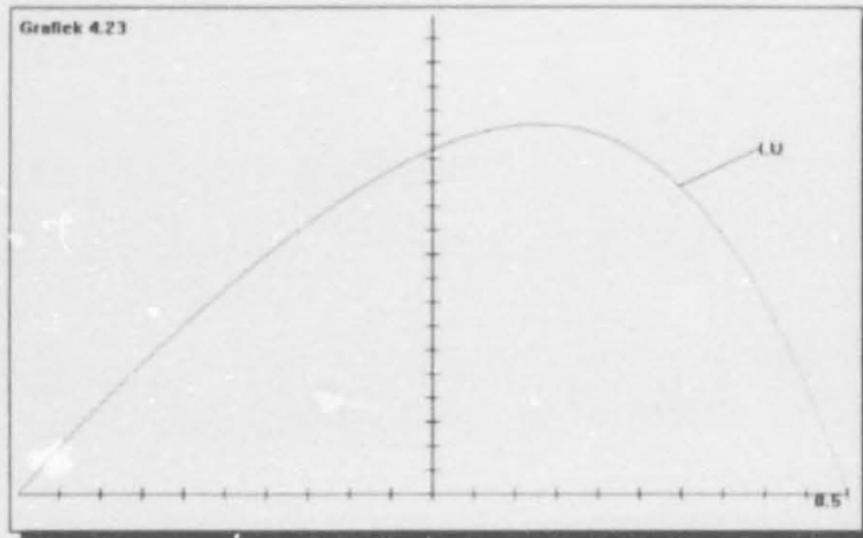
Bostaande grafiek, getoets deur 'n histogram, lyk as volg:



Grafiek 4.22 Die uitreeverdeling van $U_1 L_1(X)$ met intree X , Uniform $[-0.5, 0.5]$ verdeel, getoets met 'n histogram verkry deur simulatie.

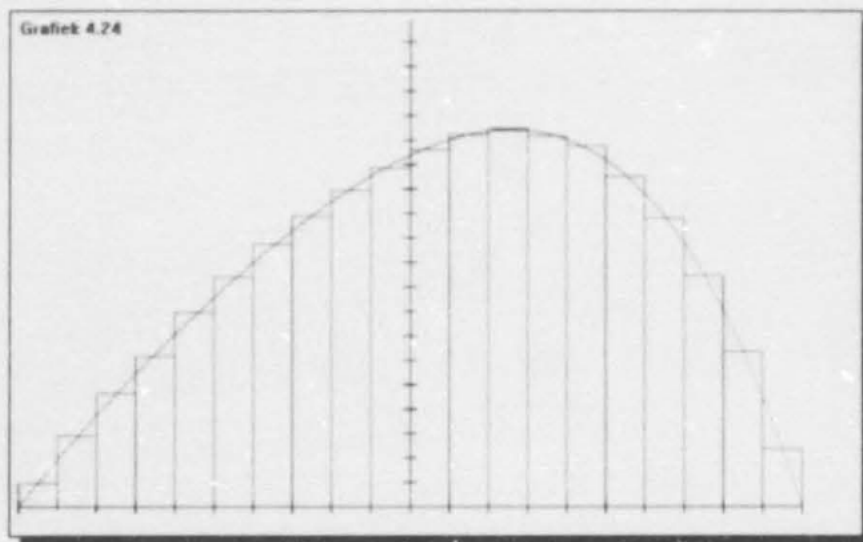
Om L_1U_1 se uitreeverdeling te bepaal word s en t aan mekaar gelyk gestel, waaruit volg dat :

$$\begin{aligned}
 P(L_1U_1X_i \leq s) &= 2F_X^2(s) - 6F_X^3(s) + 4F_X^4(s) - F_X^5(s) + 5F_X^5(s)F_X^2(s) - 2F_X^3(s)F_X(s) \\
 &\quad - F_X^2(s)F_X^2(s) + F_X^2(s)F_X^3(s) - F_X^3(s)F_X^2(s) \\
 &= 2F_X^2(s) - F_X^3(s) + F_X^4(s) - F_X^5(s)
 \end{aligned}
 \tag{4.2.11}$$



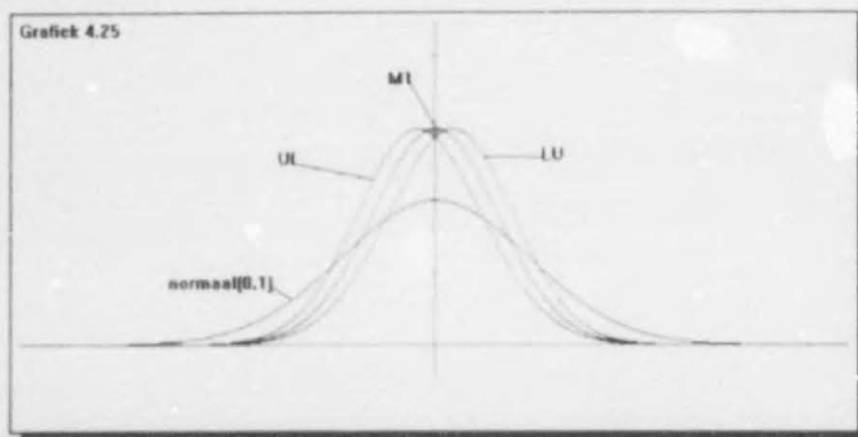
Grafiek 4.23 Die uitreeverdeling van $L_1U_1(X)$ indien die intreegeraas Uniform[-0.5,0.5] verdeel is.

Bostaande grafiek, getoets deur 'n histogram, lyk as volg:



Grafiek 4.24 Die uitreeverdeling van $L_1U_1(X)$, soos in grafiek 4.23, getoets met 'n histogram verkry deur simulatie.

Die volgende grafiek illustreer die verwantskap tussen die uitreeverdeling van U_1L_1 , L_1U_1 en M_1 indien X normaal $(0,1)$ verdeel is. Die verwantskap sal soortgelyk wees indien X Uniform $(-0.5,0.5)$ verdeel is.



Grafiek 4.25 Vergelykende grafiek van die uitreeverdelings van $U_1L_1(X)$, $L_1U_1(X)$ en $M_1(X)$, indien X Normaal $[0,1]$ verdeel is.

Die bepaling van $0.5 \cdot (U_1L_1 + L_1U_1)$ se uitreeverdeling is ietwat moeiliker en daar moet versigtig gewerk word as die integraal bepaal word wat in die berekening nodig is.

In die gewone geval waar die gesamentlike verdeling nie tweedelig is nie, kan gewoonweg die partiële afgeleide met betrekking tot s en daarna met betrekking tot t , of andersom, bepaal word en daarna kan daar oor die paslike grense geïntegreer word. In bostaande geval (sien formule 4.2.9) is dit egter nie so eenvoudig nie en een van die moontlike metodes vir die oplossing hiervan is as volg:

Vir eenvoud gaan daar aanvaar word dat geraas Uniform $[-0.5,0.5]$ verdeel is.

Daar sal eers 'n oplossing gegê word in die geval waar $-0.5 \leq y < 0$. Daar moet onthou word dat ons met Uniforme-geraas $[-0.5,0.5]$ besig is en om dié rede word y groter of gelyk aan -0.5 geneem.

Uiteengesit wil ons die volgende bepaal:

$$P(U_1L_1X_i \leq -0.5, L_1U_1X_i \leq 2y+0.5) \\ + P(-0.5 < U_1L_1X_i \leq -0.5 + \delta, L_1U_1X_i \leq 2y+0.5 - \epsilon)$$

•
•
•

$$+ P(y - \delta < U_1L_1X_i \leq y, L_1U_1X_i \leq 2y - y)$$

Bostaande volg uit die feit dat $P(U_1 L_1 X_i + L_1 U_1 X_i \leq 2y)$ bepaal wil word, of dus dat $P(L_1 U_1 X_i \leq 2y - U_1 L_1 X_i)$ bepaal wil word.

Hierbo is genoem dat die oplossing eers vir y kleiner of gelyk aan 0 bepaal gaan word, die rede hiervoor is dat $2y+0.5$ groter as 0.5 sal wees indien y groter as 0 word, en daar sal dus probleme ontstaan in die berekening van die gesamentlike verdeling, aangesien die gesamentlike verdeling net geldig is vir $s, t \in [-0.5, 0.5]$.

Daar moet onthou word dat $U_1 L_1 \leq L_1 U_1$ en daarom word daar nie verder as $P(y - \delta < U_1 L_1 X_i \leq y, L_1 U_1 X_i \leq 2y - y)$ gevorder nie, want anders sou $U_1 L_1 > L_1 U_1$ wees wat nie moontlik is nie.

In die som hierbo sal daar gesien word dat $t \leq s$, dus moet daar slegs na die geval in die gesamentlike verdeling gekyk word.

δ is willekeurig klein en bostaande som is dus gelyk aan die volgende integraal:

$$= \int_{-0.5}^y \frac{\partial}{\partial t} [F_{U_1 L_1 X_i, L_1 U_1 X_i}(t, 2y - t)] dt \text{ waar } -0.5 \leq y < 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [F_{U_1 L_1 X_i, L_1 U_1 X_i}(t, 2y - t)] &= 4a - 18a^2 + 16a^3 - 5a^4 + 10a(2y - a + 1) - 6a^2(2y - a + 1) \\ &\quad - 2a(2y - a + 1)^2 + 3a^2(2y - a + 1) - 2a(2y - a + 1)^3 \end{aligned}$$

as $t = a - 0.5$ want dan volg dat $F_X(t) = F_X(a - 0.5) = a$ aangesien $F_X(y) = y + 0.5$

Deur die substitusie volg dus dat bostaande integraal gelyk is aan:

$$\int_0^{y+0.5} 4a - 18a^2 + 16a^3 - 5a^4 + 10a(2y - a + 1) - 6a^2(2y - a + 1) - 2a(2y - a + 1)^2 + 3a^2(2y - a + 1) - 2a(2y - a + 1)^3 da$$

As die integraal bepaal word, sal die volgende resultaat verkry word:

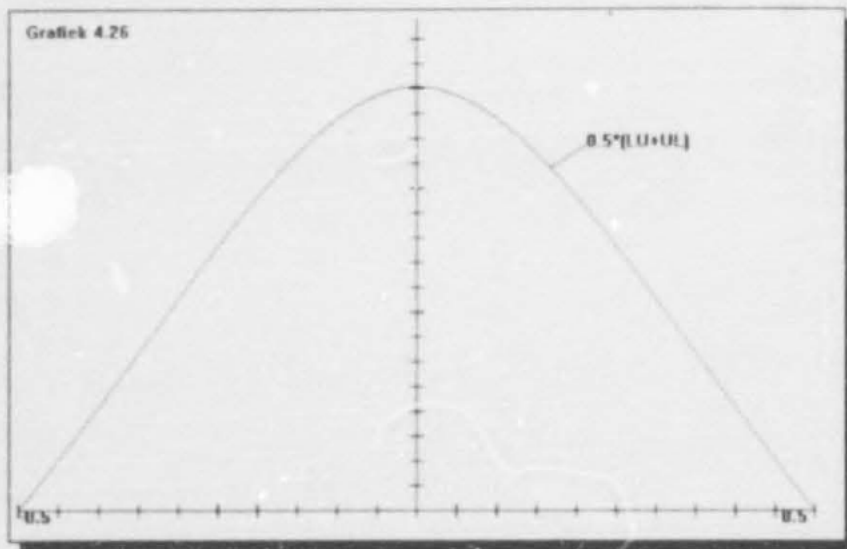
$$\begin{aligned} &0.5(y + 0.5)^2(10 - 32y^2 - 16y^3) + 1/3(y + 0.5)^3(-21 + 32y + 36y^2) + 1/4(y + 0.4)^4(8 - 24y) \\ &= P(0.5 * (L_1 U_1 X_i + U_1 L_1 X_i) \leq y) \text{ as } y \in [-0.5, 0] \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Vir die geval waar $y \in (0, 0.5]$ sal die spieëlbeeld van bostaande resultaat, y vervang met $-y$, die gewenste resultaat lewer, aangesien $0.5 * (LU + UL)$ simmetries om nul is.

