

Navorsings- en oorsigartikels

Berekening van a posteriori-verdeling in Bayes-analise: toepassing in 'n betroubaarheidstelsel wat afwisselend gebruik word

V.S.S. Yadavalli*

Departement Bedryfsingenieurswese, Universiteit van Pretoria

P.J. Mostert

Departement Statistiek en Aktuariële Wetenskap, Universiteit Stellenbosch

A. Bekker en M. Botha

Departement Statistiek, Universiteit van Suid-Afrika

UITTREKSEL

Die Bayes-beraming van die stasionêre tempo van teleurstellings, D_{∞} , vir twee modelle (met verskillende spesifikasies) van stelsels wat afwisselend gebruik word, word voorgestel. Daar word veronderstel dat die stogastiese veranderlikes van die stelsel onafhanklik eksponensiaal verdeel is. Jeffrey se a priori-verdeling word vir die onbekende parameters aanvaar. Die komplekse en nieliniêre definisie van D_{∞} beperk inferensie in albei modelle. Monte Carlo-simulasie word gebruik om die a posteriori-verdeling van D_{∞} en daarna die hoogste a posteriori-digtheidsintervalle (HPD) af te lei. 'n Numeriese voorbeeld waarin Bayes-beramers en die HPD-intervalle bereken word, illustreer hierdie resultate. Die frekwentistiese eienskappe van hierdie Bayes-prosedure word bepaal deur oordekkingsproporsies te bereken vir elk van hierdie HPD-intervalle vir vaste waardes van die parameters.

ABSTRACT

Computation of posterior distribution in Bayesian analysis – application in an intermittently used reliability system

Bayesian estimation is presented for the stationary rate of disappointments, D_{∞} , for two models (with different specifications) of intermittently used systems. The random variables in the system are considered to be independently exponentially distributed. Jeffreys' prior is assumed for the unknown parameters in the system. Inference about D_{∞} is being restrained in both models by the complex and non-linear definition of D_{∞} . Monte Carlo simulation is used to derive the posterior distribution of D_{∞} and subsequently the highest posterior density (HPD) intervals. A numerical example where Bayes estimates and the HPD intervals are determined illustrates these results. This illustration is extended to determine the frequentist properties of this Bayes procedure, by calculating covering proportions for each of these HPD intervals, assuming fixed values for the parameters.

1. INLEIDING

Daar is sekere stelsels waar kontinue falingsvrye verrigting van die stelsel nie 'n vereiste is nie en sodanige stelsels word *stelsels wat afwisselend gebruik word*, genoem. Gaver (1964) voorsien die moontlikheid dat die tydintervalle waartydens die stelsel benodig mag word, gekarakteriseer word deur 'n tweewaardige Markov-proses: benodigde en niebenodigde periodes, wat 'n alternerende hernuwingsproses vorm. Dit is toepaslik om die stelsel te karakteriseer aan die hand van Gaver (1964), wat die puntgebeurtenis van 'n *teleurstelling* soos volg beskryf: die stelsel is nie beskikbaar nie as gevolg van faling van die stelsel gedurende die benodigde periode (genoem staantyd), of wanneer die stelsel benodig word en dit in die falingstoestand is (sien figuur 1). Daar is twee statistiese maatstawwe vir teleurstellings, naamlik die verwagte aantal teleurstellings en die tydsduur van 'n teleurstelling as dit plaasvind, wat die onbetroubaarheid van die stelsel verduidelik. Dit kan maklik bepaal word deur die verdeling van die tydsduur van 'n teleurstelling te verkry. Vir 'n oorsig van sodanige stelsels word na Yadavalli et al. (2000) verwys.

