

Enumerasie van self-ortonogale Latynse vierkante met simmetriese ortogonale maats

A.P. Burger, M.P. Kidd en J.H. van Vuuren

A.P. Burger, M.P. Kidd en J.H. van Vuuren: Departement Logistiek, Universiteit Stellenbosch

Opsomming

In hierdie artikel enumereer ons verskeie ekwivalensieklasse van *self-ortogonale Latynse vierkante met simmetriese, ortogonale maats* (SOLVSOMs), 'n probleem wat nog nie in die literatuur oor kombinatoriese ontwerpe aangespreek is nie. In die besonder bepaal ons die getal (ry, kolom)-paratooptog van SOLVSOMs van orde $n \leq 10$ deur inligting in bestaande, uitputtende databasisse van self-ortogonale Latynse vierkante en simmetriese Latynse vierkante met behulp van 'n boomsoektog met terugkering (Eng: *backtracking*) te kombineer. Ons bepaal ook die getal verskillende SOLVSOMs, SOLVSOMs in standaardvorm en transponent-isomorfismeklasse van SOLVSOMs van ordes $n \leq 10$ deur gebruikmaking van standaard tegnieke uit abstrakte algebra. In die proses beantwoord ons 'n 34 jaar-oue oop bestaansvraag oor SOLVSOMs van orde 10 deur aan te toon dat geen so 'n ontwerp bestaan nie. Aangesien 'n SOLVSOM van orde n in standaardvorm ekwivalent is aan 'n spelskedule vir 'n gadevermydende gemengde-dubbels rondomtalie-tennisstoernooi vir n getroude pare, dui hierdie resultaat daarop dat geen so 'n toernooi vir 10 getroude pare geskeduleer kan word nie.

Trefwoorde: Latynse vierkant, self-ortogonale Latynse vierkant, simmetriese Latynse vierkant, SOLVSOM, enumerasie.

Abstract

Enumeration of self-orthogonal Latin squares with symmetric orthogonal mates

A *Latin square* of order n is an $n \times n$ array containing each symbol from a set of n distinct symbols exactly once in every row and every column. We denote the entry in row i and column j of a Latin square L by $L(i, j)$ and take the n symbols from the set $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$. The index sets for the rows and columns of a Latin square are also taken as \mathbb{Z}_n . A Latin square is said to be *unipotent* if all the entries on its main diagonal are a single symbol from \mathbb{Z}_n , *idempotent* if the entries on its main diagonal are *all* the symbols of \mathbb{Z}_n in natural order, and *reduced* if both its first row and first column contain the symbols of \mathbb{Z}_n in natural order.

Two Latin squares L and L' are *orthogonal* if the n^2 ordered pairs $(L(i, j), L'(i, j))$ are all distinct as $i, j \in \mathbb{Z}_n$ vary. The *transpose* of a Latin square L , denoted by L^T , is defined as in the ordinary matrix sense and L is *symmetric* if $L = L^T$. If a Latin square L is orthogonal to its transpose, then L is called a *self-orthogonal Latin square* (SOLS). If a SOLS L is orthogonal to a symmetric Latin square S , then the pair (L, S) forms a *SOLS with a symmetric orthogonal mate* (SOLSSOM). If n is even, a SOLSSOM (L, S) is *unipotent* if S is unipotent. Furthermore, a SOLSSOM $\mathcal{S} = (L, S)$ is *standard* if L is idempotent and if S is idempotent (for odd n) or reduced (for even n).

It is known that a SOLSSOM of order n exists for any positive integer $n \neq 1, 2, 3, 6, 10, 14$, while a SOLSSOM of order n does not exist if $n = 1, 2, 3, 6$ (at the time of writing this paper the cases of orders $n = 10, 14$ were still undecided). Unipotent SOLSSOMs have useful applications in the scheduling of spouse-avoiding mixed-doubles round-robin tennis tournaments [5, 9] and Whist tournaments [10, §III.5.10].

Two SOLSSOMs $\mathcal{S} = (L, S)$ and $\mathcal{S}' = (L', S')$ are *(row, column)-paratopic* if there exists a quadruple $\alpha = (p, \ell, s, t) \in S_n^3 \times S_2$ of permutations (where S_n is the symmetric group of order n), called a *(row, column)-paratopism* mapping \mathcal{S} to \mathcal{S}' , such that

$$\ell(L(i, j)) = \begin{cases} L'(p(i), p(j)) & \text{if } t(0) = 0, \\ L'(p(j), p(i)) & \text{if } t(0) = 1, \end{cases}$$

and $s(S(i, j)) = S'(p(i), p(j))$. Hence p is a permutation applied to the rows and columns of L and S , and ℓ is a permutation applied to the symbols of L . Furthermore, s is a permutation applied to the symbols of S , while t permutes the roles of the rows and columns of L (i.e. possibly achieves a switch between L and L^T). The notation $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^\alpha$ is henceforth used to denote the fact that α transforms \mathcal{S} into \mathcal{S}' . If $\mathcal{S} = \mathcal{S}^\alpha$, then α is called a *(row, column)-autoparatopism* of \mathcal{S} . If $\alpha = (p, \ell, s, t)$ is a (row, column)-paratopism for which $p = \ell = s$, then α is called a *transpose-isomorphism*, simply denoted by $(p, t) \in S_n \times S_2$, in which case \mathcal{S} and \mathcal{S}^α are said to be *transpose-isomorphic*. If $\mathcal{S}^\alpha = \mathcal{S}$ in this case, then α is called a *transpose-automorphism* of \mathcal{S} .

The notions of a (row, column)-paratopism and a transpose-isomorphism may be defined similarly for SOLS or for symmetric Latin squares (individually). For instance, if $\alpha = (p, \ell, s, t)$ is a (row, column)-paratopism acting on a SOLSSOM $\mathcal{S} = (L, S)$, then (p, ℓ, t) is a (row, column)-paratopism acting on L , while (p, s) is a (row, column)-paratopism acting on S .

Various classes of SOLS of orders $4 \leq n \leq 10$ have been enumerated by Graham and Roberts [11] and by Burger et al. [8, 7], and unipotent symmetric Latin squares have also been enumerated in the form of one-factorisations of the complete graph [2]. A problem that has not yet been addressed in the literature yet is that of the enumeration of SOLSSOMs. The availability of exhaustive repositories for non-(row, column)-paratopic symmetric Latin squares in [13] and non-transpose-isomorphic SOLS in [6] provide two different methods of generating SOLSSOMs, namely finding, for each SOLS in the repository, its non-(row, column)-paratopic symmetric orthogonal mates, or finding, for each symmetric Latin square, its non-(row, column)-paratopic SOLS-mates.

In this paper we adopt both the enumeration methods described above (implemented as backtracking tree searches) with a view to enumerating distinct SOLSSOMs, standard SOLSSOMs, transpose-isomorphism classes of SOLSSOMs, and (row, column)-paratopism classes of SOLSSOMs up to order 10, thereby also providing a means for validating our results. The numerical results obtained are summarised in Table 1. An important conclusion from these enumeration results is that there is no SOLSSOM of order 10; this settles a 34-year-old stan-

ding case with respect to orders for which SOLSSOMs exist. Since a SOLSSOM of order n in standard form is equivalent to a playing schedule for a spouse-avoiding mixed-doubles round-robin tennis tournament involving n married couples, this shows that no such tournament can be scheduled for 10 married couples.

There is an appendix at the end of the paper which contains lists of (i) the (row, column)-paratopism class representatives of idempotent symmetric Latin squares of orders $n = 5, 7, 9$ and (ii) the (row, column)-paratopism class representatives of standard SOLSSOMs of orders $n = 4, 5, 7, 8, 9$.

n	Distinct SOLSSOMs	Standard SOLSSOMs	Transpose-isomorphism classes of SOLSSOMs	(Row, column)-paratopism classes of SOLSSOMs
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	1 152	2	31	1
5	172 800	12	749	1
6	0	0	0	0
7	12 192 768 000	480	1 210 622	2
8	608 662 978 560 000	374 400	7 547 904 042	32
9	464 573 723 443 200 000	3 528 000	640 121 719 688	26
10	0	0	0	0
Sloane	#A166490	#A166489	#A166488	#A166487

Tabel 1: Enumeration of various equivalence classes of SOLSSOMs of orders $4 \leq n \leq 10$. The last row of the table contains the sequence numbers in Sloane's *Online Encyclopedia of Integer Sequences* [16] corresponding to the table columns.

Keywords: Latin square, self-orthogonal Latin square, symmetric Latin square, SOLSSOM, enumeration.

Inleiding

In 1972 was die Briarcliff Racquet Club in New York op soek na 'n skedule vir 'n gemengde-dubbels tennistoernooi vir getroude pare (*m.a.w.* waarin elke wedstryd uit twee opponerende spanne bestaan, waar elke span een man en een vrou bevat), sodat:

- (i) geen speler (as spanmaat of opponent) in dieselfde wedstryd as sy/haar eggenoot speel nie
- (ii) elke speler elke ander speler (behalwe sy/haar eggenoot) presies een keer teenstaan
- (iii) elke speler presies een keer saam met elke speler van die teenoorgestelde geslag (behalwe sy/haar eggenoot) in 'n span speel
- (iv) wedstryde in die minimum getal rondtes gegroepeer word waar geen speler meer as een keer per rondte speel nie en die rondtes elk ewe veel wedstryde bevat.

'n Toernooi wat aan hierdie voorwaardes voldoen, staan as 'n *gade-vermydende gemengde-dubbels rondomtalie-tennistoernooi* (GGRTT) bekend, en die vermoede dat 'n getroude paar se verhouding 'n invloed op hul spel kan hê wanneer hulle teen of saam met mekaar speel, dien as motivering vir die skedulering van so 'n toernooi vir getroude pare.

Aangesien elke man presies een keer teen elke ander man moet speel, moet daar minstens $n - 1$ rondtes in 'n GGRTT vir n getroude pare wees. As n ewe is, kan die mans in enige rondte afgepaar word om teen mekaar te speel sonder dat enige man hoef uit te sit, maar indien n onewe is, sal daar in elke rondte een man moet uitsit. Indien 'n man gedurende 'n rondte uitsit, moet daar dus minstens n rondtes geskeduleer word sodat hierdie man nogsteeds elk van die ander $n - 1$ mans presies een keer kan teenstaan. Vir ewe n is die minimum getal rondtes dus $n - 1$, terwyl vir onewe n die minimum getal rondtes dus n is. Om hierdie minimum vir onewe n te bereik, moet dit verder ook geld dat elke man net een keer gedurende die toernooi uitsit, en dat 'n man en sy vrou saam gedurende dieselfde rondte moet uitsit.