Alternatief kan die volgende integraal bepaal word:

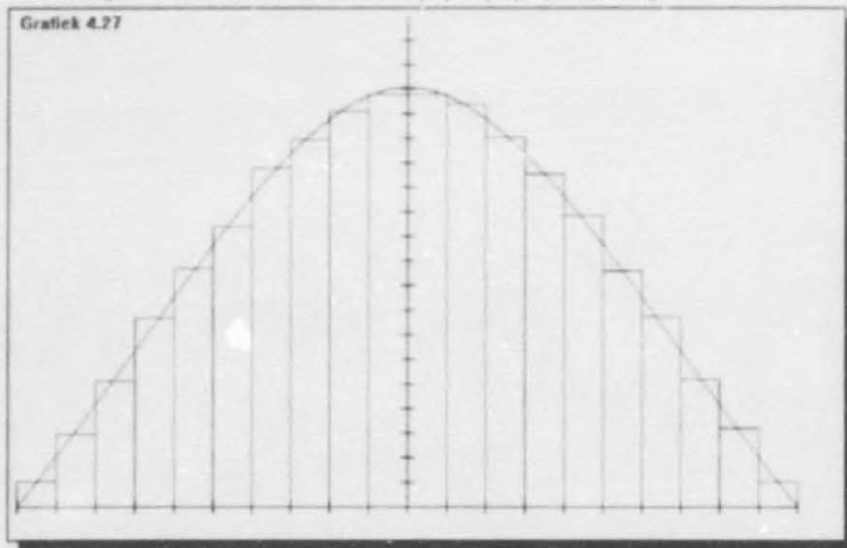
$$\int_{2y-0.5}^y \frac{\partial}{\partial t} [F_{U_1 L_1 X_i, L_1 U_1 X_i}(t, 2y - t)] dt + \int_{-0.5}^{2y-0.5} \frac{\partial}{\partial t} [F_{U_1 L_1 X_i, L_1 U_1 X_i}(t, 0.5)] dt$$

Die grafiek van die wdf. van $0.5*(L_1U_1+U_1L_1)$ indien X Uniform $[-0.5,0.5]$ verdeel is.



Grafiek 4.26 Die uitreeverdeling van $[0.5 * (U_1L_1 + L_1U_1)](X)$, indien X Uniform $[-0.5,0.5]$ verdeel is.

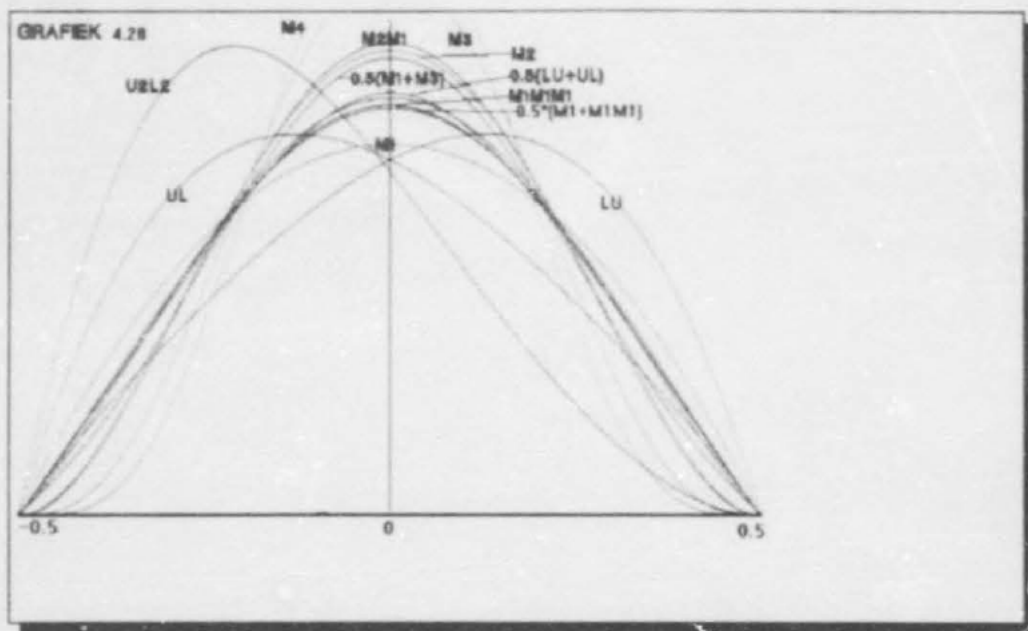
Die histogram verifikasie van $0.5*(U_1L_1+L_1U_1)$ lyk as volg:



Grafiek 4.27 Die uitreeverdeling van $[0.5 * (U_1L_1 + L_1U_1)](X)$, soos in grafiek 4.26, getoets met 'n histogram verkry deur simulatie.

Soortgelyke resultate kan verkry word as daar ten opsigte van s gedifferensieer word. Daar sal egter in so 'n geval ook moet gekyk word na die geval waar $t \geq s$ in die gesamentlike verdeling.

Opsommende grafiek met die intree X verdeel Uniform $[-0.5, 0.5]$.



4.3 Vergelyking van gladstrykers deur middel van uittreeverdelings

Let daarop dat al die gladstrykers wat in die algemeen toegepas word, simmetries is, aangesien daar nie altyd vooraf kennis gedra word van hoe die geraas versprei is en dus aangeneem word dat die geraas nie voorkeur vir opwaartse of afwaartse rigting het nie.

In sommige gevalle sal dit duidelik wees of geraas 'n opwaartse of afwaartse voorkeur het. In so 'n geval sal daar wel onsimmetriese gladstrykers gebruik word. Hierdie tesis spits hom egter meer op die simmetriese gevalle, asook natuurlik die asimmetriese pare LU en UL wat aanleiding gee tot die simmetriese operator $0.5*(LU+UL)$.

'n Goeie gladstryker is een wat soveel moontlik van die geraas en so min as moontlik van die sein verwyder.

In bostaande gevalle, waar die verdeling bepaal is, is aanvaar dat die uitgestuurde sein die nulsein is, en van bostaande gladstrykers word dus verwag om so na as moontlik die nulsein terug te kry.

Meeste van die behandelde operatore in die tesis is simmetries, wat impliseer dat die gemiddelde van hulle uittreeverdelings nul moet wees, dus kan die standaardafwykings van die verdelings direk met mekaar vergelyk word, sonder dat enige van hulle gesentreer hoef te word.

In die geval van die onsimmetriese pare LU en UL is die gemiddelde van die uittreeverdelings vanseifsprekend nie nul nie en 'n moontlike aanpassing sal gemaak moet word voor die operatore se uittreeverdelingsvariansies met die van ander operatore vergelyk word.

Die stogastiese veranderlikes, met uitsondering van LU en UL, met die kleinste standaardafwyking sal in ons geval die beste een wees, aangesien dié gladstryker se uittree die naaste om nul versprei is.

In die volgende afdeling gaan die standaardafwykings bereken word, maar vir eers kan daarop gelet word dat die grafieke van die wdf. 'n baie goeie idee sal gee van welke verdeling en dus gladstryker die beste resultate sal lewer. Spesifiek sal dit die een wees wat se verdeling die naaste om nul versprei is.

Afdeling 5

5.1 Die vergelyking van die variansies van bostaande verdelings.

Die doel van hierdie afdeling is om die effektiwiteit van bostaande gladstrykers met mekaar te vergelyk. Die manier waarop dit gedoen gaan word, is om te kyk watter gladstryker se uitreeverdeling die kleinste variansie het, oftewel die kleinste standaardafwyking.

Die gladstryker in bostaande konteks sal die beste wees, aangesien die verspreiding van enige orige geraas nader aan die oorspronklike sein gegroepeer sal wees as enige van die ander gladstrykers.

Daar moet egter nie sommer aanvaar word dat dit die beste gladstryker in die groep is nie, aangesien daar baie onbekendes in geraas is en in sekere gevalle sal 'n heeltemaal ander gladstryker beter wees. Maar vir die doel van dié studie sal daar na die variansies gekyk word om gladstrykers met mekaar te vergelyk.

Die berekenings van die variansie van die verdeling van die onderlinge gladstrykers sal gedoen word deur te kyk na drie gevalle van inkomende geraas, nl. uniforme geraas tussen -0.5 en 0.5, geraas wat ooreenstem met 'n B3-latfunksie en geraas wat normaal(0,1) verdeel is.

In die geval van uniforme geraas is die eksplisiete berekening van die variansie moontlik en relatief maklik, maar in teenstelling is soortgelyke berekenings in die geval van die B3-latfunksie baie meer ingewikkeld, en sal daar van benaderings gebruik gemaak word om die variansies van die verdelings van die gladstrykers te bepaal. Vir die geval waar die inkomende geraas Normaal (0,1) verdeel is sal daar van "math derive" gebruik gemaak word om die uitreevariensies te bereken.

Daar gaan nou na die variansies van die drie gevalle inkomende geraas gekyk word.

Geval 1: Uniforme geraas tussen -0.5 en 0.5

In die geval is $F_X(y) = y + 0.5$ en $f_X(y) = 1$ waar $F_X(y)$ die verdelingsfunksie van die inkomende geraas is en $f_X(y)$ die ooreenstemmende waarskynlikheidsdigtheidsfunksie is.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-0.5}^{0.5} y^2 f_X(y) dy \\ &= \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-0.5}^{0.5} \\ &= 0.083 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 0.083 \end{aligned}$$

aangesien $E(X) = 0$ want die verdeling is simmetries om nul en die gemiddelde is dus nul.