	Benodigde periode	Niebenodigde periode
Beskikbare tyd	↱	
staantyd	6	↱

Figuur 1: 6 Teleurstellingsgebeurtenis

Yadavalli en Botha (2002) bestudeer die stasionêre tempo van teleurstellings van 'n eenheidstelsel wat onderbroke gebruik word. Hulle bepaal die verdeling van die stasionêre tempo van teleurstellings deur gebruikmaking van asimptotiese afleidings. Twee verskillende modelle word beskou. In model 1 word falings opgespoor ongeag die toestand van die stelsel (d.i. of dit in 'n benodigde of niebenodigde toestand is) en verder sal 'n herstel van die eenheid wat gedurende die benodigde periode

* Outeur aan wie korrespondensie gerig kan word

plaasvind eers voltooi moet word voordat die stelsel mag oorgaan na 'n niebenodigde periode. In model 2 word falings slegs tydens die benodigde periode van die stelsel opgespoor en daar word geen voorwaardes aan die herstel gekoppel nie.

Die Bayes-benadering stel ingenieurs en statistici in staat om hul a priori-kennis omtrent die onbekende parameters van verdelings van die falingstyd, hersteltyd, benodigde en niebenodigde periodes te gebruik en hierdie inligting in die besluitnemingsproses te inkorporeer. Vanuit 'n Bayes-perspektief is die uitkoms van enige inferensieprobleem die *a posteriori-verdeling van die grootheid waarin belang gestel word*, wat inligting vanuit die data met die beskikbare a priori-inligting kombineer. In hierdie artikel word die Bayes-beraming van die stasionêre tempo van teleurstellings vir bogenoemde twee modelle voorgestel deur Jeffrey se a priori-verdeling vir die onbekende parameters te gebruik.

Jeffrey se a priori-verdelings val in die breë klas van objektiewe priors. Dit word ook soms genoem Jeffrey se nie-inliggende prior. Objektiewe priors word in Bayes statistiese analise gebruik om neutrale kennis voor te stel van die onbekende parameters in die model. In teenstelling hiermee word subjektiewe priors gebruik wanneer individue se subjektiewe gevoel oor die parameters 'n rol speel. Met die keuse van objektiewe priors verteenwoordig die a posteriori-verdeling kennis omtrent die onbekendes deur hoofsaaklik gebruik te maak van die data. Jeffrey se a priori-verdeling word verkry deur 'n standaardtegniek te gebruik (sien Box & Tiao, 1973). Toepassing van Bayes-analise is dit die enigste algemene metode waarmee goeie voorwaardelike gedrag in statistiese analyses verkry word (Berger, 1985). Verder is Jeffrey se a priori-verdeling ook optimaal in eendimensionele probleme.

Afdeling 2 gee 'n kort beskrywing van twee verskillende modelle van 'n eenheidstelsel wat afwisselend gebruik word, die nodige notasie en die maksimumaanneemlikheidsberamers vir die stasionêre tempo van teleurstellings, soos afgelei deur Yadavalli en Botha (2002). Maksimumaanneemlikheidsberamers in hierdie stelsels kan met redelike gemak afgelei word. Met die bepaling van vertrouensintervalle in Yadavalli en Botha (2002) word daar gebruik gemaak van asimptotiese resultate. Asimptotiese metodes kan met groot sukses gebruik word indien die steekproewe groot is. In die geval van klein steekproef-groottes is ander tegnieke nodig om vertrouensintervalle te bepaal. Die Bayes-benadering bespreek in afdeling 3, gee volgens die outeurs 'n optimale wyse vir sodanige waarskynlikheidsintervalle van die parameters en kan bepaal word vir klein sowel as groot steekproewe. Die voorwaardelike verdeling van die stasionêre tempo vir die twee modelle, gegee die data, word bepaal. Hieruit word die hoogste a posteriori-digtheidsintervalle (HPD) en ander puntberamers bepaal.

2. STELSELBESKRYWING EN NOTASIE

Model 1

1. Die stelsel bestaan uit eenheid wat afwisselend gebruik word.
2. Die benodigde en niebenodigde periodes kom alternatiewelik voor.
3. Die leeftyd en die hersteltyd van die eenheid is eksponensiaal verdeelde stogastiese veranderlikes met parameters λ en μ respektiewelik.
4. Daar is 'n enkele herstelfasiliteit.
5. Die benodigde en niebenodigde periodes is eksponensiaal verdeelde stogastiese veranderlikes met parameters β_1 en β_2 respektiewelik.