Gestel byvoorbeeld vier mans, $M_0, M_1, M_2,$ en M_3 , en vier vrouens, $V_0, V_1, V_2,$ en V_3 , neem aan so 'n tennistoernooi deel, waar M_i en V_i eggenote vir $i = 0, 1, 2$ en 3 is (*m.a.w.* i kan gesien word as 'n simbool wat die egpaar (M_i, V_i) se van voorstel). 'n Voorbeeld van 'n GGRTT waarin hierdie pare deelneem en waar die roosternotasie

M_i	M_j
V_k	V_ℓ

die wedstryd voorstel waarin M_i en V_k 'n span teen M_j en V_ℓ vorm, word in Figuur 1 getoon.

Rondte 0				Rondte 1				Rondte 2			
M_0	M_1	M_2	M_3	M_0	M_2	M_1	M_3	M_0	M_3	M_1	M_2
V_2	V_3	V_0	V_1	V_3	V_1	V_2	V_0	V_1	V_2	V_0	V_3

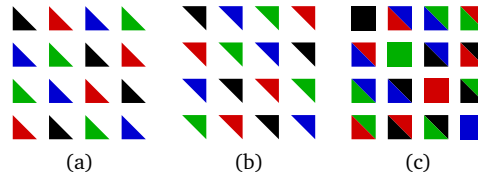
Figuur 1: 'n Voorbeeld van 'n GGRTT vir vier getroude pare bestaande uit drie rondtes.

Die GGRTT in Figuur 1 is klein genoeg sodat vereistes (i)-(iv) hier bo maklik deur inspeksie geverifieer kan word. So is dit byvoorbeeld maklik om te sien dat die twee mans M_0 en M_1 mekaar slegs in een rondte teenstaan (naamlik Rondte 0), en dat dieselfde geld vir elke ander paar spelers. Verder kan dit ook maklik geverifieer word dat man M_0 en vrou V_2 in slegs een rondte afgepaar word om 'n span te vorm (naamlik Rondte 0), en dat geen speler in enige wedstryd saam met of teen sy/haar eggenoot speel nie.

Die voorsitter van die Briarcliff Racquet Club het besef dat die skedulering van 'n GGRTT nie 'n triviale taak is nie, en het die wiskundiges Brayton, Coppersmith en Hoffman [5] genader toe die klub nie self skedules vir sulke toernooie kon opstel nie. Hierdie wiskundiges het vasgestel dat skedules vir GGRTTs afgelei kan word uit wiskundige strukture wat as *self-ortogonale Latynse vierkante* (SOLVe) bekend staan. SOLVe kan gekonstrueer word deur van bekende wiskundige tegnieke gebruik te maak.

'n *Latynse vierkant van orde n* is 'n rangskikking van n simbole in 'n $n \times n$ -rooster sodat elke simbool presies een keer in elke ry en kolom voorkom, en twee Latynse vierkante van orde n is *ortogonaal* indien geen twee inskrywings (gesien as geordende pare) in 'n derde $n \times n$ -rooster gevorm deur die twee vierkante op mekaar te superponeer, dieselfde is nie. Verder is 'n SOLV 'n Latynse vierkant wat ortogonaal aan sy *transponent* is, waar die *transponent*

van 'n Latynse vierkant verkry word deur die vierkant rondom 'n as deur sy noordwestelik-suidoostelike diagonaal te roteer. Figuur 2 toon (a) 'n SOLV van orde 4 (waar die simbole deur vier kleure voorgestel word) tesame met (b) die transponent van die SOLV, asook (c) die superposisie van die SOLV en sy transponent.



Figuur 2: (a) 'n SOLV van orde 4. (b) Die transponent van die Latynse vierkant in (a). (c) Die superposisie van hierdie twee Latynse vierkante waarin geen twee inskrywings dieselfde geordende paar kleure bevat nie.

Om te sien hoe 'n SOLV gebruik kan word om 'n skedule vir 'n GGRTT af te lei, laat L 'n SOLV van orde n voorstel waarin die simbole $\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}$ voorkom, laat die rye en kolomme van L deur die versameling simbole $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ geïndekseer word (*m.a.w.* sodat M_0 die eerste ry en kolom voorstel, M_1 die tweede, ens.), en laat $L(M_i, M_j)$ die simbool wat in ry M_i en kolom M_j voorkom, voorstel. Gestel verder dat $L(M_i, M_i) = V_i$ vir elke simbool i in die versameling $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ¹. Die idempotente SOLV L kan gebruik word om die wedstryde van 'n GGRTT voort te bring deur vir elke paar verskillende simbole M_i en M_j die wedstryd

$$\begin{array}{|c|c|} \hline M_i & M_j \\ \hline L(M_i, M_j) & L(M_j, M_i) \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

by die skedule in te sluit. Dus word die ry- en kolomindekse geneem as die mans, terwyl die inskrywings van die SOLV die vrouens voorstel, waar M_i en V_i weer eens eggenote vir alle $i = 0, 1, \dots, n-1$ is. Die volgende eienskappe kan nou vir elke wedstryd wat so opgestel word, waargeneem word:

- Aangesien hierdie wedstryde presies een keer vir elke paar verskillende simbole M_i en M_j ingesluit word, speel elke man presies een keer teen elke ander man gedurende die toernooi.
- Omdat L 'n Latynse vierkant is, kom die simbool $L(M_i, M_j)$ net een keer in ry M_i van L voor, naamlik in kolom M_j , en dus sal $L(M_i, M_j)$ en M_i net in een wedstryd afgepaar word om 'n span te vorm.
- Omdat L 'n Latynse vierkant is, kom die simbool $L(M_j, M_i)$ net een keer in kolom M_i van L voor, naamlik in ry M_j , en dus sal $L(M_j, M_i)$ en M_i net in een wedstryd teen mekaar speel.
- Omdat L self-ortogonaal is, kom die paar vrouens $L(M_i, M_j)$ en $L(M_j, M_i)$ net in die wedstryd voor waarin M_i en M_j teen mekaar speel, en dus speel elke vrou presies een keer teen elke ander vrou.
- Omdat $L(M_i, M_i) = V_i$ geld vir elke simbool i in die versameling $\{0, 1, \dots, n-1\}$ dat geen man in dieselfde wedstryd as sy eie vrou geskeduleer word nie.

¹'n Latynse vierkant van orde n is *idempotent* as al n simbole in natuurlike volgorde op die noordwestelik-suidoostelike diagonaal verskyn.

Alhoewel 'n SOLV gebruik kan word om die wedstryde van 'n GGRTT voort te bring, voorsien dit geen inligting ten opsigte van hoe hierdie wedstryde in die minimum getal rondtes geskeduleer kan word nie. Vir hierdie doel word 'n tweede Latynse vierkant benodig wat ortogonaal aan die gegewe SOLV is en wat verder ook *simmetries* (gelyk aan sy transponent) is. So 'n paar Latynse vierkante word 'n *SOLV met 'n simmetriese ortogonale maat* (SOLVSOM) genoem.

Laat L 'n SOLV met ry/kolom-indekse en simbole soos bo bespreek, voorstel, en laat S 'n simmetriese Latynse vierkant met dieselfde ry/kolom-indekse as L voorstel, maar waarin die inskrywings die getalle $0, 1, \dots, n-1$ is. Indien L en S 'n SOLVSOM vorm (*m.a.w.* indien hulle ortogonaal is) en indien $S(M_i, M_i) = n-1$ vir ewe n of $S(M_i, M_i) = i$ vir onewe n en alle $i = 0, 1, \dots, n-1$, kan 'n skedule vir 'n GGRTT verkry word indien die wedstryd in (1) geskeduleer word om in Rondte $S(M_i, M_j)$ gespeel te word. Die volgende waarnemings kan boonop gemaak word:

- Omdat S 'n Latynse vierkant is, kom die simbool $S(M_i, M_j)$ net een keer in ry M_i van S voor, naamlik in kolom M_j , en dus sal M_i slegs een keer in Rondte $S(M_i, M_j)$ speel. Geen man word dus in meer as een wedstryd per rondte geskeduleer nie.
- Omdat L en S ortogonaal is, word $L(M_i, M_j)$ in Rondte $S(M_i, M_j)$ slegs in een wedstryd geskeduleer, naamlik in die wedstryd waarin M_i en M_j teen mekaar speel. Geen vrou word dus in meer as een wedstryd per rondte geskeduleer nie.
- Vir ewe n stel $S(M_i, M_i) = n-1$ nie 'n rondte voor nie (aangesien daar net $n-1$ rondtes is, naamlik $0, 1, \dots, n-2$), en vir onewe n stel $S(M_i, M_i) = i$ die rondte voor waarin M_i en V_i uitsit.

Die SOLVSOM van orde 4

	M_0	M_1	M_2	M_3			M_0	M_1	M_2	M_3
M_0	V_0	V_2	V_3	V_1	en	M_0	3	0	1	2
M_1	V_3	V_1	V_0	V_2		M_1	0	3	2	1
M_2	V_1	V_3	V_2	V_0		M_2	1	2	3	0
M_3	V_2	V_0	V_1	V_3		M_3	2	1	0	3

lewer byvoorbeeld op hierdie manier die GGRTT in Figuur 1, en die bostaande waarnemings kan maklik vir hierdie klein voorbeeld deur inspeksie geverifieer word.

Die vraag na die moontlikheid om 'n GGRTT vir n getroude pare te skeduleer is dus ekwivalent aan die vraag na die bestaan van 'n SOLVSOM van orde n . Met die skryf van hierdie artikel was dit bekend dat 'n SOLVSOM van orde n vir enige positiewe heelgetal $n \neq 1, 2, 3, 6, 10, 14$ bestaan, terwyl daar geen SOLVSOM van ordes $n = 1, 2, 3, 6$ bestaan nie. Vir die twee uitstaande gevalle, naamlik $n = 10, 14$, was dit onbekend of daar SOLVSOMs van daardie ordes bestaan. Hierdie stand van sake was die gevolg van meer as dertig jaar se werk, waarin verskeie outeurs opeenvolgend konstruksies van SOLVSOMs vir meer en meer van 'n lang lys uitstaande bestaansgevalle gegee het, soos in Tabel 2 uiteengesit, totdat slegs die onsekere gevalle $n = 10, 14$ oorgebly het.

²n Latynse vierkant is *unipotent* as elke inskrywing op die noordwestelik-suidoostelike diagonaal dieselfde simbool bevat.

Jaar	Bestaansvraag beantwoord vir ordes	Outeur(s)
1978	$n \notin \{10, 14, 39, 46, 51, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 82, 87, 98, 102, 118, 123, 142, 159, 174, 183, 194, 202, 214, 219, 230, 258, 267, 278, 282, 303, 394, 398, 402, 422, 1322\}$	Wang [18]
1983	$n \notin \{10, 14, 39, 46, 54, 58, 62, 66, 70, 87, 102, 194, 230\}$	Lindner, Mullin & Stinson [14]
1984	$n \notin \{10, 14, 46, 54, 58, 62, 66, 70\}$	Zhu [19]
1996	$n \notin \{10, 14, 46, 54, 58, 66, 70\}$	Bennet & Zhu [4]
1996	$n \notin \{10, 14, 66, 70\}$	Bennet & Zhu [3]
2000	$n \notin \{10, 14\}$	Abel, Bennet, Zhang & Zhu [1]

Tabel 2: Geskiedenis van SOLVSOM-bestaansresultate.