Geval 2: Geraas in die vorm van 'n B3-lafunksie.

$\text{var}(B3) = E((B3)^2) - (E(B3))^2 = E((B3)^2)$ vir dieselfde rede soos in 1 hierbo.

$$\text{var}(B3) = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} y^2 f_{B3}(y) dy$$

$$\begin{aligned} \text{waar } f_{B3}(y) &= 0.5 * (y + 3/2)^2 \quad y \in (-0.5, -1.5) \\ &= 0.5 * (3/2 - 2y^2) \quad y \in (0.5, -0.5) \\ &= 0.5 * (y - 3/2)^2 \quad y \in (3/2, 0.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(B3) &= 0.5 \left[\int_{-1.5}^{-0.5} y^2 (y + 3/2)^2 dy + \int_{-0.5}^{0.5} y^2 (3/2 - 2y^2) dy + \int_{0.5}^{1.5} y^2 (y - 3/2)^2 dy \right] \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

Geval 3: Die variansie van die inkomende geraas indien die geraas normaal(0,1) verdeel is, is vanselfsprekend gelyk aan 1.

Variansies van die uittreeverdelings van sekere van bostaande gladstrykers in die geval van geraas soos in geval 1.

$M_1(x)$:

$$\begin{aligned} E\left((M_1(X))^2\right) &= \int_{-0.5}^{+0.5} 6y^2(y + 0.5 - (y + 0.5)^2) dy \\ &= \int_{-0.5}^{+0.5} -6y^4 + 1.5y^2 dy \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

$E(M_1(X)) = 0$ want die mediaan is simmetries om nul verdeel ten opsigte van geraas wat simmetries om nul verdeel is.

Dus $\text{var}(M_1(X)) = 0.05$, wat al klaar 'n verbetering is ten opsigte van die inkomende geraas met 'n variansie van 0.083.

$M_1^2(X)$:

Net soos bo is $\text{var}(M_1^2(X)) = E\left((M_1^2(X))^2\right)$

$$= \int_{-0.5}^{+0.5} y^2 \left(4(y + 0.5) + 6(y + 0.5)^2 - 20(y + 0.5)^3 + 10(y + 0.5)^4 \right) dy$$

laat $x=y+0.5$ dus is $y=x-0.5$ en $dx=dy$

$$= \int_0^1 (x-0.5)(4x+6x^2-20x^3+10x^4)dx$$

= 0.04521095 na bepaling van die integraal en vereenvoudiging.

Dit is weereens 'n verbetering op die vorige resultaat, net so sal $M_1^3(x)$ 'n beter resultaat lewer as $M_1^2(x)$ maar die verbetering sal in verhouding tot die vorige verbetering baie klein wees.

$$\text{var}(M_1^3(X)) = 0.0444..$$

En om die rede sal $\text{var}(M_n^3(X))$ baie vinnig konvergeer soos n groter word en in die meeste gevalle is die tyd/verbetering verhouding nie die moeite werd vir $n>3$.

Die voorafgaande resultate kan ook maklik van die aangehegte grafieke afgelei word.

RM:

$$\text{var}(M_R(X)) = 0.0442653..$$

Opvallend hier is dat die variansies van die uittreeverdelings van die rekursiewe mediaan en M_1^3 feitlik dieselfde is.

$$M_2^1(x) :$$

Ook soos voorheen is $\text{var}(M_2^1(X)) = E\left((M_2^1(\omega))^2\right)$ in die geval.

$$\text{Dus is } \text{var}(M_2^1(X)) = \int_0^1 (x^2 - x + 0.25)(30x^2 - 60x^3 + 30x^4)dx \text{ (kyk vorige geval)}$$

$$= 0.035714 \text{ na vereenvoudiging.}$$

Hier moet gelet word op die aansienlike verbetering, en dit as gevolg van die feit dat baie meer van die data as geraas beskou word en verwyder word. M_n^1 sal 'n konstante sein lewer as n strewe na oneindig. Die rede hiervoor is dat alles as geraas beskou word en verwyder word, tot die oorspronklike sein sal as geraas beskou word.

'n Algemene formule vir die variansie van die uittree van die Mediaan gladstryker M_n^1 wanneer die intree uniform $[-0.5,0.5]$ verdeel is, kan ook afgelei word en is as volg :[24]

$$\text{var}(M_n^1(X_i)) = \frac{1}{(n+2) \cdot 4} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (5.1.1)$$

Let daarop dat die formule dieselfde resultate lewer vir M_2^1 en M_1^1 , soos afgelei deur die bepaling van die nodige integrale hierbo.

M_n^1 sal 'n konstante seën lewer indien n strewe na oneindig. Die formule hierbo (5.1.1) is 'n herbevestiging hiervan want, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(M_n^1(X_i)) = 0$ en $E(M_n^1(X_i)) = 0 \forall n$. Daar sal op gelet word dat in hierdie geval die nulsein vekry word, die rede hiervoor is dat aanvaar is dat die intreesin die nulsein is en dat geraas simmetries om nul verdeel is.

UL :

$$E(U_1 L_1(X)) = -0.0499..$$

$$E((U_1 L_1(X))^2) = 0.0523809$$

$$\text{var}(U_1 L_1(X)) = 0.0523809.. - 0.002499.. = 0.049880952$$

$0.5 \cdot (UL + LU)$:

$$\begin{aligned} f_{0.5 \cdot (LU + UL)(X)}(y) = & (y + 0.5)(10 - 32y^2 - 16y^3) + 0.5(y + 0.5)^2(-64y - 48y^2) + \\ & (y + 0.5)^2(-21 + 32y + 36y^2) + 1/3(y + 0.5)^3(32 + 72y) + \\ & (y + 0.5)^3(8 - 24y) + 1/4(y + 0.5)^4(-24) \end{aligned}$$

En as daar na die vorige werk gekyk word wat LULU gladstrykers betref as gevolg daarvan dat beide geraas en $0.5(LU + UL)$ se verdelings simmetries om nul is, volg dat:

$$\begin{aligned} \text{var}(0.5(LU + UL)(X)) &= 2 \int_{-0.5}^0 y^2 f_{0.5 \cdot (LU + UL)(X)}(y) dy \\ &= 0.04365 \quad \text{na aansienlike vereenvoudiging.} \end{aligned}$$

Wat hier opgelet moet word, is dat die gladstryker heelwat beter as vergelykbare mediaan gladstrykers doen.

Varsiansies van sekere gladstrykers se uitteeverdelings in die geval waar geraas verdeel is soos in geval 2.

Die eksplisiete berekening van die varsiansie in dié geval is baie moeilik en daar word om hierdie rede van 'n benadering gebruik gemaak.

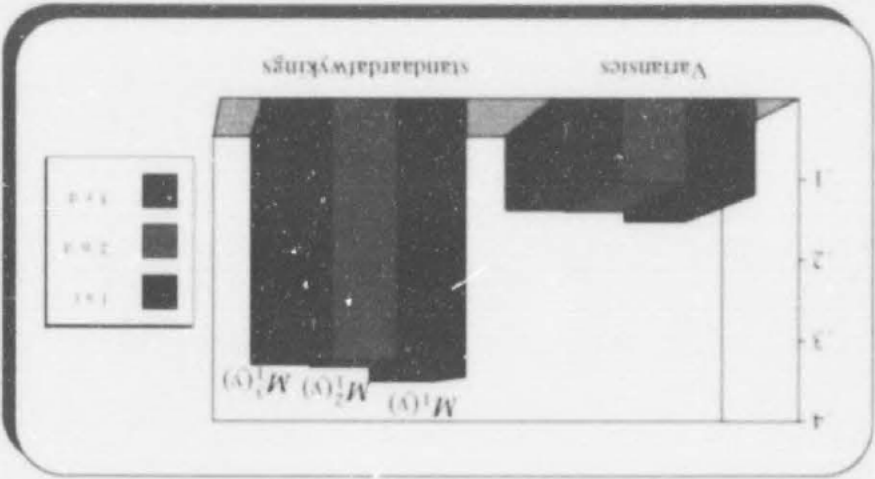
Die benadering wat gebruik word, is as volg:

$\sum h y^2 f_{W(X)}(y)$ waar h die intervallengte is vir 'n gepaste simmetriese interval op die B3-latfunksie, en die som oor die interval wat gekies is, geskied, y is die waarde by die onderskeie intervalpunte en $f_{W(X)}(y)$ is die ooreenstemmende waardes van die wdf. van die uitteeverdeling van die gladstryker W met intree X , waar X 'n B3-latfunksie verdeling het. Met 'n eenvoudige program kan die varsiansies dan benader word met die volgende resultate (sien bylae vir programme):

In die geval van die rekursiewe mediaan moet daarop gelet word hoe naby die resultaat aan die van $M_1^*(y)$ is, op die grafieke kan die resultaat ook waargeneem word. Hieruit is dit nie vertregende om af te lei dat $M_2(y)$ en $M_1^*(y)$ soortgelyke resultate sal lewer as n strewe na ongedig nie. Albei die gladstyklers is egter nie toepasbaar in die ongedig geval soos al in 'n vorige afdeling genoem nie.

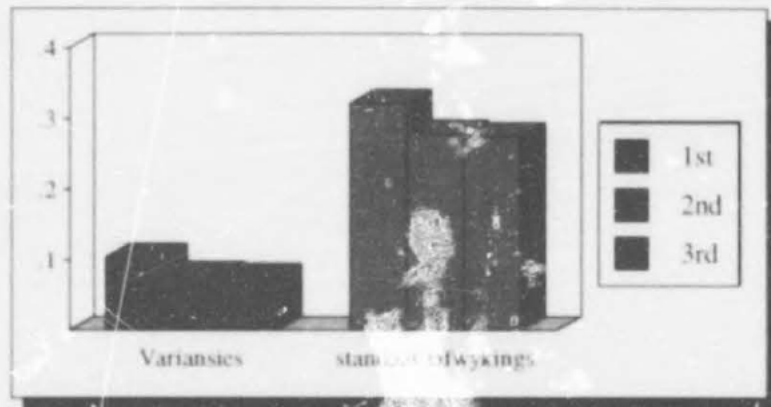
	Variansies	standaardafwykings
$M_2(y)$	0.1028	0.3206
$M_2^*(y)$	0.0770	0.2780
$M_2^*(M_1(y))$	0.0750	0.2740

In die vorige afdeling is daar verwys na die vinige konvergensie van die mediaan gladstykler en hier kan dit weereens gesien word.