6. Daar word aanvaar dat falings wat gedurende die niebenodigde periode van die eenheid plaasvind, opgespoor word; d.i. die stelsel word gedurig bewaak.
7. Indien die eenheid faal gedurende die benodigde periode sal herstel 'n aanvang neem en hierdie herstel moet voltooi word voor 'n oorskakeling na die niebenodigde periode mag plaasvind. Die implikasie hiervan is dat die niebenodigde periode onbeperk vertraag word tot die voltooiing van die herstel.
8. Indien 'n eenheid faal gedurende die niebenodigde periode sal so 'n faling ook opgespoor word en herstel sal onmiddellik 'n aanvang neem. Hierdie herstel word voltooi onafhanklik van periodeskakelings in die stelsel.

Model 2

Aannames (1) tot (5) is ook geldig vir hierdie model. Die volgende addisionele aannames geld:

- 6.* Falings word slegs opgespoor gedurende die benodigde periode. Die stelsel kan wissel vanaf benodigde na niebenodigde periode ongeag hierdie herstel.
- 7.* Sou die eenheid faal gedurende 'n niebenodigde periode, sal hierdie toestand nie opgespoor word voordat die nuwe benodigde periode 'n aanvang neem nie.

Die stogastiese proses $\{Z(t); t = 0\}$ met toestandsruimte $\{0, 1, 2, 3\}$ beskryf die gedrag van die stelsel by tyd t in beide modelle 1 en 2.

Yadavalli en Botha (2002) lei die ewewigstoestands-waarskynlikhede af en verkry die stasionêre tempo van teleurstellings ${}_iD_\infty$ (vir $i = 1, 2$ wat modelle 1 en 2 voorstel) soos volg:

$${}_1D_\infty = \frac{\beta_2 \lambda \mu (\beta_1 + \beta_2 + \lambda + \mu)}{(\lambda + \mu) [\beta_2 \lambda + (\beta_1 + \beta_2)(\beta_2 + \mu)]} \quad (1)$$

$${}_2D_\infty = \frac{\beta_2 \lambda (\beta_1 + \mu)(\beta_2 + \mu)(\beta_1 + \beta_2 + \lambda)}{(\beta_1 + \beta_2) [(\beta_2 \lambda + \lambda \mu + \beta_2 \mu) \beta_1 + (\beta_2 + \lambda)(\beta_2 + \mu)(\lambda + \mu)]}$$

Laat $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ ($i = 0, 1$) ewekansige steekproewe van grootte n elk uit verskillende eksponensiaal verdeelde populasies met falings- en hersteltempo van die eenheid λ en μ respektiewelik wees. Veronderstel dat $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in}$ ($i = 0, 1$) ewekansige steekproewe van grootte n elk vanuit verskillende eksponensiaal verdeelde populasies met parameters β_1 en β_2 respektiewelik is. Die maksimumaanneemlikheidsberamers (MAB) van ${}_1D_\infty$ en ${}_2D_\infty$ word respektiewelik gegee deur (sien Yadavalli & Botha, 2002)

$${}_1\hat{D}_\infty = \frac{\bar{X}_0 \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 + \bar{X}_1 \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 + \bar{X}_0 \bar{X}_1 \bar{Y}_0 + \bar{X}_0 \bar{X}_1 \bar{Y}_1}{(\bar{X}_0 + \bar{X}_1) (\bar{X}_0 \bar{X}_1 \bar{Y}_1 + \bar{X}_0 \bar{X}_1 \bar{Y}_0 + \bar{X}_0 \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 + \bar{X}_1 \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 + \bar{X}_0 \bar{Y}_1^2)}$$

en

$${}_2\hat{D}_\infty = \frac{(\bar{X}_1 + \bar{Y}_0)(\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(\bar{X}_0 \bar{Y}_0 + \bar{X}_0 \bar{Y}_1 + \bar{Y}_0 \bar{Y}_1)}{(\bar{Y}_0 + \bar{Y}_1) [\bar{X}_0 (\bar{X}_1 \bar{Y}_0 + \bar{X}_1 \bar{Y}_1 + \bar{Y}_0 \bar{Y}_1) (\bar{X}_0 + \bar{X}_1 + \bar{Y}_1) + \bar{X}_1 \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)]}$$