Een manier om te bepaal of 'n SOLVSOM vir 'n sekere orde bestaan, is om op alle moontlike maniere een te probeer genereer. Indien alle moontlikhede uitgeput word sonder dat enige SOLVSOM voltooi word, kan die gevolgtrekking gemaak word dat 'n SOLVSOM vir daardie orde nie bestaan nie. Tydens so 'n soektog na alle moontlike SOLVSOMs van orde n , oftewel alle moontlike skedules vir 'n GGRTT vir n getroude pare, is dit belangrik om te kan onderskei tussen twee essensieel verskillende skedules in terme van *struktuur*, en nie noodwendig net die fisiese voorkomste van die verskillende simbole self nie.

Beskou byvoorbeeld die skedule vir 'n GGRTT vir $n = 4$ getroude pare in Figuur 3. Dit is maklik om na te gaan dat indien die wedstryde in Rondtes 1 en 2 omgeruil word, M_0 en M_1 omgeruil word en V_0 en V_1 omgeruil word (*m.a.w.* die vanne 0 en 1 omgeruil word), die skedule in Figuur 1 verkry word.

Ronde 0				Ronde 1				Ronde 2			
M_1	M_0	M_2	M_3	M_1	M_3	M_0	M_2	M_1	M_2	M_0	M_3
V_2	V_3	V_1	V_0	V_0	V_2	V_1	V_3	V_3	V_0	V_2	V_1

Figuur 3: 'n Voorbeeld van 'n GGRTT bestaande uit vier getroude pare.

Aangesien daar geen vereistes ten opsigte van die volgorde van die rondtes van 'n GGRTT is nie, en aangesien die simbole wat gebruik word om die identiteite van die spelers mee voor te stel, arbitrêr is, is die toernooie in Figure 1 en 3 essensieel presies dieselfde in terme van relatiewe span- en opponentstruktuur. Dus kan die volgorde van die rondtes in 'n skedule vir 'n GGRTT en die simbole wat gebruik word om die identiteite van die spelers mee voor te stel, omgeruil word, om sodoende die skedule te transformeer na 'n ander skedule met essensieel dieselfde struktuur.

So 'n transformasie gee aanleiding tot die begrip van 'n ekwivalensieklass van skedules vir GGRTTs, waar twee skedules in dieselfde ekwivalensieklass is indien daar 'n transformasie bestaan wat die een in die ander omskep. Die voordeel van 'n ekwivalensieklass-beskouing wanneer daar tussen essensieel verskillende GGRTTs onderskei word, is dat tydens 'n soektog na alle moontlike maniere om so 'n toernooi op te stel, heelwat oorbodigheid uitgeskakel kan word deur van die feit gebruik te maak dat baie skedules essensieel of struktureel dieselfde is en sulke ekwivalente skedules dus sonder verlies van algemeenheid tydens die soeke na skedules geïgnoreer kan word.

Verskeie ekwivalensieklass van SOLVE van ordes $4 \leq n \leq 10$ is deur Graham en Roberts [11] en deur Burger *et al.* [8, 7] geënumereer, terwyl unipotente, simmetriese Latynse vierkante van

ewe ordes in die vorm van een-faktorisasies van volledige grafieke ook reeds geënumereer is [2]. Die enumerasie van ekwivalensieklasse van SOLVSOMs is egter 'n probleem wat nog glad nie in die literatuur aangespreek is nie, maar die beskikbaarheid van alomvattende databasisse van simmetriese Latynse vierkante [13] en SOLVe [6] maak dit moontlik om hierdie probleem op twee verskillende maniere aan te pak, naamlik deur vir elke SOLS ortogonale simmetriese maats te soek, en vir elke simmetriese Latynse vierkant ortogonale SOLV-maats te soek. In hierdie artikel volg ons hierdie twee telbenaderings om ekwivalensieklasse van SOLVSOMs van ordes $4 \leq n \leq 10$ te enumereer. In die proses bewys ons dat daar geen SOLVSOM van orde $n = 10$ bestaan nie, sodat die enigste uitstaande bestaansgeval vir SOLVSOMs volgens Tabel 2 dan $n = 14$ is. Gevolglik kan 'n GGRTT vir 10 getroude pare dus nie in die minimum getal rondtes geskeduleer kan word nie (alhoewel die wedstryde vir so 'n toernooi wel deur 'n SOLV van orde 10 voortgebring kan word).

Die res van hierdie artikel is soos volg gestruktureer. In §1 verskaf ons die definisies van 'n aantal sinvolle ekwivalensieklasse van SOLVSOMs; ons illustreer ook hierdie definisies aan die hand van voorbeelde. In §2 verduidelik ons hoe daar te werk gegaan is om een van hierdie ekwivalensieklasse van SOLVSOMs van klein ordes rekenaarmatig te enumereer, en in §3 enumereer ons die oorblywende ekwivalensieklasse van SOLVSOMs deur middel van standaard-telargumente uit abstrakte algebra. §4 bevat 'n paar slotopmerkings, terwyl ons in §5 moontlike opvolgwerk op die enumerasies wat hier gerapporteer word, kortliks bespreek. Daar is ook 'n aanhangsel aan die einde van die artikel waarin daar verteenwoordigers van 'n fundamentele ekwivalensieklas van SOLVSOMs van ordes $4 \leq n \leq 10$ gelys word.

1. Ekwivalensieklasse van SOLVSOMs

Twee SOLVSOMs $\mathcal{S} = (L, S)$ en $\mathcal{S}' = (L', S')$ word *(ry, kolom)-paratope* genoem indien daar 'n geordende viertal $\alpha = (p, \ell, s, t) \in S_n^3 \times S_2$ van permutasies bestaan (waar S_n die simmetriese groep van orde n voorstel), met die eienskappe dat

$$\ell(L(i, j)) = \begin{cases} L'(p(i), p(j)) & \text{as } t(0) = 0, \\ L'(p(j), p(i)) & \text{as } t(0) = 1, \end{cases}$$

en $s(S(i, j)) = S'(p(i), p(j))$. Só 'n viertal α word 'n *(ry, kolom)-paratopisme* genoem wat \mathcal{S} op \mathcal{S}' afbeeld. Hier is p 'n permutasie wat op die rye en kolomme van L en S toegepas word, terwyl ℓ 'n permutasie is wat op die simboolversameling van L toegepas word. Verder is s 'n permutasie wat op die simboolversameling van S toegepas word, terwyl t die rolle van die rye en kolomme van L permuteer. Ons gebruik die notasie $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^\alpha$ om aan te dui dat die *(ry, kolom)-paratopisme* α die SOLVSOM \mathcal{S} na die SOLVSOM \mathcal{S}' transformeer. Die SOLVSOM $\mathcal{S}_1 = (L_1, S_1)$, met

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 6 & 7 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 7 & 6 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 7 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 7 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 0 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

en die SOLVSOM $\mathcal{S}_2 = (L_2, S_2)$, met

$$L_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 0 & 7 & 4 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ en } S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & 0 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 6 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

is byvoorbeeld (ry, kolom)-paratope van mekaar. 'n (Ry, kolom)-paratopisme wat $\mathcal{S}_1 = (L_1, S_1)$ op $\mathcal{S}_2 = (L_2, S_2)$ afbeeld, is

$$\alpha_1 = \left(\begin{pmatrix} 01234567 \\ 10325476 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01234567 \\ 12345670 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01234567 \\ 12045376 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

As $\alpha = (p, \ell, s, t)$ 'n (ry, kolom)-paratopisme is waarvoor $p = \ell = s$, dan word α 'n *transponent-isomorfisme* genoem wat slegs deur die geordende paar $(p, t) \in S_n \times S_2$ gespesifiseer word, in welke geval daar gesê word dat \mathcal{S} en \mathcal{S}^α *transponent-isomorf* is. Indien $\mathcal{S}^\alpha = \mathcal{S}$, dan heet α 'n *transponent-outomorfisme* van \mathcal{S} . Die bostaande SOLVSOM $\mathcal{S}_1 = (L_1, S_1)$ en die SOLVSOM $\mathcal{S}_3 = (L_3, S_3)$, met

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 3 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 3 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ en } S_3 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 0 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

is byvoorbeeld transponent-isomorfe. 'n Transponent-isomorfisme wat \mathcal{S}_1 op \mathcal{S}_3 afbeeld, is

$$\alpha_2 = \left(\begin{pmatrix} 01234567 \\ 76543210 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Die begrippe van 'n (ry, kolom)-paratopisme en 'n transponent-isomorfisme kan op 'n soortgelyke manier ook vir slegs SOLVE of simmetriese Latynse vierkante op hul eie gedefinieer word. So byvoorbeeld is

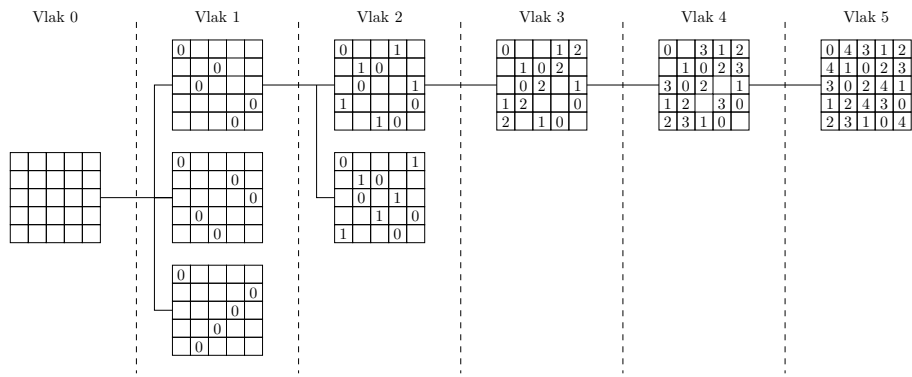
$$\alpha'_1 = \left(\begin{pmatrix} 01234567 \\ 10325476 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01234567 \\ 12345670 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

'n (ry, kolom)-paratopisme wat L_1 op L_2 afbeeld, terwyl

$$\alpha''_1 = \left(\begin{pmatrix} 01234567 \\ 10325476 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01234567 \\ 12045376 \end{pmatrix} \right).$$

'n (ry, kolom)-paratopisme is wat S_1 op S_2 afbeeld.