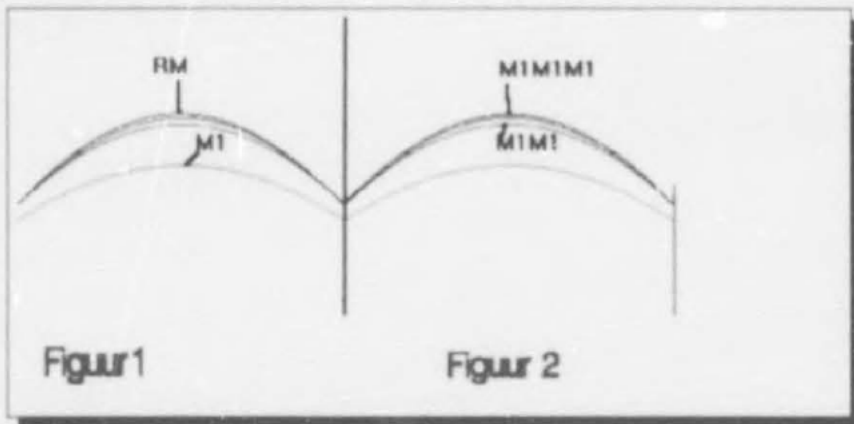


$M_1(y)$	0.1190	0.3440
$M_2^*(y)$	0.1050	0.3240
$M_2^*(M_1(y))$	0.1030	0.3209
Variansies		standaardafwykings

As die bostaande resultate nou almal op 'n grafiek aangedui word, sal dit as volg lyk.



Die grafiek van die wdf. van $M_1(y)$, $M_1^2(y)$, $M_1^3(y)$ en $M_R(y)$ se uitree, lyk as volg:



Op die grafiek kan ook gesien word hoe naby $M_1^3(y)$ en $M_R(y)$ se uitree wdf. aan mekaar geleë is.

Variansies van sekere gladstrykers se uitreeverdelings in die geval waar geraas verdeel is soos in geval 3.

	variansie	standaardafwyking
M_1	0.4486	0.6698
M_1^2	0.3947	0.6253
M_1^3	0.3870	0.6220

'n Algemene benaderde formule kan, deur numeriese integrasie, vir die variansie van die uitree van M_n^1 , met intree die stogastiese veranderlike X wat normaal(0,1) verdeel is, bepaal word en is as volg [24]:

$$\text{var}(M_n^1(X_i)) = \frac{\pi}{(n-1+\frac{\pi}{2})^2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

5.2 Vergelyking van 'n lineêre en nie-lineêre filter.

In die afdeling word die vraag gestel of 'n lineêre filter geraas beter as 'n nie-lineêre filter verwyder al dan nie. Daar word hier direk verwys na werk wat deur E.Ataman, V.K.Aatre en K.M.Wong [12]gedoen is.

Die filters wat gaan vergelyk word, is die mediaanfilter (nie-lineêr) en 'n Hanningfilter (lineêr). Die mediaan filter wat gebruik gaan word, is M_1^1 soos hierbo bespreek en die Hanning filter wat gebruik gaan word, is 'n driepunt-Hanning-filter met uitree $h(x_i) = 0.25x_{i-1} + 0.5x_i + 0.25x_{i+1}$.

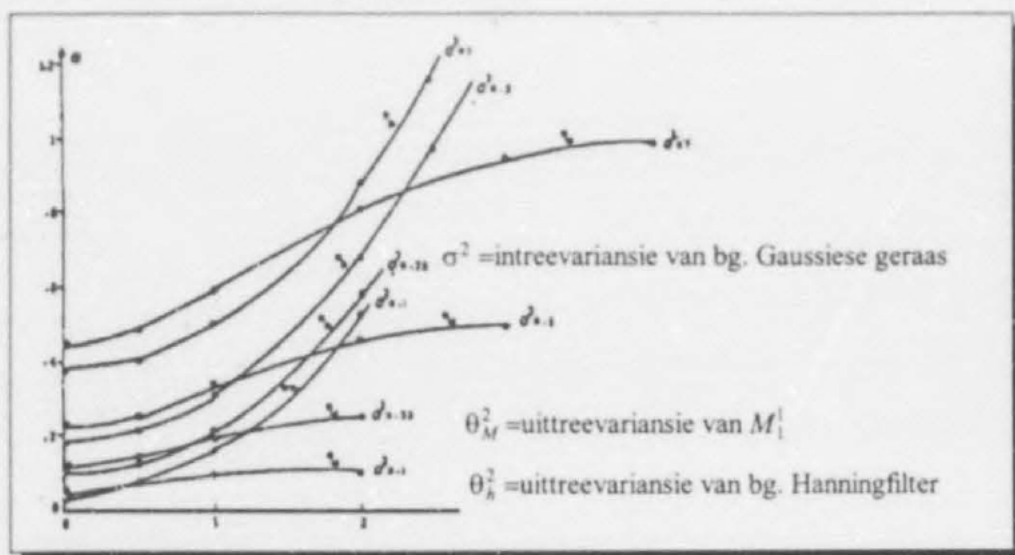
Die driepunt-Hanning-filter word gebruik aangesien M_1^1 ook 'n driepuntfilter is en dit nie vergesog is om die twee filters te vergelyk nie.

In die gevallestudie word ook aanvaar dat die uitgestuurde sein die nulsein is. Daar word dan gekyk na 'n uittreksel van drie datapunte, gestel x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , waar al drie punte deur Gaussiese geraas besmet is en een van die punte se x_{i+1} boonop impulsiewe geraas met amplitude, gestel A , bevat.

Bogenoemde persone het getoon dat, waar die amplitude van die impulsiewe geraas θ , is die twee filters byna ewe goed vaar wat betref variansie soos hierbo bespreek. Dit dui dus daarop dat gausiese geraas byna ewe goed deur albei filters verwyder word. Resultate wat hulle gekry het ten opsigte van die mediaan, stem baie ooreen met dié verkry hierbo.

Die groot verskil tussen die twee filters, is dat sodra die amplitude van die impulsiewe geraas toeneem, die nie-lineêre filter aansienlik beter doen as die lineêre filter. Om presies te wees is die lineêre filter se verdelingsvariansie 'n toenemende kurwe, terwyl die mediaan se verdelingsvariansiekurve afplat soos A toeneem (toenemende impulsiewe geraas).

Die volgende grafiek illustreer bg.



In vorige afdelings is filters bespreek wat heelwat beter geraas verwyder as die mediaan en die moontlikheid bestaan dat so 'n filter self beter Gausiese-geraas sal verwyder as sê bv. 'n Hanningfilter. Wat die afdeling dus beklemtoon, is dat nie-lineêre filters Gausiese-geraas op sigself baie goed verwyder (bo en behalwe impulsiewe geraas) en dit dus in meeste gevalle nie nodig is om 'n lineêre filter, na nie-lineêre filtering, toe te pas nie.

Afdeling 6

Opsomming

Hoewel nie-lineêre gladstrykers 'n groot gaping in die gladstrykingsproses gevul het, was die vergelyking van sogenaamde gladstrykers 'n moeilike en min besproke onderwerp.

Heelwat van dié gladstrykers is gevolglik geredelik aanvaar op grond van intuitiewe gevoel, wesenlike resultate gelewer en "Monte Carlo" vergelykingsprosesse.

In die Tesis is daar gekyk na 'n onderlinge vergelykingsproses, wat statisties van aard is, en daar is op die wyse 'n vergelyk tussen die meer algemeen bekende nie-lineêre gladstrykers getref.

Voordat die vergelykingsproses behandel is, is daar begin deur die vorm van gedagtes sodat 'n raamwerk geskep kan word waarin lineêre- en nie-lineêre filters gedefinieer en vergelyk kan word. 'n Onderskeid is getref deur na twee vertrekpunte te kyk, nl. sein as 'n vertrekpunt en geraas as 'n ander vertrekpunt.

Dit is opgemerk dat lineêre filters vergelykbaar is, veral in 'n vektorraamwerk. Die filters het egter tekortkominge wat uitgewys is, nl.

- skerp veranderings, wat sein kan wees, word in baie gevalle as geraas beskou en gevolglik gedeeltelik of in geheel verwyder;
- impulsiewe gedrag word nie verwyder, net afgeplat en verbreed.

Nie-lineêre filters is as 'n opsie aangedui om van die tekortkominge te oorbrug. Hierdie gladstrykers verwyder impulsiewe geraas goed, beter as lineêre filters. Nie-lineêre Gladstrykers is egter nie bevredigend in 'n vektorraamwerk vergelykbaar nie.

Aangesien nie-lineêre gladstrykers in die algemeen baie effektief is in die verwyder van impulsiewe geraas, is daar 'n vergelyk getref in terme van hulle verwyderingsvermoë ten opsigte van "goedgezarde geraas".

'n Statistiese vergelykingsmetode, soos voorheen genoem, ten opsigte van "goedgezarde geraas" is uitgewys om nie-lineêre gladstrykers met mekaar te vergelyk. Dit is slegs 'n enkele

manier om vergelykings te tref. Daar bestaan heel moontlik ander maniere wat beter resultate sal lewer.

'n Stel aanames is gemaak om vergelyking te vergemaklik. Daar is onder andere aangeneem dat:

- die intreesein die nulsein is;
- geraas in die vorm van 'n bekende nie-skewe verdeling is.

Die meer algemeen bekende gladstrykers is uitgewys, met van hulle eienskappe.

Daar is ook gekyk na 'n stel oorspronklike nie-lineêre gladstrykers wat onsimmetries van aard is nl. die LULU-operatore:

- die operatore is indempotent ;
- die mediaanoperator word tussen die twee onsimmetriese operatore vasgevang ;
- herhaaldelike toepassings van die operator is onnodig ;
- enige lineêre kombinasie van die twee operatore, LU en UL, kan gebruik word, na gelang van die skeefheid van die verdeling van die geraas.

Die vergelykingsproses het na voormelde bespreking gevolg en daar is begin deur te kyk na die bekendste van die nie-lineêre gladstrykers, nl. die mediaan operator. Van die grafieke kan 'n duidelike en vinnige verbetering by die mediaan operatore, $M_1^1 \rightarrow M_x^1$, waargeneem word. Die rede hiervoor is dat M_n^1 , vir n groot, 'n groter deel van die ontvangde data as geraas beskou en gevolglik vaar so 'n operator beter (in die vergelykingsraamwerk).

Daaropvolgend is daar na die operator M_1^n (herhaaldelike toepassing van die mediaan-operator) gekyk:

- aangesien daar sprake van afhanklikheid is, en die metode wat by M_n^1 gevolg is nie gebruik kan word nie is, daar van voorwaardelike stogastiese verranderlikes gebruik gemaak om die uitreeverdelings van die operatore te bepaal,;
- 'n vinnige verbetering vanaf $M_1^1 \rightarrow M_1^3$ kan waargeneem word, waarna die verbetering baie gering is;
- die verbetering vergelyk met artikels wat vinnige konvergensie van die gladstrykers aantoon.