waar $\bar{X}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{0j}$, $\bar{X}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{1j}$, $\bar{Y}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{0j}$, en $\bar{Y}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{1j}$. Derhalwe

word die $100(1 - \alpha)\%$ asimptotiese vertrouensintervalle van D_∞ (verwys na óf ${}_1D_\infty$ óf ${}_2D_\infty$, afhangende van die model) gegee deur

$$\hat{D}_\infty \pm k_{\alpha} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

vir $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2(\hat{\theta})$, n konsekwente beramer vir $\sigma^2(\theta) = \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial D_\infty}{\partial \theta_j} \right)^2 \theta_j^2$,

k_α vanuit die gestandaardiseerde normaaltablelle en $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ waar

$$\theta_1 = \frac{1}{\lambda}, \theta_2 = \frac{1}{\mu}, \theta_3 = \frac{1}{\beta_1} \text{ en } \theta_4 = \frac{1}{\beta_2}.$$

3. BAYES-INFERENSIE VAN D_∞

Die aanneemlikheidsfunksie word gegee deur

$$L(\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 | T_1, T_2, T_3, T_4) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_{0i}} \cdot \prod_{i=1}^n \mu e^{-\mu x_{1i}} \cdot \prod_{i=1}^n \beta_1 e^{-\beta_1 y_{0i}} \cdot \prod_{i=1}^n \beta_2 e^{-\beta_2 y_{1i}} = (\lambda \mu \beta_1 \beta_2)^n e^{-(\lambda T_1 + \mu T_2 + \beta_1 T_3 + \beta_2 T_4)} \tag{3}$$

waar

$$\left(T_1 = \sum_{j=1}^n X_{0j}, T_2 = \sum_{j=1}^n X_{1j}, T_3 = \sum_{j=1}^n Y_{0j}, T_4 = \sum_{j=1}^n Y_{1j} \right) \text{ voldoende is vir } (\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2).$$

Druk (3) uit in terme van die ooreenkomstige gemiddelde leeftyd, gemiddelde hersteltyd, gemiddelde benodigde tyd en gemiddelde niebenodigde tyd, dan volg dat:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 | T_1, T_2, T_3, T_4) = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4)^{-n} e^{-\left(\frac{1}{\theta_1} T_1 + \frac{1}{\theta_2} T_2 + \frac{1}{\theta_3} T_3 + \frac{1}{\theta_4} T_4 \right)} \tag{4}$$

Deur Jeffrey se reël (sien Box & Tiao, 1973) te gebruik, word die nie-inliggende a priori-verdeling gegee deur:

$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \propto \frac{1}{(\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4)}, \quad \theta_j > 0 \ (j = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

Die gesamentlike a posteriori-verdeling ooreenkomstig Bayes se stelling (gebruik (4) en (5) word gedefinieer deur

$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 | T_1, T_2, T_3, T_4) \propto (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4)^{-n-1} e^{-\left(\frac{1}{\theta_1} T_1 + \frac{1}{\theta_2} T_2 + \frac{1}{\theta_3} T_3 + \frac{1}{\theta_4} T_4 \right)} \tag{6}$$

Vir die gesamentlike a posteriori-verdeling (6) word die rand a posterior-verdeling vir D_∞ verkry deur gebruik te maak van Monte Carlo-simulasiemetodes, aangesien elke θ_i onvoorwaardelik invers-gamma verdeel is. Waardes word dus gegeneer uit hierdie 4 invers-gammaverdelings en vervang in (1) – die uitdrukkings vir die stasionêre tempo's. Sodoende word die a posteriori-verdelings van die stasionêre tempo's gesimuleer, waaruit die HPD bepaal kan word.