'n *Transversaal* van 'n Latynse vierkant L is 'n versameling van n *verskillende* inskrywings van L met die eienskap dat geen twee inskrywings in dieselfde ry of kolom van L voorkom nie. 'n *Universaal* van L , daarenteen, is 'n versameling van al n voorkomste in L van 'n spesifieke element van \mathbb{Z}_n (gevolglik is geen twee inskrywings van 'n universaal van L in dieselfde ry of kolom van L nie). 'n Voorbeeld van 'n transversaal is in L_3 hierbo onderstreep, en word in



Figuur 4: Vertak-en-begrens-soekboom vir simmetriese ortogonale maats vir die enigste SOLV van orde 5 (tot op (ry, kolom)-isotopisme na), naamlik L_4 . Die boom word op Vlakke 1 en 2 begrens waar orthogonaliteit tussen die simmetriese maat en L_4 vernietig word. Slegs een simmetriese ortogonale maat word uiteindelik gevind, wat lei na die enumerasie van een (ry, kolom)-paratopklas van SOLVSOMs van orde 5, met klasverteenvoorder $\mathcal{S}_4 = (L_4, S_4)$.

koördinaatvorm gegee deur

$$\{(0, 0), (1, 7), (2, 4), (3, 1), (4, 6), (5, 3), (6, 5), (7, 2)\},$$

terwyl 'n voorbeeld van 'n universaal wat met die simbool '3' ooreenstem in S_3 hierbo in vetdruk vertoon word, en in koördinaatvorm gegee word deur

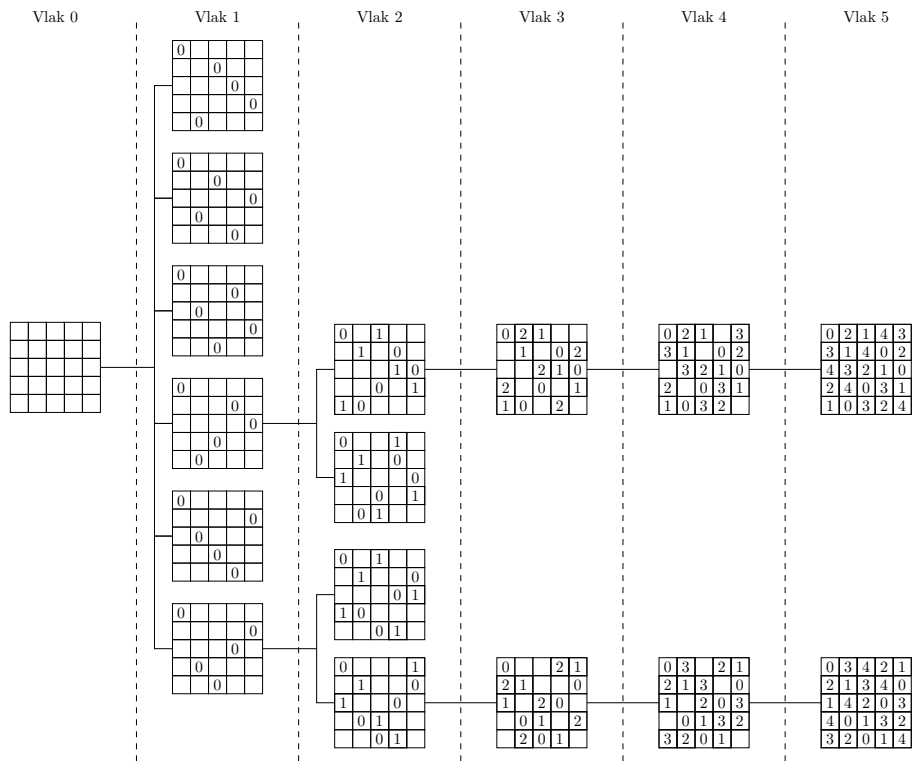
$$\{(0, 2), (1, 4), (2, 0), (3, 7), (4, 1), (5, 6), (6, 5), (7, 3)\}.$$

'n Latynse vierkant is idempotent as die hoofdiagonaal daarvan 'n transversaal in natuurlike volgorde is. 'n Latynse vierkant is in *gereduseerde vorm* as die eerste ry en kolom daarvan die elemente van \mathbb{Z}_n in natuurlike volgorde is. Die simmetriese Latynse vierkant S_1 is dus 'n voorbeeld van 'n vierkant in gereduseerde vorm.

Dit is maklik om aan te toon dat die hoofdiagonaal van 'n SOLV van enige orde of van 'n simmetriese Latynse vierkant van onewe orde noodwendig 'n transversaal daarvan moet wees, en dat enige element van \mathbb{Z}_n 'n ewe getal keer (of glad nie!) op die hoofdiagonaal van 'n simmetriese Latynse vierkant van ewe orde moet verskyn. In die lig van hierdie opmerkings sê ons 'n SOLVSOM $\mathcal{S} = (L, S)$ van orde n is in *standaardvorm* as L idempotent is, en as S idempotent (vir onewe n) of in gereduseerde vorm (vir ewe n) is. Die bostaande SOLVSOM $\mathcal{S}_1 = (L_1, S_1)$ is dus in standaardvorm, terwyl $\mathcal{S}_2 = (L_2, S_2)$ en $\mathcal{S}_3 = (L_3, S_3)$ nie in standaardvorm is nie.

2. Enumerasie van (ry, kolom)-paratopklasse

Soos in die inleiding genoem, volg ons in hierdie artikel twee verskillende benaderings om die (ry, kolom)-paratopklasse van SOLVSOMs van orde $n \leq 10$ te enumereer. In die eerste benadering genereer ons op 'n allesomvattende wyse simmetriese, ortogonale maats vir elke (ry, kolom)-paratopklasverteenvoorder in die SOLV-databasis in [6], terwyl ons in die tweede benadering ortogonale SOLV-maats vir elke (ry, kolom)-paratopklasverteenvoorder van simmetriese Latynse vierkante in die databasis in [13] genereer. In beide hierdie benade-



Figuur 5: Vertak-en-begrens-soekboom vir SOLV-maats vir die enigste simmetriese Latynse vierkant van orde 5 (tot op (ry, kolom)-isotopisme na), naamlik S_4 . Die boom word op Vlakke 1 en 2 begrens waar orthogonaliteit tussen die SOLV-maat en S_4 vernietig word. Twee SOLV-maats word uiteindelik gevind, maar hierdie maats is transponeerte van mekaar, wat weereens lei na die enumerasie van een (ry, kolom)-paratopklas van SOLVSOMs van orde 5, met klasverteenvoordiger $\mathcal{S}_4 = (L_4, S_4)$.

rings genereer ons slegs (ry, kolom)-paratopklasverteenvoordigers (L, S) van SOLVSOMs in standaardvorm deur gebruikmaking van 'n soekboom met terugkering (Eng: *backtracking*). Op vlak $i + 1$ van die soekboom vertak ons op die insluiting van alle moontlike universele wat met die simbool $i \in \mathbb{Z}_n$ in 'n gedeeltelik-voltooide simmetriese Latynse vierkant S (in die eerste benadering) of SOLV L (in die tweede benadering) ooreenstem, met dien verstande dat geen van die volgende eienskappe vernietig word nie:

- die simmetrie van S (in die eerste benadering)
- die idempotensie (in die geval van onewe n) of gereduseerde vorm (in die geval van ewe n) van S (in die eerste benadering)
- die self-ortogonaliteit en idempotensie van L (in die tweede benadering) en
- die ortogonaliteit van L en S (in beide benaderings).

Die wortel van die soekboom is 'n leë $n \times n$ vierkant (m.a.w. waarin daar nog geen universele ingesluit is nie). (Ry, kolom)-paratopoptoetsing word laastens op al die simmetriese ortogonale maats toegepas wat vir elke SOLV L in [6] via die eerste benadering gevind word om te verseker dat 'n versameling, $\langle L \rangle$ sê, van paarsgewys-nie-(ry, kolom)-paratope SOLVSOMs

(in standaardvorm) gegeneer word. Soortgelyke (ry, kolom)-paratootoetsing word ook op al die ortogonale SOLV-maats toegepas wat vir elke simmetriese Latynse vierkant S in [13] via die tweede benadering gevind is om te verseker dat 'n versameling, $\langle S \rangle$ sê, van paarsgewyse nie-(ry, kolom)-paratope SOLVSOMs (in standaardvorm) gegeneer word. Indien $\mathcal{L}(n)$ 'n maksimale versameling van paarsgewyse nie-(ry, kolom)- paratope SOLV van orde n is, $\mathcal{M}(n)$ 'n maksimale versameling van paarsgewyse nie-(ry, kolom)-paratope simmetriese Latynse vierkante van orde n is, en as

$$\mathbb{S}(n) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}(n)} \langle L \rangle \quad \text{en} \quad \mathbb{S}'(n) = \bigcup_{S \in \mathcal{M}(n)} \langle S \rangle,$$

dan is beide $\mathbb{S}(n)$ en $\mathbb{S}'(n)$ maksimale versamelings van paarsgewyse nie-(ry, kolom)-paratope SOLVSOMs van orde n in standaardvorm wat op twee onafhanklike maniere gegeneer is. Ons verifieer dat $|\mathbb{S}(n)| = |\mathbb{S}'(n)|$ vir alle $4 \leq n \leq 10$.

Die eerste van hierdie soekbenaderings word in Figuur 4 geïllustreer deur ortogonale simmetriese maats vir die SOLV

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

van orde 5 te soek, terwyl die tweede soekbenadering in Figuur 5 geïllustreer word deur ortogonale SOLV-maats vir die simmetriese Latynse vierkant

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

van orde 5 te soek. Beide hierdie soekbenaderings is in C++ op 'n Intel(R) Core(TM) 2 Duo verwerker met 3.2 GB geheue geïmplementeer. Ons beskryf die resultate wat gedurende hierdie soekbenaderings verkry is, in die onderstaande afdelings in meer besonderhede vir die gevalle waar n onderskeidelik onewe en ewe is.

2.1 (Ry, kolom)-paratopklasse van onewe orde

Ons begin hierdie afdeling deur 'n nuttige eienskap van idempotente Latynse vierkante daar te stel.

Stelling 1 *As twee idempotente Latynse vierkante (ry, kolom)-paratope is, is hul transponent-isomorf.*

Bewys: Gestel L en L' is twee idempotente, (ry, kolom)-paratope Latynse vierkante. Dan is $L(i, i) = L'(i, i) = i$ vir alle $i \in \mathbb{Z}_n$, en daar bestaan 'n (ry, kolom)-paratopisme $(p, q, t) \in S_n^2 \times S_2$ wat L op L' afbeeld. Gevolglik impliseer $L(i, j) = k$ dat $L'(p(i), p(j)) = q(k)$ of $L'(p(j), p(i)) = q(k)$ vir alle $i, j \in \mathbb{Z}_n$. Maar dan is $L'(p(i), p(i)) = q(i)$, sodat $p = q$. \square

Dit volg uit die bostaande stelling dat indien twee SOLVSOMs van onewe orde in standaardvorm (ry, kolom)-paratope is, hulle transponent-isomorf is, aangesien die SOLV en die ortogonale, simmetriese maat in 'n SOLVSOM van onewe orde in standaardvorm beide idempotent is.