Die rekursiewe mediaan is ook behandel en 'n eksplisiete resultaat is verkry vir die uittreeverdeling van die operator. Uit die grafieke en as gevolg van die vinnige konvergensie van M_1^n , is opgemerk dat dié operator vergelykbaar is met M_1^n . Dit wil voorkom of dié operatore identiese uittreeverdelings lewer.

Daar is ook gekyk na die operator $M_1^1 M_2^1$ wat deur Tukey voorgestel is:

- die operator is vergelyk met $M_2^1 M_1^1$;
- van belang is dat $M_1^1 M_2^1$ aansienlik beter vaar as $M_2^1 M_1^1$ (in terme van die vergelykingsproses). Dit wil voorkom asof $M_2^1 M_1^1$ slegs 'n geringe verbetering ten opsigte van M_2^1 lewer.
- In teenstelling hiermee lewer $M_1^1 M_2^1$ 'n aansienlike verbetering ten opsigte van M_2^1 ;
- dit is dus van belang dat, indien kombinasies van operatore gebruik word, die volgorde in ag geneem word.

Van belang by al die operatore is dat die keuse van 'n operator nie slegs gegrond moet wees op die resultate wat uit die uittreeverdelings verkry is nie, maar dat eienskappe van die geraas en sein (indien moontlik) in ag geneem word en 'n keuse daarvolgens gemaak word.

'n Groot deel van die werk is gewy aan die bepaal van die uittreeverdelings van die LULU-operatore.

- Die verdeling van die uittree van U_n^1 en L_n^1 , vir $n=1,2,3$ is bepaal en hieruit is 'n moontlike algemene uittreeverdeling vir U_n^1 en L_n^1 , vir alle $n=1,2,3,\dots$, afgelei.
- Die gesamentlike verdeling van $L_1^1 U_1^1$ en $U_1^1 L_1^1$ is bepaal, waaruit die uittreeverdelings van die volgende bepaal is:

$$\begin{aligned} & -U_1^1 L_1^1 \\ & -L_1^1 U_1^1 \\ & \text{-en } 0.5 * (U_1^1 L_1^1 + L_1^1 U_1^1). \end{aligned}$$

- Daar is waargeneem dat die LULU-operatore in statistiese terme vergelykende resultate lewer as hulle met die ander behandelde operatore vergelyk word.

In afdeling 5 is die uittreevariansies van bg. verdelings bereken. Die resultate staaf wat uit die grafieke afgelei is.

Laastens is daar 'n vergelyking gemaak tussen 'n lineêre filter(Hanning filter) en 'n nie-lineêre gladstryker (Mediaan M_1^1). Die vergelyking is op 'n soortgelyke statistiese metode, soos voorheen uiteengesit, gedoen:

- indien daar impulsiewe geraas voorkom, is gevind dat die nie-lineêre gladstryker aansienlik beter resultate lewer as die lineêre filter;
- selfs sonder impulsiewe geraas en slegs Gausiese geraas, lewer die nie-lineêre gladstryker vergelykbare goeie resultate met die lineêre filter;
- Uit die grafieke en resultate voorheen verskaf, kan afgelei word dat die LULU-operatore beter resultate as bogenoemde lineêre filter sal lewer, met of sonder impulsiewe geraas;
- die belang van bg. resultate lê daarin dat die toepassing van filtrering nie altyd nodig is nadat gladstryking voltooi is nie.

Al die bg. gladstrykers is maklik op 'n rekenaar toepasbaar en die berekening van uittreepunte geskied baie vinnig deur van die medium gebruik te maak

As laaste gedagte kan die volgende van gladstrykers gesê word:

- die gladstrykers lewer goeie resultate in die verwydering van impulsiewe geraas;
- maklik toepasbaar;
- uitstekende pre-filters;
- sommige van die gladstrykers, afhangend van die intreegeraas en intreesein, is effektief in die verwydering van goedgeaarde-geraas en hoef gevolglik nie deur 'n filter gevolg te word nie.

Verdere studie

- 1) Die uitreeverdelings is bepaal onder die aanname dat die intreesein die nulsein is en dat geraas simmetries van aard is.
 - Al die bostaande werk kan ook gedoen word, op 'n soortgelyke wyse, deur te kyk na verskillende intreesein-moontlikhede.
 - 'n Eerste opsie is om die intreesein as stygend of dalend te neem.
 - Dit wil egter voorkom of die resultate nie ver van bostaande sal verskil nie.
 - Tweedens kan daar moontlik gekyk word na n-monotone sein komponente of selfs kwadratiese of hoër orde intreeseine.

-Ingewikkelder seine lei natuurlik tot meer gekompliseerde berekenings.

-Skeef-verdeelde geraas kan ook beskou word.

-Hier sal die LULU-operatore UL en LU, afhangend van hoe die geraas verdeel is, skeef na links of regs, logies beter resultate lewer as gewone mediaangladstrykers, spesifiek as gevolg van die LULU-operatore se onsimmetrie.

- 2) Die bepaal van die uitreeverdelings van hoër-orde gladstrykers, bedoelende twee- en meer-dimensioneel, kan ook nagevors word. Die eienskappe van die gladstrykers (twee- en meer-dimensioneel) verskil egter van die gewone eendimensionele geval. Die mediaangladstryker is byvoorbeeld nie tussen die LULU-operatore geleë nie. Daar kan dus resultate verwag word, wat verskil van bostaende.
- 3) Daar kan ook gekyk word na verskillende vergelykingsprosesse.
- 4) Tenstens kan daar na ander moontlikhede van onsimmetriese operatore gekyk word wat vergelyk kan word met die LULU-operatore.

*Bylae A**Programme*

Daar is 'n totaal van drie programma ingesluit nl ts1,ts2 en ts3. Kortliks is elkeen van die programme gebruik vir die volgende:

ts1:

Dit is die hoofprogram en is gebruik vir die plot van die wdf. van bg. en nog 'n paar ander gladstrykers se wdf. Die wdf. van die gladstrykers word volledig in die program gegee en genoem. Vir Dié wat belangstel in die w.d.f van die gladstrykers kan aan die einde van die program al die nodige kry. Bogenoemde program is ook gebruik vir die plot van die histogramme van die mediaan en LULU gladstrykers. Die histogramme is gebruik om te verifieer dat die w.d.f korrek is. Alhoewel die program slegs die histogramme na bg. twee gladstrykers bepaal, is al die wdf. wat in die program ingesluit is, deur histogramme getoets.

ts2:

Hierdie program word gebruik om die fisiese werking van die LULU en mediaangladstrykers op uniforme geraas aan te dui. Die program is baie handig in die verstaan van die werking van gladstrykers en dié wat 'n beter idee wil skep van bg. werk, kan gerus die program intik en uitvoer.

ts3:

Die program is gebruik in die benadering van die variansies van sekere stogastiese veranderlikes wat in die tesis bespreek is.


```

program t51 (plot van grafieke + histogram van mediaan- en LULU-operatore);
uses
  graph;

var
  x1,x2,x3,x4,x5,y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7,y8,x11,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14,x20,x21,x22,x23,x24,x25,
  h1,h2,h3,h4,h5,c1,c2,c3,c4,c5,d1,d2,d3,d20,d21,d24,d26,c19 : real;

  x,y10,d,c,x15,x16,x17,x18,x19,x11,x17,x13,x14,x20,x21,x22,x23,x24,x25,
  x26,x27,x28,x29,y9,c3,c4,c5,c6,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c200,p,
  t19,t22,t23,t25,t27,t28,t29,c30,c31,c32,c33,c34,c35,c36,c37 : integer;

  z1,z2,z3,z4,z5,z6,x7,x8,x9,x10,a0,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,y,x30 : longint;

begin
  x := 0; z1 := 0; z2 := 0; z3 := 0; z4 := 0; z5 := 0; z6 := 0; z7 := 0;
  z8 := 0; z9 := 0; z10 := 0;

  a1 := 0; a2 := 0; a3 := 0; a4 := 0; a5 := 0; a6 := 0; a7 := 0; a8 := 0;
  y9 := 0; a0 := 0;

  b1 := 0; b2 := 0; b3 := 0; b4 := 0;

  h1 := 0; h2 := 0; h3 := 0; h4 := 0;

  c1 := 0; c2 := 0; c3 := 0; c4 := 0;

  x30 := 0;

  d1 := 0; d2 := 0; d3 := 0;

  randomize;
  c := detect;
  initgraph(c,d,'a:\driver');
  setgraphmode(d);
  y := 1;
  {Toewysing van Uniforme geraas tussen -0.5 en 0.5, aan die punte x2,x3,x4,x5}
  x2 := random-0.5;
  x3 := random-0.5;
  x4 := random-0.5;
  x5 := random-0.5;
  p := 100;

  while y <= 2 do

    begin {histogram van mediaan-operatore}

      x1 := x2;
      x2 := x3;
      {x3 := random-0.5;

      if x1 < x2 then y1 := x1 else y1 := x2;
      if x1 < x3 then y2 := x1 else y2 := x3;
      if x2 < x3 then y3 := x2 else y3 := x3;
      if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
      if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;

      b1 := b2;
      b2 := b3;
      b3 := y5;

      if b1 < b2 then y1 := b1 else y1 := b2;
      if b1 < b3 then y2 := b1 else y2 := b3;
      if b2 < b3 then y3 := b2 else y3 := b3;
      if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
      if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;

      y8 := 0.5*(b2+y5);
      {h1 := b2;
      h2 := b3;
      h3 := y5;
      if h1 < h2 then y1 := h1 else y1 := h2;
      if h1 < h3 then y2 := h1 else y2 := h3;
      if h2 < h3 then y3 := h2 else y3 := h3;
      if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
      if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;

      c1 := c2;
      c2 := c3;
      c3 := y5;

```



```

if c1 < c2 then y1 := c1 else y1 := c2;
if c1 < c3 then y2 := c1 else y2 := c3;
if c2 < c3 then y3 := c2 else y3 := c3;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;

```

```

d1 := d2;
d2 := d3;
d3 := y5;

```

```

n d1 < d2 then x1 := d1 else y1 := d2;
if d1 < d3 then y2 := d1 else y2 := d3;
if d2 < d3 then y3 := d2 else y3 := d3;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;

```

```

y8 := y5-d2;
(histogram van LULU operators)
x3 := x4;
x4 := x5;
x5 := random(0.5);