4. NUMERIESE ILLUSTRASIE

Om die resultate in afdeling 3 te illustreer, word verskillende groottes eksponensiaal verdeelde steekproewe vir die vier veranderlikes in die stelsel gebruik. Hierdie steekproewe sal normaalweg uit die praktyk kom, wat hierdie tipe stelsels karakteriseer en waar inferensie moet plaasvind vir sekere groottes steekproewe. Vir illustratiewe doeleindes word verskillende steekproewe van grootte 10, 20, 40, 100, 200 en 1000 (almal onafhanklik van mekaar) gesimuleer vir elk van die twee modelle. Die steekproewe is gesimuleer uit die eksponensiaal verdelings met parameters $\lambda = 1/500$; $\mu = 1/200$; $\beta_1 = 1/100$ en $\beta_2 = 1/50$. Die werklike waarde vir die stasionêre tempo vir beide modelle is ${}_1D_\infty = 0.001338156$ en ${}_2D_\infty = 0.002990654$. Tabel 1 gee 'n opsomming van die steekproefinligting vir albei modelle vir verskillende steekproefgroottes.

Die verdeling van die stasionêre tempo's (D) vir albei modelle word met behulp van die Monte Carlo-simulasiemetode bepaal vir bogenoemde statistieke. Aanvanklik is 10 000 waardes uit elk van die vier parameters se verdelings gesimuleer, waarna die stasionêre tempo's se verdelings bepaal is. Tabelle 2 en 3 toon die a posteriori-gemiddelde, mediaan en die HPD-intervalle vir beide ${}_1D_\infty$ en ${}_2D_\infty$.

Deur gebruik te maak van (2) en die steekproefwaardes soos gegee in tabel 1 lewer die asimptotiese vertrouensintervalle vir D_∞ vir steekproewe van grootte 100, 200 en 1000 identiese vertrouensintervalle. Figuur 2 en figuur 3 toon respektiewelik die a posteriori-verdelings van ${}_1D_\infty$ en ${}_2D_\infty$ vir steekproef van grootte 40. Dieselfde vorm word vir die a posteriori-verdelings van steekproewe van grootte 10, 20, 100, 200 en 1000 verkry. Soos verwag word die spreiding van die a posteriori-verdelings in die algemeen kleiner soos n groter word, soos beskryf in die sterk wet van groot getalle (De Groot, 1970).

Aangesien bogenoemde steekproewe gegeneer is uit bekende verdelings, kan dit gebeur dat die HPD-intervalle nie die werklike stasionêre tempowaarde insluit nie. Die illustrasie word verder uitgebrei om die oordekkingsproporsies van die HPD-intervalle vir beide hierdie modelle en die verskillende steekproefgroottes aan te toon, om sodoende die klassieke of frekwentistiese eienskappe van hierdie Bayes-prosedure te bepaal. 'n Monte Carlo-prosedure is gevolg waar 1000 verskillende steekproewe vir elke grootte n gegeneer is. Dieselfde parameters vir λ, μ, β_1 en β_2 hierbo is gebruik. Vir elke steekproef is die HPD-intervalle bereken met 'n Monte Carlo-prosedure en die proporsie-intervalle wat wel die werklike stasionêre tempo insluit, is bepaal. Tabel 4 gee 'n opsomming van hierdie oordekkingsproporsies vir albei modelle en vir elke grootte n .

Tabel 1 Opsomming van steekproefinligting

n	Model 1				Model 2			
	\bar{X}_0	\bar{X}_1	\bar{Y}_0	\bar{Y}_1	\bar{X}_0	\bar{X}_1	\bar{Y}_0	\bar{Y}_1
10	624.23	201.17	72.03	49.2	442.41	196.46	94.21	31.60
20	401.01	152.56	81.49	47.49	303.53	206.15	109.53	47.58
40	494.62	149.59	110.73	41.52	466.57	150.05	81.51	39.86
100	544.08	189.51	106.02	55.25	495.7	199.17	100.98	51.47
200	522.45	201.89	118.09	50.81	478.19	188.21	97.08	42.59
1000	540.92	194.27	94.51	48.13	486.60	198.98	102.42	49.64

Tabel 2 A posteriori-gemiddelde, mediaan en hoogste a posteriori-digtheidsintervalle vir ${}_1D_\infty$