Beskou die geval waar idempotente, simmetriese ortogonale maats vir 'n SOLV L gegeneer word. Aangesien beide L en sy ortogonale simmetriese maats idempotent is, word 'n transponent-isomorfismetoets volgens Stelling 1 benodig om $\langle L \rangle$ te bepaal. Aangesien al die resulterende SOLVSOMs dieselfde SOLV (naamlik L) bevat, is enige transponent-isomorfisme tussen twee ortogonale simmetriese maats ook 'n transponent-outomorfisme van L . Die transponent-outomorfismegroep van L kan gevolglik gebruik word om te bepaal of twee van die simmetriese ortogonale maats van L transponent-isomorf is. Ons het die metode wat in [8] beskryf word, gebruik om die transponent-outomorfismegroep van 'n SOLV via McKay se program nauty te bepaal. Hierdie metode berus op 'n vroeër metode vir die bepaling van isotoopgroepe van Latynse vierkante, soos in [15] beskryf.

In die geval waar idempotente, ortogonale SOLV-maats vir 'n simmetriese Latynse vierkant S gegeneer word, span ons 'n soortgelyke metode van (ry, kolom)-paratootoetsing in. Weereens bevat elke SOLVSOM wat so gegeneer word dieselfde simmetriese vierkant S en gevolglik gebruik ons die transponent-outomorfismegroep van S vir transponent-isomorfismetoetsing (soos bo beskryf). 'n Metode vir die bepaling van die transponent-outomorfismegroep van 'n simmetriese Latynse vierkant kan maklik uit die bogenoemde metodes vir die berekening van die transponent-outomorfismegroep van 'n SOLV in [8, 15] afgelei word.

Alhoewel (ry, kolom)-paratooklasverteenvoerders van (idempotente) SOLV in [6] beskikbaar is, is geen sulke klasverteenvoerders vir simmetriese Latynse vierkante van onewe orde in die literatuur beskikbaar nie. Daar word egter 'n soekmetode vir die bepaling van (ry, kolom)-paratooklasverteenvoerders van (idempotente) SOLV in [7] beskryf. Ons het hierdie tegniek aangepas deur die toets vir self-ortogonaliteit te vervang met 'n toets vir simmetrie, en dit toegepas om die getalle (ry, kolom)-paratooklasse van simmetriese Latynse vierkante van ordes $n = 5, 7, 9$ te bepaal. Hierdie resultate word in Tabel 3 getoon.

n	5	7	9
(Ry, kolom)-paratooklasse	1	7	3 460

Tabel 3: Die getal (ry, kolom)-paratooklasse van simmetriese Latynse vierkante van onewe orde.

Onder die sewe idempotente, simmetriese Latynse vierkante van orde 7 laat slegs een vierkant ortogonale SOLV-maats toe, terwyl slegs agt van die 3460 idempotente, simmetriese Latynse vierkante van orde 9 ortogonale SOLV-maats toelaat. Hierdie nege idempotente, simmetriese Latynse vierkante, tesame met die enkele een van orde 5, word in die aanhangsel aan die einde van hierdie artikel gelys. Die finale enumerasie-resultate vir die (ry, kolom)-paratooklasse van SOLVSOMs van onewe orde word in Tabel 4 getoon.

n	5	7	9
(Ry, kolom)-paratooklasse van SOLVSOMs	1	2	26

Tabel 4: Die getal (ry, kolom)-paratooklasse van SOLVSOMs van onewe orde.

2.2 (Ry, kolom)-paratopklasse van ewe orde

Beskou vervolgens die probleem om te toets of twee SOLVSOMs $\mathcal{S} = (L, S)$ en $\mathcal{S}' = (L', S')$ van ewe orde in standaardvorm (ry, kolom)-paratope is, m.a.w. om te bepaal of daar 'n (ry, kolom)-paratopisme $\alpha = (p, \ell, s, t)$ is waarvoor $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^\alpha$. Aangesien L en L' idempotent is, volg dit uit Stelling 1 dat $p = \ell$, en daarom moet daar bepaal word of 'n permutasie s gevind kan word sodat, wanneer p op die rye en kolomme en s op die simboolversameling van S toegepas word, die vierkant S' verkry word. Laat S'' die simmetriese Latynse vierkant wees wat verkry word deur die permutasie p op die rye en kolomme van S toe te pas. As r'' en r' die permutasies is wat die identiteitspermutasie op die eerste rye van S'' en S' onderskeidelik afbeeld, dan geld duidelik dat $sr'' = r'$. As s dus vir S'' op S' afbeeld, dan is \mathcal{S} en \mathcal{S}' (ry, kolom)-paratope; anders is hulle nie (ry, kolom)-paratope nie.

In die enumerasiebenadering waar simmetriese ortogonale maats vir 'n enkele SOLV gegeneer word (m.a.w. waar $L = L'$ in die bogenoemde bespreking), kan die bostaande tegniek gebruik word om die transponent-outomorfismegroep van L te bereken. In die benadering waar ortogonale SOLV-maats vir 'n enkele simmetriese Latynse vierkant gegeneer word, kan die ry-kolom permutasies in die (ry, kolom)-outoparatopismegroep van S gebruik word om te toets of the SOLV-maats transponent-isomorf is (aangesien hulle idempotent is).

'n Een-faktor van 'n volledige, genommerde grafiek K_{2n} is 'n versameling van n punt-disjunkte deelgrafieke van K_{2n} , elk isomorf aan K_2 . 'n Een-faktorisasie van K_{2n} is 'n versameling van $2n - 1$ lyn-disjunkte een-faktore van K_{2n} . Gestel $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_{2n-1}\}$ is 'n een-faktorisasie van 'n genommerde, volledige grafiek K_{2n} , waar $F_k = \{(f_{k\ell 1}, f_{k\ell 2}) \mid f_{k\ell 1}, f_{k\ell 2} \in V(K_{2n}), 1 \leq \ell \leq n\}$ 'n een-faktor van K_{2n} is, vir alle $k = 1, \dots, 2n - 1$. Dan is \mathcal{F} ekwivalent aan 'n unipotente, simmetriese Latynse vierkant L van orde $2n$ in gereduseerde vorm, gedefinieer deur

$$L(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{as } i = j, \\ k & \text{as en slegs as } (i, j) \in F_k. \end{cases}$$

Trouens, die simbole wat in die een-faktore voorkom tesame met die simbool wat op die hoofdiagonaal van L gebruik word, kan op $(2n)!$ verskillende maniere gekies word. Hierdie keuses lei na $(2n)!$ verskillende unipotente, Latynse vierkante, waarvan slegs een in gereduseerde vorm is. As 'n simmetriese Latynse vierkant L' uit L verkry kan word deur die rolle van die simbole in L te permuteer, volg dit dus dat L en L' dieselfde een-faktorisasie verteenwoordig. Dit is verder maklik om te sien dat 'n een-faktorisasie isomorf aan \mathcal{F} verkry word deur 'n permutasie gelyktydig op die rye en kolomme van L toe te pas. As twee unipotente, simmetriese Latynse vierkante van orde $2n$ (ry, kolom)-paratope is, volg dit dus dat die twee ooreenstemmende een-faktorisasies van K_{2n} isomorf is.

Let op dat 'n een-faktorisasie van K_{2n} ook ooreenstem met 'n simmetriese Latynse vierkant van (onewe) orde $2n - 1$ (sien, byvoorbeeld, Wallis [17, bl. 211]). Hierdie ooreenstemming kan egter nie in die huidige konteks uitgebuit word nie, aangesien dit maklik aangetoon kan word dat 'n isomorfisme van 'n een-faktorisasie van K_{2n} nie noodwendig ooreenstem met 'n (ry, kolom)-paratopisme van die gepaardgaande simmetriese Latynse vierkant van orde $2n - 1$ nie. Met ander woorde, as twee simmetriese Latynse vierkante van orde $2n - 1$ (ry, kolom)-paratope is, volg dit nie noodwendig dat die twee ooreenstemmende een-faktorisasies van K_{2n} isomorf is nie, en omgekeerd.

	$2n$	4	6	8	10
Isomorfismeklasse / (Ry, kolom)-paratooptklasse		1	1	6	396

Tabel 5: Die getal isomorfismeklasse van een-faktorisasies van die volledige grafiek K_{2n} , oftewel die getal (ry, kolom)-paratooptklasse van simmetriese Latynse vierkante van orde $2n$.

Maksimale versamelings van paarsgewys nie-isomorfe een-faktorisasies van volledige grafieke van ordes 4, 6, 8 en 10 is in [13] beskikbaar; die kardinaalgetalle van hierdie versamelings word in Tabel 5 getoon. Volgens die bostaande bespreking lewer hierdie databasis dus ook maksimale versamelings van (ry, kolom)-paratooptklasverteenvoerders van unipotente, simmetriese Latynse vierkante van hierdie ordes in gereduseerde vorm. Uit hierdie simmetriese Latynse vierkante kan daar slegs unipotente SOLVSOMs gegenereer word, maar sulke SOLVSOMs is op sigself interessant, aangesien 'n SOLVSOM slegs gebruik kan word om 'n gade-vermydende gemengde-dubbels rondomtalie-tennisstoernooi te skeduleer indien dit unipotent is, soos in die inleiding beskryf. Gevolglik is die getal (ry, kolom)-paratooptklasse van unipotente SOLVSOMs van orde $2n$ ook die getal struktureel-verskillende maniere waarop 'n gade-vermydende gemengde-dubbels rondomtalie-tennisstoernooi vir $2n$ getroude pare geskeduleer kan word, en hierdie getalle word in Tabel 6 getoon. Deur die (ry, kolom)-paratooptklasverteenvoerders van SOLVe in [6] te gebruik om unipotente SOLVSOMs van ordes 4, 8 en 10 op 'n onafhanklike, alternatiewe wyse te genereer, kon ons die resultate in Tabel 6 valideer. Ons kon op laasgenoemde wyse ook die (ry, kolom)-paratooptklasse van *alle* SOLVSOMs (m.a.w. unipotent, en nie-unipotent) enumereer, en die resultate word in Tabel 6 getoon.

	n	4	6	8	10
(Ry, kolom)-paratooptklasse van unipotente SOLVSOMs		1	0	7	0
(Ry, kolom)-paratooptklasse van alle SOLVSOMs		1	0	32	0

Tabel 6: Die getal (ry, kolom)-paratooptklasse van SOLVSOMs van ewe orde.