```

```

if x1 < x2 then y1 := x1 else y1 := x2;
if x2 < x3 then y2 := x2 else y2 := x3;
if x3 < x4 then y3 := x3 else y3 := x4;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if x2 < x3 then y1 := x2 else y1 := x3;
if x3 < x4 then y2 := x3 else y2 := x4;
if x4 < x5 then y3 := x4 else y3 := x5;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 < y6 then t7 := y5 else t7 := y6;
if x1 < x2 then y1 := x1 else y1 := x2;
if x2 < x3 then y2 := x2 else y2 := x3;
if x3 < x4 then y3 := x3 else y3 := x4;
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if x2 < x3 then y1 := x2 else y1 := x3;
if x3 < x4 then y2 := x3 else y2 := x4;
if x4 < x5 then y3 := x4 else y3 := x5;
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 > y6 then t6 := y5 else t6 := y6;
y8 := t6-t7;

```

```

b1 := b2;
b2 := b3;
b3 := b4;
b4 := b5;
b5 := 0.5*(t6+t7);

```

```

if b1 < b2 then y1 := b1 else y1 := b2;
if b2 < b3 then y2 := b2 else y2 := b3;
if b3 < b4 then y3 := b3 else y3 := b4;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if b2 < b3 then x7 := b2 else y1 := b3;
if b3 < b4 then x1 := b3 else y2 := b4;
if b4 < b5 then y3 := b4 else y3 := b5;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 < y6 then t7 := y5 else t7 := y6;
if b1 < b2 then y1 := b1 else y1 := b2;
if b2 < b3 then y2 := b2 else y2 := b3;
if b3 < b4 then y3 := b3 else y3 := b4;
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if b2 < b3 then y1 := b2 else y1 := b3;
if b3 < b4 then y2 := b3 else y2 := b4;
if b4 < b5 then y3 := b4 else y3 := b5;
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 > y6 then t6 := y5 else t6 := y6;

```

```

h1 := h2;
h2 := h3;
h3 := h4;
h4 := h5;
L5 := (0.5*(t6+t7));

```

```

if h1 < h2 then y1 := h1 else y1 := h2;
if h2 < h3 then y2 := h2 else y2 := h3;
if h3 < h4 then y3 := h3 else y3 := h4;

```

```

if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if h2 < h3 then y1 := h2 else y1 := h3;
if h3 < h4 then y2 := h3 else y2 := h4;
if h4 < h5 then y3 := h4 else y3 := h5;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 < y6 then t7 := y5 else t7 := y6;
if h1 > h2 then y1 := h1 else y1 := h2;
if h2 > h3 then y2 := h2 else y2 := h3;
if h3 > h4 then y3 := h3 else y3 := h4;
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if h2 > h3 then y1 := h2 else y1 := h3;
if h3 > h4 then y2 := h3 else y2 := h4;
if h4 > h5 then y3 := h4 else y3 := h5;
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 > y6 then t6 := y5 else t6 := y6;

```

```

c1 := c2;
c2 := c3;
c3 := c4;
c4 := c5;
c5 := 0.5*(t6+t7);

```

```

if c1 < c2 then y1 := c1 else y1 := c2;
if c2 < c3 then y2 := c2 else y2 := c3;
if c3 < c4 then y3 := c3 else y3 := c4;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if c2 < c3 then y1 := c2 else y1 := c3;
if c3 < c4 then y2 := c3 else y2 := c4;
if c4 < c5 then y3 := c4 else y3 := c5;
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 < y6 then t7 := y5 else t7 := y6;
if c1 > c2 then y1 := c1 else y1 := c2;
if c2 > c3 then y2 := c2 else y2 := c3;
if c3 > c4 then y3 := c3 else y3 := c4;
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if c2 < c3 then y1 := c2 else y1 := c3;
if c3 > c4 then y2 := c3 else y2 := c4;
if c4 < c5 then y3 := c4 else y3 := c5;
if y4 < y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 > y6 then t6 := y5 else t6 := y6;

```

```

y8 := 0.5*(t6+t7);
y8 := y8-0.5;
if y8 < -0.45 then
  if y8 < -0.4 then
    if y8 < -0.35 then z1 := z1 + 1;
    if y8 < -0.3 then z4 := z4 + 1;
    if y8 < -0.25 then z5 := z5 + 1;
    if y8 < -0.2 then z6 := z6 + 1;
    if y8 < -0.15 then z7 := z7 + 1;
    if y8 < -0.1 then z8 := z8 + 1;
    if y8 < -0.05 then z9 := z9 + 1;
    if y8 < 0 then z10 := z10 + 1;
    if y8 < 0 then z10 := z10 + 1;
    if y8 < 0.5 then z0 := z0 + 1;
    if y8 < 0.45 then z9 := z9 + 1;
    if y8 < 0.4 then z8 := z8 + 1;
    if y8 < 0.35 then z7 := z7 + 1;
    if y8 < 0.3 then z6 := z6 + 1;
    if y8 < 0.25 then z5 := z5 + 1;
    if y8 < 0.2 then z4 := z4 + 1;
    if y8 < 0.15 then z3 := z3 + 1;
    if y8 < 0.1 then z2 := z2 + 1;
    if y8 < 0.05 then z1 := z1 + 1;
  end;
end;

```

```

inc(y);
end;

```

```

z11 := round(z2-z1)p;
z12 := round(z3-z2)p;
z13 := round(z4-z3)p;
z14 := round(z5-z4)p;
z15 := round(z6-z5)p;
z16 := round(z7-z6)p;
z17 := round(z8-z7)p;

```

```

x18 ~ round(x19-z8)p;
x19 ~ round(x10-z9)p;
x20 ~ round(x1-z10-z30)p;
x21 ~ round(x2-z1)p;
x22 ~ round(x3-z2)p;
x23 ~ round(x4-z3)p;
x24 ~ round(x5-z4)p;
x25 ~ round(x6-z5)p;
x26 ~ round(x7-z6)p;
x27 ~ round(x8-z7)p;
x28 ~ round(x9-z8)p;
x29 ~ round(x0-z9)p;

[plot van histogram]
line (0,400-round(x1)p),(5,400-round(x1)p);
line (15,400-z11,30,400-z11);
line (30,400-z12,45,400-z12);
line (45,400-z13,60,400-z13);
line (60,400-z14,75,400-z14);
line (75,400-z15,90,400-z15);
line (90,400-z16,105,400-z16);
line (105,400-z17,120,400-z17);
line (120,400-z18,135,400-z18);
setcolor (6);
line (135,400-z19,150,400-z19);
setcolor (15);
line (149,400-round(x30)p),(151,400-round(x30)p);
setcolor (6);
line (150,400-z20,165,400-z20);
setcolor (15);
line (165,400-z21,180,400-z21);
line (180,400-z22,195,400-z22);
line (195,400-z23,210,400-z23);
line (210,400-z24,225,400-z24);
line (225,400-z25,240,400-z25);
line (240,400-z26,255,400-z26);
line (255,400-z27,270,400-z27);
line (270,400-z28,285,400-z28);
line (285,400-z29,300,400-z29);
x := -300;

when x < 300 do
  waarskijlijksheidsdichtheidsfunctie van nie-lineaire operatie met intregeraas
Uniform tussen -0.5 en 0.5 verdeel
begin
  t1 := x/600+0.5;
  t2 := x/600;
  t3 := x/200;
  t4 := 1-t;
  t25 := round((2*t)*(2-t)+3*t*(1-t)*(t24*t24+t24+4*t*(1-t)*(t24*t24*t24+t24*t24)+
+5*t*(1-t)*(1-t)*(t24*t24*t24*t24+t24*t24*t24+4*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(2*t24-t)-
+1*t*(1-t)*(1-t)*(t24*t24-2*t24-t)*(1-t)*(1-t)*(4*t24*t24*t24+3*t24*t24)+
+6*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(t24*t24*t24*t24*t24+t24*t24*t24*t24*t24)+
+1*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(5*t24*t24*t24*t24-4*t24*t24*t24)+
+7*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(t24*t24*t24*t24*t24*t24+t24*t24*t24*t24*t24*t24)+
+1*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(6*t24*t24*t24*t24*t24+5*t24*t24*t24*t24)+
+8*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(t24*t24*t24*t24*t24*t24+t24*t24*t24*t24*t24*t24)+
+1*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(7*t24*t24*t24*t24*t24*t24+6*t24*t24*t24*t24*t24)+
+9*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(t24*t24*t24*t24*t24*t24*t24+t24*t24*t24*t24*t24*t24)+
+1*t*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(1-t)*(8*t24*t24*t24*t24*t24*t24*t24+7*t24*t24*t24*t24*t24*t24)*200); (benadering van
rekursieve mediaan)

t25 := round(((1-t)*(t24)*t24*(2*t*(2-t)-(1-t)*(1-t))+(1-t)*(2-t)*(t24-t)))
/((1-t)*(t24)*t24*(1-t)*(t24)))*200); (RM)

t5 := round(((t*(10-32*t2+2-16*t2*t2)-(1-t)*(t-2)+32*t2+36*t2*t2)+
+(1-t)*(1-t)*(8-24*t2)+0.5*t*(1-t)*(64*t2-48*t2*t2)-(1/3)*t*(1-t)*(32+72*t2)+
+1/4*t)*(1-t)*(1-t)*(24)*200);(0.5*(LL+UL) vir y <= 0)

t4 := round(((1-4*t2)*t2*(10-32*t2+2-16*t2*t2)-(1-t)*(1-8*t2*t2)*
(-21+32*t2+36*t2*t2)-(1-t)*(1-16*t2*t2*t2)*(8-24*t2)+
+0.5*t*(1-t)*(4*t2*t2)*(64*t2-48*t2*t2)-(1/3)*t*(1-t)*(8*t2*t2*t2)*
(32+72*t2)+(1/4)*t*(1-t)*(1-t)*(16*t2*t2*t2)*(t2-24)+40*t2-4*t2*t2*t2+
+32*8*t2*t2+2-16*t2*t2*t2*t2)*200);(0.5*(LL+UL) vir y > 0)

t5 := round((-6*t2*t2+(-3/2)*200);(M1(x))

t8 := round((-5*t2*t2*t2+2-6*t2*t2*t2+2-4.5*t2*t2+1.5*t2+1.4375)*200);(LL)

t9 := 2*x/300+1;

(t10 := round((3+8*t2-16*t2*t2+2*t2-4*t2*t2)*(2*t9-t1)*(4-8*t2+40*t2*t2+16*t2*t2*t2)