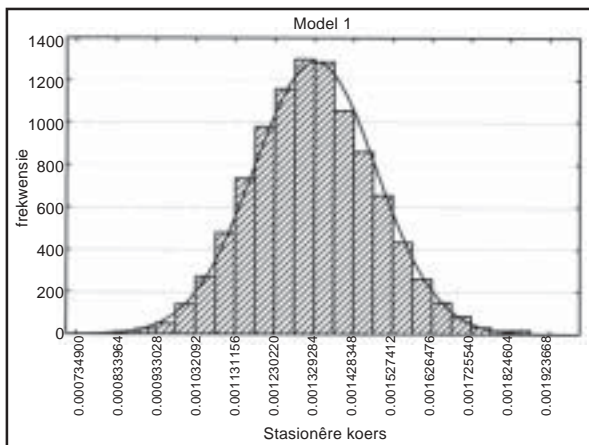
n	gem	mediaan	80%HPD	90%HPD	95%HPD
10	0.00107	0.00105	(0.00074; 0.00142)	(0.00066; 0.00154)	(0.00059; 0.00163)
20	0.00162	0.00161	(0.00126; 0.00198)	(0.00117; 0.00210)	(0.00110; 0.00221)
40	0.00145	0.00144	(0.00121; 0.00168)	(0.00115; 0.00175)	(0.00110; 0.00182)
100	0.00126	0.00126	(0.00113; 0.00138)	(0.00110; 0.00142)	(0.00107; 0.00146)
200	0.00130	0.00129	(0.00121; 0.00139)	(0.00118; 0.00142)	(0.00116; 0.00144)
1000	0.00127	0.00127	(0.00123; 0.00131)	(0.00122; 0.00132)	(0.00121; 0.00133)

Tabel 3 A posteriori-gemiddelde, mediaan en hoogste a posteriori-digtheidsintervalle vir ${}_2D_\infty$

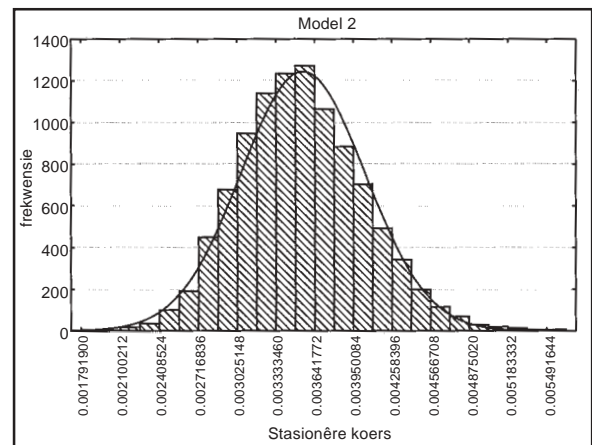
n	gem	mediaan	80%HPD	90%HPD	95%HPD
10	0.00362	0.00352	(0.00235; 0.00501)	(0.00206; 0.00550)	(0.00183; 0.00595)
20	0.00399	0.00395	(0.00314; 0.00490)	(0.00292; 0.00518)	(0.00273; 0.00545)
40	0.00324	0.00322	(0.00265; 0.00386)	(0.00251; 0.00406)	(0.00237; 0.00425)
100	0.00296	0.00296	(0.00264; 0.00331)	(0.00255; 0.00341)	(0.00246; 0.00350)
200	0.00318	0.00318	(0.00292; 0.00345)	(0.00285; 0.00352)	(0.00280; 0.00359)
1000	0.00302	0.00302	(0.00291; 0.00313)	(0.00288; 0.00316)	(0.00286; 0.00319)

Tabel 4 Oordekkingsproporsies van die HPD-intervalle vir beide ${}_1D_\infty$ en ${}_2D_\infty$

n	Model 1			Model 2		
	95%HPD	90%HPD	80%HPD	95%HPD	90%HPD	80%HPD
10	0.949	0.902	0.797	0.955	0.899	0.804
20	0.952	0.897	0.794	0.955	0.912	0.808
40	0.950	0.914	0.805	0.957	0.915	0.814
100	0.958	0.918	0.828	0.969	0.908	0.802
200	0.958	0.905	0.805	0.959	0.915	0.807
1000	0.949	0.897	0.791	0.958	0.914	0.830



Figuur 2 Rand a posteriori-verdeling van ${}_1D_\infty$



Figuur 3 Rand a posteriori-verdeling van ${}_2D_\infty$

Goeie oordekkingsproporsies is verkry vir elk van die intervale wat daarop dui dat hierdie Bayes-benadering kongruente resultate oplewer indien dit gebaseer word op 'n klassieke prosedure.