Daar is geen nie-unipotente SOLVSOMs van orde 4 nie, hoegenaamd geen SOLVSOMs van orde 6 nie, maar wel drie tipes nie-unipotente SOLVSOMs van orde 8. Om hierdie tipes SOLVSOMs te klassifiseer, gebruik ons die *diagonaal-tipe* notasie $1^{d_1}2^{d_2}\dots n^{d_n}$ om aan te dui dat 'n simmetriese Latynse vierkant d_i simbole bevat wat $i \in \{1, \dots, n\}$ keer op die hoofdiagonaal daarvan voorkom, waar ons per konvensie 'n faktor van die vorm i^{d_i} weglaat indien $d_i = 0$. 'n Idempotente, simmetriese Latynse vierkant van orde n het byvoorbeeld diagonaal-tipe 1^n , terwyl 'n unipotente, simmetriese Latynse vierkant van orde n diagonaal-tipe n^1 het.

Van die vier SOLVe van orde 8 laat slegs twee ortogonale simmetriese maats toe, naamlik L_1 in §1 en

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & 6 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 4 & 7 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Uit die SOLV L_1 kan daar twee unipotente SOLVSOMs gegenereer word, asook ses SOLVSOMs waarvan die simmetriese maat diagonaal-tipe 2^4 het, vier SOLVSOMs waarvan die simmetriese maat diagonaal-tipe 2^24^1 het, en twee SOLVSOMs waarvan die simmetriese maat

diagonaal tipe 4^2 het. Uit die SOLV L_4 kan daar vyf unipotente SOLVSOMs gegeneer word, asook dertien SOLVSOMs waarvan die simmetriese maat diagonaal tipe 4^2 het. Hierdie SOLVSOMs word in die aanhangsel aan die einde van die artikel gelys.

Ons het die niebestaan van SOLVSOMs van orde 10 onafhanklik geverifieer deur gebruik te maak van die bekende feit [10, Opmerking 1.35] dat 'n Latynse vierkant van orde n 'n ortogonale maat toelaat as en slegs as die vierkant n disjunkte transversale bevat. Om 'n ortogonale maat met sy transponent te deel, moet 'n Latynse vierkant verder n disjunkte transversale bevat wat ook transversale in die transponent is. Ons het elkeen van die 121 642 (ry, kolom)-paratopklasverteenvoerders van SOLVe van orde 10 wat in [7] ge-enumerer is, ondersoek en gevind dat 119 288 van hierdie SOLVe minder as 10 transversale altesaam met hul transponente deel. In die oorblywende gevalle (waar die SOLVe en hul transponente 10 of meer transversale deel) het ons in 2 350 gevalle gevind dat daar sommige inskrywings in die SOLV is wat in geen van die transversale voorkom nie. Deur middel van hierdie eliminasië-proses het ons dus gevind dat, behalwe moontlik vir die vier SOLVe

$$\begin{bmatrix} 0581943672 \\ 9160825437 \\ 1027538964 \\ 4903761825 \\ 7316482590 \\ 3879054216 \\ 5792306148 \\ 8234690751 \\ 2645179083 \\ 6458217309 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0865792143 \\ 7198035462 \\ 1027943658 \\ 4503861927 \\ 2630478591 \\ 8719654230 \\ 5982106374 \\ 9254380716 \\ 3476219085 \\ 6341527809 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0569328417 \\ 9174082356 \\ 8025971634 \\ 1703849265 \\ 6980417523 \\ 4218653970 \\ 7342506198 \\ 5896230741 \\ 3657194082 \\ 2431765809 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 0961842357 \\ 3189574620 \\ 1027689534 \\ 4703291865 \\ 7630415298 \\ 8296053471 \\ 5348706912 \\ 2815960743 \\ 9452137086 \\ 6574328109 \end{bmatrix},$$

geen van die 121 642 (ry, kolom)-paratopklasverteenvoerders van SOLVe van orde 10 in SOLVSOMs kan voorkom nie. Die eerste van die bostaande SOLVe van orde 10 deel byvoorbeeld 19 transversale met sy transponent en alhoewel elkeen van die inskrywings van die SOLV in minstens een van hierdie transversale voorkom, kom die inskrywing $(0, 1)$ is slegs een transversaal voor, naamlik

$$\{(0, 1), (1, 0), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 5), (7, 9), (8, 8), (9, 7)\}.$$

Die inskrywing $(1, 2)$ kom ook net in een transversaal voor, naamlik

$$\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}.$$

Beide van hierdie transversale bevat egter die inskrywing $(3, 8)$, en daarom kan hulle nie saam gebruik word om 'n Latynse vierkant op te bou nie. Daar kan op 'n soortgelyke wyse aangetoon word dat die ander drie bostaande SOLVe van orde 10 ook nie gemeenskaplike ortogonale maats met hulle transponente deel nie.

3. Ander klasse SOLVSOMs

Ons het in [8] die getal transponent-isomorfismeklasse binne 'n enkele (ry, kolom)-paratopklas van SOLVe deur middel van 'n effens aangepaste weergawe van 'n stelling van McKay *et al.* [15] bepaal. Ons moes die oorspronklike stelling aanpas, omdat dit oorspronklik in [15] vir Latynse vierkante in die algemeen geformuleer is, en nie net vir SOLVe nie. Ons gebruik hier dieselfde stelling, maar ons pas slegs die formulering daarvan aan - nie ook die bewys

daarvan nie - om in plaas van die oorspronklike SOLVe in [8] nou klasse van SOLVSOMs te tel, aangesien die aanpassing³ in die bewys gering en duidelik is uit die konteks van die bewys van Stelling 4.1 in [8].

Stelling 2 Daar is

$$\sum_{\alpha \in A'(\mathcal{S})} \frac{\psi(\alpha)^2}{|A(\mathcal{S})|} \quad (2)$$

verskillende transponent-isomorfismeklasse van SOLVSOMs in die (ry, kolom)-paratopklas van enige SOLVSOM \mathcal{S} van orde n , waar $A(\mathcal{S})$ die versameling van alle (ry, kolom)-outoparatopismes van \mathcal{S} is, waar $A'(\mathcal{S})$ die versameling van alle (ry, kolom)-outoparatopismes $\alpha = (p, \ell, s, t)$ van \mathcal{S} is waarin p , ℓ en s almal van dieselfde tipe⁴ (a_1, a_2, \dots, a_n) is, en waar

$$\psi(\alpha) = \prod_{i=1}^n a_i! i^{a_i}.$$

Om die totale getal transponent-isomorfismeklasse van SOLVSOMs van orde n te vind, sommeer ons die hoeveelheid in (2) oor alle elemente van die versameling klasverteenvoordigers (een uit elke (ry, kolom)-paratopklas van orde n), $\mathbb{I}(n)$ (sê), en vind ons

$$\sum_{\mathcal{S} \in \mathbb{I}(n)} \frac{1}{|A(\mathcal{S})|} \sum_{\alpha \in A'(\mathcal{S})} \psi(\alpha)^2.$$

Die transponent-otomorfismegroep van die SOLV L word gebruik om die (ry, kolom)-outoparatopismegroep van 'n SOLVSOM $\mathcal{S} = (L, S)$ te bereken. Meer spesifiek, daardie deelgroep van die eersgenoemde groep wat vir S vasmaak, is die (ry, kolom)-outoparatopismegroep van \mathcal{S} .

Aangesien (ry, kolom)-paratopklasse van SOLVSOMs van orde n ooreenstem met die siklusse (Eng: *orbits*) van die groep $S_n^2 \times S_2$, kan die getal verskillende SOLVSOMs van orde n deur middel van 'n bekende stelling (Eng: *orbit stabiliser theorem*) bepaal word - sien, byvoorbeeld, [12, Stelling 2.16]. Volgens hierdie stelling is die grootte van 'n siklus van hierdie groep die groepgrootte gedeel deur die grootte van die outoparatopgroep van die betrokke SOLVSOM. Daarom word die getal verskillende SOLVSOMs in die (ry, kolom)-paratopklas van 'n SOLVSOM \mathcal{S} gegee deur $2(n!)^3/|A(\mathcal{S})|$. Om die totale getal verskillende SOLVSOMs van orde n te bepaal, sommeer ons bloot hierdie hoeveelheid oor alle $\mathcal{S} \in \mathbb{I}(n)$.

Die getal SOLVSOMs van orde n in standaardvorm kan laastens bereken word deur op te let dat die totale getal verskillende SOLVSOMs van orde n maar net $(n!)^2$ keer die getal SOLVSOMs van orde n in standaardvorm is. Hierdie opmerking herinner aan die bekende resultaat dat die getal verskillende Latynse vierkante van orde n bloot $n!(n-1)!$ keer die getal Latynse vierkante van orde n in standaardvorm is.

³Die enigste verskil is dat daar in 'n transponent-isomorfisme vir 'n SOLVSOM vereis word dat drie permutasies van die simbole in \mathbb{Z}_n gelyk moet wees, terwyl die soortgelyke vereiste vir SOLVe is dat slegs twee permutasies gelyk moet wees.

⁴'n Permutasie p is van tipe (a_1, a_2, \dots, a_n) indien dit a_i siklusse van lengte $i \in \{1, \dots, n\}$ het.

n	Verskillende SOLVSOMs	Standaard SOLVSOMs	Transponent-isomorfisme klasse van SOLVSOMs	(Ry, kolom)-paratooop klasse van SOLVSOMs
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	1 152	2	31	1
5	172 800	12	749	1
6	0	0	0	0
7	12 192 768 000	480	1 210 622	2
8	608 662 978 560 000	374 400	7 547 904 042	32
9	464 573 723 443 200 000	3 528 000	640 121 719 688	26
10	0	0	0	0
Sloane	#A166490	#A166489	#A166488	#A166487

Tabel 7: Enumerasie van verskeie ekwivalensieklasse van SOLVSOMs van ordes $4 \leq n \leq 10$. Die laaste ry in die tabel bevat die rynnimmers in Sloane se *Online Encyclopedia of Integer Sequences* [16] wat met die kolomme van die tabel ooreenstem.

Die getal verskillende SOLVSOMs, SOLVSOMs in standaardvorm en transponent-isomorfismeklasse van SOLVSOMs word tesame met die getal (ry, kolom)-paratooopklasse van SOLVSOMs (soos in §4 bepaal) vir ordes $2 \leq n \leq 10$ in Tabel 7 saamgevat:

4. Slot

In die voorafgaande afdelings het ons die (ry, kolom)-paratooopklasse van SOLVSOMs, die transponent-isomorfismeklasse van SOLVSOMs, verskillende SOLVSOMs en SOLVSOMs in standaardvorm van ordes $4 \leq n \leq 10$ getel. Die belangrikste resultaat wat uit hierdie enumerasieproses volg, word in die volgende stelling saamgevat:

Stelling 3 *Daar bestaan geen SOLVSOM van orde 10 nie.*

Hierdie stelling lewer 'n uitspraak oor die voorlaaste onsekere geval in die 34 jaar-oue oop bestaansprobleem vir SOLVSOMs, soos in Tabel 2 uiteengesit. Dus kan ons Stelling 5.16 in die gesaghebbende bron [10] soos volg bywerk:

Gevolgtrekking 1 *Daar bestaan geen SOLVSOM van orde $n \in \{2, 3, 6, 10\}$ nie, maar daar bestaan wel SOLVSOMs van orde n vir enige ander heelgetal $n > 1$, met die moontlike uitsondering van $n = 14$.*

Ons het ook onmiddellik die volgende gevolgtrekking uit Stelling 3.