```

```

:= (2*99*99*(1*(1)*(-640*(2)+6*(2)*(2)+(-2*99*99*99*(1*(1)*(1)*12+2*(2)+(-2*99*99*99*(1*(1)*(1)*(1)*(-5)+
(99*(1)*(8+48*(2)+2.8*(2)+0.5*(99*99*(1*(1)*(8+80*(2)+48*(2)+(-1.5*(99*99*99*(1*(1)*(1)*
(-40.72*(2)+(-1.4*(99*99*99*(1*(1)*(1)*(1)*(24)+5*(2)*(2)+2.6*(2)*(2)+2.6*(2)*(2)+2.4.5*(2)*(2)
+1.5*(2)+1.4375*(300)+(0.5*(1/1+1/1)) vir y <= 0 deur integrasie oor x)

t1.1 := round(4*(1)+6*(1*(1)+20*(1*(1)+10*(1*(1)*(1)*(1)*200); (M1M)(x))

t1.2 := round(4*(1)+3*(1*(1)+(-9*(1*(1)+1.35*(1*(1)*(1)+42*(1*(1)*(1)*(1)+
-14*(1*(1)*(1)*(1)*(1)*200 - b;(M1M)(M1(x))

y9 := round(-5*(2*(2)*(2)+6*(2*(2)+4.5*(2)*(2)+1.5*(2)+(-4375)*200); (1/1))

t11 := round((8.3750061*(2)*(2)+1.6030282)*(100);b-larfunksie benadering vir M1M1(x))

t12 := round(-8.7*(2*(2)+1.63)*(100);b-larfunksie benadering vir M1M1(M1(x))

t13 := round((30*(1*(1)+60*(1*(1)+(-30*(1*(1)*(1)*(1)*(1)*200); (M2(x))

t14 := round((0.5*(30*(1*(1)+60*(1*(1)+(-30*(1*(1)*(1)*(1)+6*(2)*(2)+(-3/2)*(200); (0.5*(M1(x)+M2(x)) helpfe van verdelings)

t15 := round((-140*(1*(1)*(1)*(1)*(1)+420*(1*(1)*(1)*(1)+(-420*(1*(1)*(1)*(1)+140*(1*(1)*(1)*(1)*200); (M3(x))

t16 := round((0.5*(t15+15);(soos by t14))

t17 := round((630*(1*(1)*(1)+1.2520*(1*(1)*(1)*(1)+1.3780*(1*(1)*(1)*(1)+
-2320*(1*(1)*(1)*(1)*(1)+6.30*(1*(1)*(1)*(1)*(1)*(1)*200); (M4(x))

t18 := round((-14*(1*(1)*(1)*(1)+42*(1*(1)*(1)*(1)+(-5*(1*(1)*(1)*(1)+
-40*(1*(1)*(1)+27*(1*(1)*200); (M2M)(x))

t200 := round((21*(1*(1)+105*(1*(1)*(1)+126*(1*(1)*(1)*(1)+
-42*(1*(1)*(1)*(1)*(1)*200); (M1M2(x))

t19 := round(((1/8)+0.5*(2-2*(2)*(2)+2*(2)*(2)*(2)+1*(1/1/2.3*(2-14*(2)*(2)+4*(2)*(2)+
1*(1)*(1)+(-9/2+6*(2)+18*(2)*(2)+(-1*(1*(1)*(1)+(-4/3-8*(2)+(-1*(1*(1)*(1)*200); (0.5*(M1(x)+M1M1(x)) y <= 0))

t20 := (-x)*600;
t21 := (-x)*600+0.5;

t22 := round(((1/8)+0.5*(20-2*(20*(20+20-2*(20*(20*(20*(20+
t21*(1/1-2.3*(20-14*(20*(20-4*(20*(20*(20+(-21*(1*(1)+(-9/2+6*(2)+18*(20*(20)
+(-21*(21*(21*(1-4/3-8*(20)+(-21*(21*(21*(21)*200); (soos by t19 vir y > 0))

t23 := round((14*(1-24*(1*(1)+32*(1*(1)+125*(1*(1)*(1)+144*(1*(1)*(1)*(1)+
+77*(1*(1)*(1)*(1)*(1)+16*(1*(1)*(1)*(1)*(1)*(1)*200); (1/21.2))

t26 := (x+150)/30.0;
t27 := round((t26-1)*(1-6+10*(t26-2*(t26*(t26-2*(t26*(t26*(t26+
(1-t26)*(1-t26)*(1-8+8*(t26)+
(1-t26)*(1-t26)*(1-t26)*(14/3-t26)+
(1-t26)*(1-t26)*(1-t26)*(-26)*(100); (1/1-1/1))

t28 := round((4*(2+2)*(x)); (b2-larfunksie)
t29 := round((-4*(2+2)*(100); (b2-larfunksie)
t30 := round((4*(2+2)*(6*(2*(2*(2+2*(2)+(-0.5)*6*(2*(2*(2+2*(2)+0.5)*(
2*(2*(2+2*(2)+0.5)*(100); (M1 toegepas op b2-larfunksie)
t31 := round((6*(4*(2+2)*(1-2*(2*(2+2*(2)+0.5*(1-2*(2*(2+2*(2)+0.5)*(1-2*(2+
*(2+2*(2)+0.5)*(100); (M1 toegepas op b2-larfunksie)
t32 := round((0.5*(t30+3/2)*(t30+3/2)*250); (b3-larfunksie)
t33 := round((0.5*(t30+3/2)*(t30+3/2)*250); (b3-larfunksie)
t34 := round((0.5*(t30+3/2)*(t30+3/2)*250); (b3-larfunksie)
t35 := round((0.5*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*
(1-1/6)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*250); (M1 toegepas op b3-larfunksie)
t36 := round((3*(1.5-2*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)+
0.75*(t30+1.3)*(t30+1.3)*(t30+1.3)+0.5*(t30+1.3)*
(t30+1.3)*(t30+1.3)*250); (M1 toegepas op b3-larfunksie)
t37 := round((3*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(1/6)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)+
*(1-(1/6)*(t30+1.5)*(t30+1.5)*(t30+1.5)+1)*250); (M1 toegepas op b3-larfunksie)

[plot van grafieke]
sethcolor(15);
if x <= 0 then
putpixel(x+300,400-(19,3)) else
putpixel(x+300,400-(22,3));
putpixel(x+300,400-(23,4));
putpixel(x+300,400-y9,3);

if x <= 0 then
putpixel(x+300,400-(13,2)) else
putpixel(x+300,400-(14,2));

putpixel(x+300,400-(15,6));
putpixel(x+300,400-(18,3));
putpixel(x+300,400-(10,5));

```

```

putpixel (x+300,400+11,5);
putpixel (x+300,400+12,1);
putpixel (x+300,400+13,6);
putpixel (x+300,400+14,3);
putpixel (x+300,400+15,6);
putpixel (x+300,400+16,2);
putpixel (x+300,400+17,6);
putpixel (x+300,400+18,2);
putpixel (x+300,400+200,3);
putpixel (x+300,400+25,2);

if x <= 150 then
  putpixel (x+150,400+27,2);
if x <= 0 then
  putpixel (x+300,400+28,5) else
  putpixel (x+300,400+29,5);
if x <= 0 then
  putpixel (x+300,400+30,5) else
  putpixel (x+300,400+31,5);
if x <= -100 then
  begin
    putpixel (x+300,400+32,5);
    putpixel (x+300,400+35,5);
  end;
if x <= -100 then
  begin
    if x <= -100 then
      begin
        putpixel (x+300,400+33,5);
        putpixel (x+300,400+36,5);
      end;
    end;
if x >= -100 then
  begin
    putpixel (x+300,400+34,5);
    putpixel (x+300,400+37,5);
  end;
inc(x);

end;
setcolor(1);
x := -300;
while x <= 300 do
  begin
    line (x+300,400+5,x+300,400+5);
    x := x+30;
  end;
y := 400;
while y <= 0 do
  begin
    line (300+5,y,300+5,y);
    y := y-20;
  end;
line (300,400,300,5);
line (0,400,600,400);
end;
end;

```



```

program ts2 {plot van die werking van operatore op uniforme geraas};
uses
crt, graph;

var
c,d,y8 : integer;

ch : char;

y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7 : real;

y : longint;

x,h,l,b,e,t6,w1,w2,t7 : array[0..80] of real;

begin
x[0] := 0;
x[1] := 0;
x[2] := 0;
x[3] := 0;
x[4] := 0;
x[5] := 0;
x[6] := 0;
b[0] := 0;
b[1] := 0;
b[2] := 0;
b[3] := 0;
b[4] := 0;
y1 := 0;
y2 := 0;
y3 := 0;
y4 := 0;
y5 := 0;
y6 := 0;
y7 := 0;
y8 := 0;

randomize;
c := detect;
initgraph(c,d,'a:\driver');
setgraphmode(d);
y := 6;
x[1] := random-0.5;
x[2] := random-0.5;
x[3] := random-0.5;
x[4] := random-0.5;
x[5] := random-0.5;
clrscr;
while y <= 80 do

begin
x[y] := random-0.5;
if y = 25 then x[y] := x[y]-4;
h[y-3] := (x[y-2]+x[y-3]+x[y-4])/3;

if x[y-2] < x[y-1] then y1 := x[y-2] else y1 := x[y-1];

```

```

if x[y-2] < x[y] then y2 := x[y-2] else y2 := x[y];
if x[y-1] < x[y] then y3 := x[y-1] else y3 := x[y];
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
b[0] := b[1];
b[1] := b[2];
b[2] := b[3];
b[3] := b[4];
b[4] := y5;
w1[y-3] := b[2];
w2[y-3] := b[2];
if b[2] <= x[y-3] then
begin
if b[3] > b[2] then w1[y-3] := b[3] else w1[y-3] := b[2];
if (b[2] >= b[1]) and (b[0] > b[1]) then w1[y-3] := b[2] else w1[y-3] := w1[y-3];
if b[1] < b[2] then w2[y-3] := b[1] else w2[y-3] := b[2];
if (b[2] <= b[3]) and (b[4] < b[3]) then w2[y-3] := b[2] else w2[y-3] := w2[y-3];
end;

```

```
l[y-3] := 0.5*(w1[y-3]+w2[y-3]);
```

```

if x[y-5] < x[y-4] then y1 := x[y-5] else y1 := x[y-4];
if x[y-4] < x[y-3] then y2 := x[y-4] else y2 := x[y-3];
if x[y-3] < x[y-2] then y3 := x[y-3] else y3 := x[y-2];
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if x[y-4] < x[y-3] then y1 := x[y-4] else y1 := x[y-3];
if x[y-3] < x[y-2] then y2 := x[y-3] else y2 := x[y-2];
if x[y-2] < x[y-1] then y3 := x[y-2] else y3 := x[y-1];
if y1 > y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 > y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 < y6 then t7[y-3] := y5 else t7[y-3] := y6;
if x[y-5] > x[y-4] then y1 := x[y-5] else y1 := x[y-4];
if x[y-4] > x[y-3] then y2 := x[y-4] else y2 := x[y-3];
if x[y-3] > x[y-2] then y3 := x[y-3] else y3 := x[y-2];
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y5 := y4 else y5 := y3;
if x[y-4] > x[y-3] then y1 := x[y-4] else y1 := x[y-3];
if x[y-3] > x[y-2] then y2 := x[y-3] else y2 := x[y-2];
if x[y-2] > x[y-1] then y3 := x[y-2] else y3 := x[y-1];
if y1 < y2 then y4 := y1 else y4 := y2;
if y4 < y3 then y6 := y4 else y6 := y3;
if y5 > y6 then t6[y-3] := y5 else t6[y-3] := y6;