Die doel van hierdie illustrasie is nie om 'n vergelyking te tref tussen die beramers indien verskillende grootte steekproewe geneem word nie, aangesien die beramers telkens bereken is vir verskillende data (verskillende steekproewe). Hierdie illustrasie toon egter aan hoe beramers en HPD-intervalle bepaal kan word, indien klein sowel as groot steekproewe beskikbaar is. Die aannames van die twee modelle verskil drasties en gevolglik is die steekproefinligting in hierdie twee modelle ook verskillend. Hierdie artikel bespreek die Bayes-benadering tot hierdie tipe inferensie in die spesifieke geval waar steekproewe klein is en waar die vertrouensintervalle met klassieke inferensietegnieke moeilik bepaal kan word. Hierdie objektiewe Bayes-analise is een van die maklike maniere om goeie frekwentistiese prosedures te verkry (Berger, 1985).

LITERATUURVERWYSINGS

1. Berger, J.O. (1985). *Statistical decision theory and Bayes analysis*. Springer-Verlag, New York.
2. Box, G.E.P. & Tiao, G.C. (1973). *Bayesian inference in Statistical Analysis*. Wiley, New York.
3. De Groot, M.H. (1970). *Optimal statistical decisions*. McGraw-Hill, New York.
4. Gaver, D.P. (1964). A probability problem arising in reliability and traffic studies. *Operational Research*, **12**, 534-542.
5. Yadavalli, V.S.S., Singh, N., Botha, M. & Bekker, A. (2000). Research Issues and the future research of intermittently used systems. *Z. Journal of Science and Technology*, **1**, 2, 53-62.
6. Yadavalli, V.S.S. & Botha, M. (2002). Asymptotic limits for the stationary rate of disappointments of intermittently used systems. *Indian Journal of Mathematics*, **44**, 2.



V.S.S. Yadavalli

Venkata S. S. Yadavalli is professor in bedryfs-en sisteemingenieurswese aan die Universiteit van Pretoria, Suid-Afrika. Hy het reeds meer as 50 navorsingsartikels gepubliseer oor betroubaarheidskunde, toestaan- en voorraadbeheerteorie, menslike-hulpbronbeplanning, ekonometrisse modellering, ensovoorts in 'n wye verskeidenheid van tydskrifte, insluitende *IEEE Transactions in Reliability, Microelectronics and Reliability, Stochastic Analysis and Applications, International Journal of Systems Science, Studies in Econometrics, ORiON, International Journal of Management and Systems* asook die *Journal of Applied Statistical Science*.

P. J. Mostert is medeprofessor in die Departement Statistiek en Aktuariële Wetenskappe aan die Universiteit van Stellenbosch, Suid-Afrika. Hy verwerf sy Ph.D. aan die Universiteit van Suid-Afrika. Sy navorsingsareas sluit Bayes-inferensie en betroubaarheidskunde in.

A. Bekker* is medeprofessor in die Departement Statistiek van die Universiteit van Suid-Afrika, waar sy ook haar Ph.D. behaal het. Sy is die outeur van meer as 20 navorsingsartikels in verskeie tydskrifte, wat onder andere insluit *Communications in Statistics, South African Statistical Journal, Computational statistics and Data Analysis* en *Journal of Applied Statistical Sciences*. Bayes-inferensie, meerveranderlike analise en betroubaarheidskunde vorm deel van haar navorsingsbelangstelling.

M. Botha is 'n senior lektreiser in die Departement Statistiek van die Universiteit van Suid-Afrika, waar sy in 2001 haar Ph.D. behaal het. Haar navorsingsbelangstellings is betroubaarheidskunde, Bayes-betroubaarheid en opvoedkundige statistiek.

* A. Bekker erken met dank die navorsings- en ontwikkelingsverlof wat deur Unisa toegestaan is.