Gevolgtrekking 2 *Geen gade-vermydende gemengde-dubbels rondomtalie-tennistoernooi kan vir tien getroude pare geskeduleer word nie.*

In [9] het ons, as gevolg van 'n sterk voorgevoel ten opsigte van die negatiewe bestaansresultaat van Gevolgtrekking 2, reeds voorgestel dat die streng vereistes vir 'n gade-vermydende gemengde-dubbels rondomtalie-tennistotoernooi (soos in die inleiding beskryf) effens verslap moet word om voorsiening te maak vir die skedulering van 'n effens sub-optimale toernooi vir tien getroude pare, en het ons voorts daadwerklike voorstelle te maak vir die skedulering van wedstryde in rondtes vir 'n effens verslakte weergawe van so 'n toernooi. In die lig van Gevolgtrekking 2 blyk dit dat hierdie voorstelle ten opsigte van verslapping geregverdig was.

5. Moontlike verdere werk

Die natuurlike volgende stap in die enumerasieproses wat in hierdie artikel gedokumenteer is, is om die telproses uit te brei na SOLVSOMs van orde $n = 11$. Die metodes wat in die voorafgaande afdelings beskryf is, kan egter nie sonder meer gebruik word om die onderskeie ekwivalensieklasse van SOLVSOMs van orde 11 te tel nie, aangesien die betrokke klasse nog nie vir SOLVe of vir simmetriese Latynse vierkante van orde 11 ge enumereer is nie. Ons het in [7] getoon dat dit nie moontlik sal wees om die relevante klasse van SOLVe van orde 11 met die huidige rekenegnologie binne 'n realistiese tyd te bereken nie. Ons het ook gepoog om ekwivalensieklasse van simmetriese Latynse vierkante van orde 11 te tel, maar het na 1492 sekondes se berekeningstyd (waartydens ons 17938 vierkante gevind het!) bepaal dat ons minder as 0.01% van die soekboom kon deurstap. Daarom verwag ons ook nie dat klasse simmetriese Latynse vierkante van orde 11 binnekort met die huidige enumerasieproses en verwerkingspoed getel sal word nie.

McKay *et al.* [15] het trouens voorgestel dat SOLVSOMs van groter orde gegenerer behoort te word deur die SOLV en die ortogonale simmetriese maat gelyktydig in die soekboom op te bou, eerder as om later ortogonale simmetriese maats vir alle voorafbepaalde (ry, kolom)-paratopklasverteenvoerders van SOLVe te probeer vind, of andersom. Ons het egter nog nie die lewensvatbaarheid van hierdie voorstel getoets nie.

Dankbetuigings

Die Suid-Afrikaanse Nasionale Navorsingstigting het die navorsing wat hier gerapporteer word, onder toekennings 70593 en 77248 befonds.

Verwysings

- [1] R.J.R. Abel, F.E. Bennet, H. Zhang, en L. Zhu. A few more incomplete self-orthogonal Latin squares and related designs. *Australas. J. Combin.*, 21:85–94, 2000.
- [2] L.D. Andersen. *Factorisation of graphs*, pages 740–755. CRC Press, Boca Raton, 2 uitgawe, 2007.

- [3] F.E. Bennet en L. Zhu. Further results on the existence of HSOLSSOM(h^n). *Australas. J. Combin.*, 14:207–220, 1996.
- [4] F.E. Bennet en L. Zhu. The spectrum of HSOLSSOM(h^n) where h is even. *Discrete Math.*, 158:11–25, 1996.
- [5] R.K. Brayton, D. Coppersmith, en A.J. Hoffman. Self-orthogonal Latin squares of all orders. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80(1):116–118, 1974.
- [6] A.P. Burger, M.P. Kidd, en J.H. van Vuuren. A repository of self-orthogonal Latin squares. <http://www.vuuren.co.za/> → Repositories.
- [7] A.P. Burger, M.P. Kidd, en J.H. Van Vuuren. Enumerasie van self-ortogonale latynse vierkante van orde 10. *LitNet Akademies (Natuurwetenskappe)*, 7(3):1–22, 2010.
- [8] A.P. Burger, M.P. Kidd, en J.H. van Vuuren. Enumeration of isomorphism classes of self-orthogonal Latin squares. *Ars Combin.*, 97:143–152, 2010.
- [9] A.P. Burger en J.H. van Vuuren. Skedulering van gade-vermydende gemengde-dubbels rondomtalie-tennisstoernooie. *Die Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie*, 28(1):35–63, 2009.
- [10] C.J. Colbourn en J.H. Dinitz. *The CRC handbook of combinatorial designs*. CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [11] G.P. Graham en C.E. Roberts. Enumeration and isomorphic classification of self-orthogonal Latin squares. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 59:101–118, 2006.
- [12] D.F. Holt. *Handbook of computational group theory*. CRC Press, Boca Raton, 2005.
- [13] P. Kaski en P.R.J. Östergård. *Classification algorithms for codes and designs*. Springer, Berlin, 2006.
- [14] C.C. Lindner, R.C. Mullin, en D.R. Stinson. On the spectrum of resolvable orthogonal arrays invariant under the Klein group K_4 . *Aequationes Math.*, 26:176–183, 1983.
- [15] B.D. McKay, A. Meynert, en W. Myrvold. Small Latin squares, quasigroups and loops. *J. Combin. Des.*, 15:98–119, 2007.
- [16] N.J.A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. <http://oeis.org>.
- [17] W.D. Wallis. *Combinatorial designs*. Marcel Dekker, Inc, New York (NY), 1988.
- [18] S.P. Wang. *On self-orthogonal Latin squares and partial transversals of Latin squares*. PhD-proefskrif, Ohio State University, Columbus, 1978.
- [19] L. Zhu. A few more self-orthogonal Latin squares with symmetric orthogonal mates. *Congr. Numer.*, 42:313–320, 1984.

Aanhangsel

In hierdie aanhangsel verskaf ons volledige lyste van (ry, kolom)-paratopklasverteenvoordigers van SOLVSOMs van ordes $4 \leq n \leq 9$. Ons gee ook (1) die getal nie-(ry, kolom)-paratope simmetriese Latynse vierkante wat ortogonaal is aan elke SOLV (ry, kolom)-paratopklasverteenvoordiger en (2) die getal nie-(ry, kolom)-paratope SOLVe ortogonaal aan elke (ry, kolom)-paratopklasverteenvoordiger van simmetriese Latynse vierkante.

Daar word in die onderstaande na SOLVe in dieselfde volgorde verwys as waarin hulle in die databasis in [6] verskyn. Vir $n = 5$ is daar slegs een SOLV (tot op (ry, kolom)-paratopisme na), en slegs een simmetriese maat is (tot op (ry, kolom)-paratopisme na) gevind wat ortogonaal is aan hierdie SOLV. Vir $n = 7$ is daar vier SOLVe, en slegs een simmetriese maat is vir die eerste en laaste van hierdie SOLVe gevind; geen simmetriese maat is vir die tweede en derde SOLVe gevind nie. Vir $n = 8$ is daar ook vier SOLVe; veertien simmetriese maats is (tot op (ry, kolom)-paratopisme na) vir die tweede van hierdie SOLVe gevind, terwyl agtien simmetriese maats (tot op (ry, kolom)-paratopisme na) vir die laaste van hierdie SOLVe gevind is (geen simmetriese maats is vir die eerste of derde SOLVe gevind nie). Vir $n = 9$ het ons slegs een simmetriese maat vir die k^{de} SOLV gevind, waar $k \in \{38, 68, 73, 86, 88, 92, 101, 102, 133, 135, 137, 139, 140, 141, 144, 155, 158, 163, 165, 169, 171, 173\}$, en twee nie-(ry, kolom)-paratope simmetriese maats vir die 172^{ste} en 175^{ste} SOLV in die databasis.

Daar is slegs een unipotente, simmetriese Latynse vierkant van orde 4 tot op (ry, kolom)-paratopisme na, en slegs een SOLV is (tot op (ry, kolom)-paratopisme na) gevind wat ortogonaal is aan hierdie simmetriese vierkant. Vir $n = 8$ is daar ses nie-(ry, kolom)-paratope, unipotente, simmetriese Latynse vierkante, wat ons in dieselfde volgorde oorweeg het as wat hulle (as een-faktorisasies) in Tabel VII.5.28 in [10, p. 743] voorkom. Vir elkeen van die eerste drie Latynse vierkante is daar twee nie-(ry, kolom)-paratope SOLVe gevind, terwyl slegs een (tot op (ry, kolom)-paratopisme na) vir die vyfde vierkant gevind is. Geen SOLVe is vir die vierde en sesde vierkante gevind nie.

Die onderstaande lys bevat slegs (ry, kolom)-paratopklasverteenvoordigers van idempotente, simmetriese Latynse vierkante van onewe orde wat ortogonale SOLV-maats toelaat. Onder elke vierkant toon ons in vetdruk die getal nie-(ry, kolom)-paratope SOLVe ortogonaal daaraan.

$n = 5$ $n = 7$ $n = 9$

04123	0651243	021436587	021436587	021436587	021437856	021438765	021873456	051237846	081254367
41302	6104532	210573846	210758364	210758364	210684735	210754836	210467583	510478263	810726543
13240	5026314	102867453	102684735	102864735	102758364	102687354	102536847	102683457	102638754
20431	1463025	458301762	476301852	478301256	467301582	476301582	845301762	246301785	276301485
32014	2530461	376048215	358047216	356047812	385046217	358046217	763048215	378046512	523047816
1	4312650	637185024	684175023	684175023	748165023	847165023	376185024	783165024	468175032
3245106	584720631	537820641	537280641	873520641	783520641	458720631	824750631	357480621	
2	845612370	863512470	863512470	536812470	635812470	584612370	465812370	645813270	
	763254108	745263108	745623108	654273108	564273108	637254108	637524108	734562108	
		11	2	1	1	5	3	2	1

Vervolgens lys ons die (ry, kolom)-paratopklasverteenvoordigers van SOLVSOMs in standaardvorm. 'n SOLVSOM word as 'n paar Latynse vierkante langs mekaar gegee — die SOLV

gevolg deur die simmetriese vierkant. Onder elke SOLVSOM gee ons ook in vetdruk die getal standaard SOLVSOMs wat (ry, kolom)-paratop is aan die gegewe SOLVSOM. Hierdie getal kan met $(n!)^2$ vermenigvuldig word om die grootte van die ooreenstemmende (ry, kolom)-paratopklas te bepaal.