```

```
e[y-3] := 0.5*(t6[y-3]+t7[y-3]);
```

```

if y >= 20 then
begin

```

```

setcolor(5);
line(y8,round(b[1]*100)+300,y8+20,round(b[2]*100)+300);
y8 := y8+20;
end;
inc(y)

```

```
end;
```

```

ch := readkey;
while ch <> #0 do
begin
ch := readkey;
end;
clrscr;

y := 20;
y8 := 0;

While y <= 80 do
begin
setcolor(5);
line(y8,round(w1[y-4]*100)+300,y8+20,round(w1[y-3]*100)+300);

setcolor(5);
line(y8,round(w2[y-4]*100)+300,y8+20,round(w2[y-3]*100)+300);

setcolor(5);
line(y8,round(l[y-4]*100)+300,y8+20,round(l[y-3]*100)+300);
y8 := y8+20;
inc(y)
end;
ch := readkey;
while ch <> #0 do
begin
ch := readkey;
end;

clrscr;
y := 20;
y8 := 0;
while y <= 80 do
begin

setcolor(4);
line(y8,round(t6[y-4]*100)+300,y8+20,round(t6[y-3]*100)+300);

setcolor(4);
line(y8,round(t7[y-4]*100)+300,y8+20,round(t7[y-3]*100)+300);

setcolor(4);
line(y8,round(e[y-4]*100)+300,y8+20,round(e[y-3]*100)+300);

y8 := y8 + 20;
inc(y)
end;

ch := readkey;
while ch <> #0 do
begin
ch := readkey;
end;
clrscr;
y := 20;
y8 := 0;

```

```
while y <= 80 do  
begin  
  setcolor(2);  
  line(y8,round(x[y-4]*100)+300,y8+20,round(x[y-3]*100)+300);
```

```
  y8 := y8+20;  
  inc(y)  
end;
```

```
  ch := readkey;  
while ch <> #0 do  
begin  
  ch := readkey;  
end;  
clrscr;  
  y := 20;  
  y8 := 0;
```

```
while y <= 80 do  
begin
```

```
  setcolor(10);  
  line(y8,round(h[y-4]*100)+300,y8+20,round(h[y-3]*100)+300);
```

```
  y8 := y8+20;  
  inc(y)  
end;
```

```
end.
```

```

program ts3 {variansiebenadering van die verdelingfunksies
van sekere nie-liniere operatore};
uses
graph;

var
  h,ih,x,m,f,fl : real;
  p,i : integer;

begin
  p := 40;
  h := 3/p;
  m := 0;
  for i := 1 to p do
    {f is die wdf van 'n B-latfunksie en fl is die vf van 'n B-latfunksie}
    begin
      ih := -(3/2)+i*h;
      x := ih;
      if (x >= -1.5) and (x <= -0.5) then
        begin
          f := 0.5*(x+1.5)*(x+1.5);
          fl := ((x+1.5)*(x+1.5)*(x+1.5))/6;
        end;

        if (-0.5 < x) and (x <= 0.5) then
          begin
            f := 0.5*(3/2-2*x*x);
            fl := -(1/3)*x*x*x+(18/24)*x+0.5;
          end;

          if (0.5 < x) and (x <= 1.5) then
            begin
              f := 0.5*(x-1.5)*(x-1.5);
              fl := 1 + ((x-3/2)*(x-3/2)*(x-3/2))/6;
            end;

            m := m + h*x*x*(((1-fl+(fl*fl))*(4*fl*f-3*fl*fl*f)-(2*fl*f-f)*(2*fl*fl-fl*fl*fl))
            /((1-fl+fl*fl)*(1-fl+fl*fl))); {nie-liniere operator se wdf}

          writeln (m);
        end;
      end.
    end;
  end;

```


Bylae BLatfunksie

Daar is voorheen verwys na die B-spline of latfunksie en sy aanloop na die Normaal- of Gaussiese verdeling. In hierdie bylae gaan dit behandel word.

Definisie d.1

$$Jf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)l^{inx} du, \text{ die Fourier integraal van } f.$$

Definisie d.2

$$C(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy, \text{ die konvolusie van } f \text{ met } g.$$

Definisie d.3

$$a) A1(x) = \begin{cases} 1 & \text{as } -1/2 < x \leq 1/2 \\ 0 & \text{andersins} \end{cases}$$

$$b) Ak = C(A1, Ak-1)$$

Lemma d.1

Jf..Jg=JC(f,g) indien die linkerkant bestaan.

Stelling d.1

$$JA1(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{x}{2} = \Psi(x) \text{ en } JAk(x) = \Psi^k(x)$$

Stelling d.2

$$Ak(x) = \frac{\delta^k x_+^{k-1}}{(k-1)!}, \text{ waar } x_+ = \begin{cases} x & \text{vir } x \geq 0 \\ 0 & \text{vir } x < 0 \end{cases} \quad (\delta \text{ die sentrale verskiloperator}).$$

Definisie d.4

$$Bk(x) = Ak(x - \frac{k}{2})$$

Stelling d.3

$$Bk(x) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (x-i)_+^{k-1}$$

Stelling d.4

$$\frac{d}{dx} B(k+1)(x) = Bk(x) - Bk(x-1)$$

Stelling d.5

$$\int_{-\infty}^{\infty} Bk(x) dx = 1$$

Opmerking

Die B3-latfunksie = $Bk(x)$, $k=3$.

Die Uniforme-verdeling = $B1(x)$.

en die Normaalverdeling = $\lim_{k \rightarrow \infty} Bk(x)$.

Bibliografie.

- 1] *E.T. Bell, Men of Mathematics.*
- 2] *A.R. Butz, A Class of Rank Order Smoothers, IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, VOL ASSP-34, NO. 1 FEBRUARY 1986.*
- 3] *A.E. Marquardt, L.M. Toerien and E. Terblanche, Applying nonlinear smoothers to remove impulsive noise from experimentally sampled data, N&O Joernal April 1991.*
- 4] *R.W. Hamming, Digital Filters, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1977.*
- 5] *B. Gold, C.M. Rader, Digital Processing of Signals, New York, McGraw-Hill, 1969.*
- 6] *L. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of digital Signal Processing, Englewood Cliffs, N.Y., Prentice Hall, 1975 .*
- 7] *A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, Digital Signal Processing, Englewood Cliffs, N.Y., Prentice Hall, 1975 .*
- 8] *C.L. Mallows, Some theory of nonlinear smoothers, Ann.Statist.8, No 4(1980), 695-715.*
- 9] *C.H. Rohwer, Indempotent One-sided Approximation of Median Smoothers, Journal of Approximation Theory, Vol. 58, NO 2(1989).*

- 10] *T.A. Nides, N.C. Gallagher, Median filters: some modifications and their properties, IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, VOL ASSP-30, NO 5, 1982, 739-746.*
- 11] *A.L. Fisher, Systolic Algorithms for running order Statistics in Signal and Image Processing, J. Digital Syst., Vol. 6 pp 251-264, Fall 1982.*
- 12] *E. Ataman, V.K. Aatre, and K.M. Wong, Some Statistical Properties of Median Filters, IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, VOL. ASSP-29, NO 5, OCTOBER 1981.*
- 13] *J.W. Tukey, Nonlinear (nonsuperposable) methods for smoothing data, in Conf. Rec. 1974 E. Ascon, p.673*
- 14] *A.F. Beaton and J.W. Tukey, The filtering of power series, meaning polynomials, illustrated on hard-spectroscopic data, Technometrics, Vol. 16, pp 147-185, May 1974.*
- 15] *N.C. Gallagher, and G.L. Wise, A Theoretical Analysis of the Properties of Median Filters, IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, VOL. ASSP-29, NO 6 DECEMBER 1981.*
- 16] *L.R. Rabiner, M.R. Sambur, and C.E. Schmidt, Applications of a Nonlinear Smoothing Algorithm to Speech Processing, IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, VOL ASSP-23, NO 5, DECEMBER 1975.*
- 17] *R. Steel and D.J. Goodman, Detection and Selective Smoothing Of Transmission errors in linear PCM, Bell Syst. Tech. J., Vol 56, pp 300-409, Mar 1977.*

- 18] *N.S. Jayant*, Average and Median based smoothing techniques for improving digital speech quality in the presence of transmission errors, *IEEE TRANSACTIONS ON Commun.*, VOL COM-24, pp 1043-1045, Sept. 1976 .
- 19] *W.K. Pratt*, Digital Image Processing, New York, NY : Wiley Interscience, 1978.
- 20] *B.R. Frieden*, A new restoring algorithm for preferential enhancement of edge gradients, *J. Opt. Soc. Amer.*, Vol 66, pp. 280-283, 1976.
- 21] *E. Ataman and E. Alparslan*, Applications of median filtering algorithm to images, *Electronic Division, Marmara Research Institute, Gebze, Turkey*, Tech. Rep. UI 78/10, Sept. 1978.
- 23] *I.B. Hossack, J.H. Pollard, B. Zehnwirth*, Introductory statistics with applications in general insurance.
- 24] *B.I. Justusson*, Median Filtering : Statistical Properties.
- 25] *C.H. Rohwer, L.M. Toerien*, Locally monotone robust Approximation of sequences, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 36 (1991) 399-408.
- 26] *T. Gasser and M. Rosenblatt Eds*, Smoothing Techniques for curve estimation, Berlin and N.Y. : Springer-Verlag, 1979.
- 27] *T.S. Huang, Ed.*, Two Dimensional Digital Signal Processing, Berlin and N.Y. : Springer-Verlag, 1979.

- 28] *C.R. Arce and N.C. Gallagher, Jr., State description for the root-signal set of median filters, IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, VOL. ASSP-30, NO 5, pp 894-902, December 1982.*
- 29] *J.W. Tukey, Exploratory Data Analysis, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.*
- 30] *Y. Nakagawa, A. Rosenfeld, A Note on the Use of Local min. and max. operations in digital picture processing, IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, VOL.SMC-8, NO 8.*
- 31] *G.R. Arce, M.P. McLoughlin, Theoretical Analysis of the Max/Median filter, IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING, VOL ASSP-35, NO 1, JANUARY 1987.*
- 32] *A.F. Siegel, Robust regression using repeated medians, BIOMETRIKA (1982), 69, 1.*
- 33] *C.H. Rohwer, LULU-operators for two-dimensional data.*