 $n = 4$ $n = 5$ $n = 7$

0231 0123	02143 04312	0456123 0231564	0612345 0345612
3102 1032	31402 41023	3160542 2146035	2146530 3164025
1320 2301	43210 30241	1024365 3425601	3025164 4621503
2013 3210	24031 12430	2503614 1653240	4503621 5413260
2	10324 23104	6215430 5062413	5260413 6052431
	12	4632051 6304152	6431052 1206354
		5341206 4510326	1354206 2530146
		240	240

 $n = 8$

07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567
51643270 10472653	51643270 10473652	51643270 14502673	51643270 15402673	51643270 14503672	51643270 14503672
10256734 24051376	10256734 24051376	10256734 25741306	10256734 24761305	10256734 25741306	10256734 25741306
42037651 37506241	42037651 37506241	42037651 30476251	42037651 30675241	42037651 30476251	42037651 30476251
75304126 42160735	75304126 43160725	75304126 42165730	75304126 42156730	75304126 43165720	75304126 43165720
26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014
34715062 65743102	34715062 65742103	34715062 67053142	34715062 67043152	34715062 67052143	34715062 67052143
63521407 73615420	63521407 72615430	63521407 73610425	63521407 73510426	63521407 72610435	63521407 72610435
10 080	10 080	10 080	20 160	10 080	10 080

07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567
51643270 15403672	51643270 15472603	51643270 15473602	51643270 15402673	51643270 15403672	51643270 15403672
10256734 24761305	10256734 24160375	10256734 24160375	10256734 24751306	10256734 24751306	10256734 24751306
42037651 30675241	42037651 37615240	42037651 37615240	42037651 30576241	42037651 30576241	42037651 30576241
75304126 43156720	75304126 42056731	75304126 43056721	75304126 42165730	75304126 43165720	75304126 43165720
26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014
34715062 67042153	34715062 60743152	34715062 60742153	34715062 67043152	34715062 67042153	34715062 67042153
63521407 72510436	63521407 73501426	63521407 72501436	63521407 73610425	63521407 73610425	63521407 72610435
20 160	10 080	10 080	20 160	20 160	20 160

07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	07462315 01234567	06712345 01234567
51643270 15472603	51643270 15473602	51643270 15472603	51643270 15473602	51643270 15473602	51463270 10362754
10256734 24061375	10256734 24061375	10256734 24051376	10256734 24051376	10256734 24051376	60257431 23051476
42037651 37605241	42037651 37605241	42037651 37506241	42037651 37506241	42037651 37506241	72036154 36507142
75304126 42156730	75304126 43156720	75304126 42165730	75304126 43165720	75304126 43165720	15304726 42170635
26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	26170543 56327014	27640513 57416023
34715062 60743152	34715062 60742153	34715062 60743152	34715062 60742153	34715062 60742153	34175062 65743201
63521407 73510426	63521407 72510436	63521407 73610425	63521407 72610435	63521407 72610435	43521607 74625310
20 160	20 160	10 080	10 080	10 080	10 080

06712345 01234567	06712345 01234567	06712345 01234567	06712345 01234567	06712345 01234567	06712345 01234567
51463270 10372654	51463270 10472653	51463270 10472653	51463270 10472653	51463270 10472653	51463270 10462753
60257431 23051476	60257431 24051376	60257431 24061375	60257431 24051376	60257431 24051376	60257431 24051376
72036154 37506142	72036154 37506142	72036154 37605142	72036154 37506241	72036154 37506241	72036154 36547102
15304726 42160735	15304726 42160735	15304726 42150736	15304726 42160735	15304726 42160735	15304726 42170635
27640513 56417023	27640513 56317024	27640513 56317024	27640513 56327014	27640513 56327014	27640513 57316420
34175062 65743201	34175062 65743201	34175062 65743201	34175062 65743102	34175062 65743102	34175062 65703241
43521607 74625310	43521607 73625410	43521607 73526410	43521607 73615420	43521607 73615420	43521607 73625014
10 080	10 080	10 080	1 440	10 080	10 080

06712345 01234567 06712345 01234567 06712345 01234567 06712345 01234567 06712345 01234567
 51463270 10472653 51463270 10472653 51463270 10462753 51463270 10472653 51463270 10472653
 60257431 24051376 60257431 24061375 60257431 24051376 60257431 24051376 60257431 24061375
 72036154 37546102 72036154 37645102 72036154 36547201 72036154 37546201 72036154 37645201
 15304726 42160735 15304726 42150736 15304726 42170635 15304726 42160735 15304726 42150736
 27640513 56317420 27640513 56317420 27640513 57326410 27640513 56327410 27640513 56327410
 34175062 65703241 34175062 65703241 34175062 65703142 34175062 65703142 34175062 65703142
 43521607 73625014 43521607 73526014 43521607 73615024 43521607 73615024 43521607 73516024

10 080 10 080 10 080 10 080 10 080

06712345 01234567 06712345 01234567 06712345 01234567 06712345 01234567 06712345 01234567
 51463270 10463752 51463270 10473652 51463270 10473652 51463270 10472653 51463270 10472653
 60257431 24051376 60257431 24051376 60257431 24061375 60257431 24057316 60257431 24067315
 72036154 36547201 72036154 37546201 72036154 37645201 72036154 37546201 72036154 37645201
 15304726 43170625 15304726 43160725 15304726 43150726 15304726 42760135 15304726 42750136
 27640513 57326410 27640513 56327410 27640513 56327410 27640513 56321470 27640513 56321470
 34175062 65702143 34175062 65702143 34175062 65702143 34175062 65103742 34175062 65103742
 43521607 72615034 43521607 72615034 43521607 72516034 43521607 73615024 43521607 73516024

10 080 10 080 10 080 10 080 10 080

06712345 01234567 06712345 01234567
 51463270 10473652 51463270 10473652
 60257431 24057316 60257431 24067315
 72036154 37546201 72036154 37645201
 15304726 43760125 15304726 43750126
 27640513 56321470 27640513 56321470
 34175062 65102743 34175062 65102743
 43521607 72615034 43521607 72516034

10 080 10 080

$n = 9$

021436785 086723541 021436785 063287154 021436785 034127856 021436785 064827153
 315628407 814567230 310678524 614523087 514680327 318076542 513867420 615034287
 572104863 642078315 532761840 342018765 652078413 482503761 642570813 452108736
 148367250 750386124 846352017 250371846 786324501 105362487 768314052 801376524
 786540321 267841053 758240361 821746530 805743162 270648315 875243106 230741865
 237085146 378615402 174085236 738165402 247165830 763285104 386105247 748615302
 804753612 523104687 483517602 107854623 173802654 857431620 204758631 127583640
 653812074 431250876 265804173 586430271 438251076 546810273 130682574 583260471
 460271538 105432768 607123458 475602318 360517248 621754038 457021368 376452018

362 880 181 440 120 960 181 440

021453786 068574312 021453786 046718235 021453786 065824137 021453786 074268135
 318064527 617430285 316828407 413207856 316287450 614752083 314876250 710432586
 432786105 872651430 472830561 632154087 602718534 542687301 672180543 402853761
 285371064 546312807 604378125 721386504 258376041 876301254 507362814 248316057
 156247830 735148026 768241350 105842763 837642105 258043716 153248067 635147802
 670835241 401285763 187065234 874625310 740865312 427135860 486715302 823675410
 847520613 324807651 853704612 280573641 584130627 103278645 840527631 157084623
 564108372 183026574 540126873 358061472 165024873 380516472 268034175 386501274
 703612458 250763148 235617048 567430128 473501268 731460528 735601428 561720348

362 880 181 440 362 880 362 880

021456783 076581324 021456783 067128435 021456783 064728135 021456783 064728135
 317608245 715836402 314687250 618072543 316287450 615872043 316287450 615872043
 562830417 652704831 502738461 782601354 602738541 452601387 602873541 452601387
 205387164 587310246 658370124 106354287 258370164 786354201 257318064 786354201
 756243801 830142567 867142305 270543816 867142305 270543816 863742105 270543816
 438175026 164025783 743865012 821435760 743865012 821435760 748065312 821435760
 873014652 348257610 285013647 453287601 584013627 103287654 584130627 103287654
 684521370 203468175 130524876 345816072 130524876 348016572 130524876 348016572
 140762538 421673058 476201538 534760128 475601238 537160428 475601238 537160428

90 720 181 440 90 720 45 360

021456783 047168235 021456783 063278145 023156784 067438125 023156784 058461327
 317280546 410853762 315867240 610752834 315687420 618573042 415287360 517630482
 642873150 702431586 682170534 302567481 432870156 782654301 562718403 872154036
 576301824 184326057 867312405 275384016 607328541 456301287 684302517 461378205
 205148367 653247801 208543167 756841203 861743205 375042816 750843126 635742810
 468725031 831675420 734685012 827415360 748265013 834125760 837065241 104825763
 834517602 275084613 543708621 184023657 580412637 103287654 208471635 340287651
 180634275 368502174 150234876 438106572 156034872 240816573 146530872 283016574
 753062418 526710348 476021358 541630728 274501368 521760438 371624058 726503148

120 960**120 960****45 360****45 360**

023156784 056874231 023156784 065724831 023416785 064821357 023416785 034127856
 415863027 518432706 415263807 610437285 315627840 618754032 514683027 318076542
 572618430 682751043 682517430 502861743 562078413 482503761 652178403 482503761
 604372851 847316520 574308261 748316502 701384526 875360214 786324510 105362487
 850247316 735140862 750842316 236148057 876541032 250647183 835740162 270648315
 786035142 421605387 806735142 471685320 480235167 143075826 247065831 763285104
 138724605 270583614 138074625 827503614 138752604 307218645 371802654 857431620
 261480573 304268175 261480573 384052176 654803271 536182470 408251376 546810273
 347501268 163027458 347621058 153270468 247160358 721436508 160537248 621754038

60 480**45 360****60 480****10 080**

023416785 034127856 023416785 061278453 023416785 034127856 023456781 078563412
 514638027 315082764 517823460 610437825 517823460 316078245 315780462 714628305
 862753401 452601387 832671504 102584736 832671504 462503187 632874105 842716530
 781324560 106378245 764358012 245306187 764358012 105382764 784312056 567380124
 657840312 280746531 685140237 738042561 685140237 270846513 206541837 621847053
 370185246 721865403 340785126 874625310 340785126 783265401 870165324 386075241
 248071653 873254610 208537641 487153602 208537641 821754630 158237640 435102687
 136502874 568430172 156204873 523861074 156204873 548610372 541608273 103254876
 405267138 647513028 471062358 356710248 471062358 657431028 467023518 250431768

60 480**181 440****5 040****60 480**

023456781 061237854 023456781 056781234
 415863207 610482735 415863207 517430826
 582617430 102574386 582617430 672854013
 601372854 245308167 601372854 748316502
 750248316 387046521 750248316 835142760
 876035142 724865013 876035142 104625387
 138704625 873150642 138704625 280573641
 264180573 538621470 264180573 321068475
 347521068 456713208 347521068 463207158

181 440**5 040**