

# Dreieckverbände: Lineare und quadratische Darstellungstheorie

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Philosophischen Doktorwürde  
vorgelegt der  
Philosophischen Fakultät II  
der Universität Zürich

von  
MARCEL WOLFGANG WILD  
von Jonschwil SG

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. H. Gross

Zürich 1987  
Zentralstelle der Studentenschaft

**Dreieckverbände: Lineare und  
quadratische Darstellungstheorie\*)**

Inaugural-Dissertation

von

Marcel Wild

von Jonschwil SG

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. H. Gross

\*) in GLS[15] ist ein anderer Titel angegeben

**for Lillian**

# Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

### 1. Dreieckverbände

1.1 Darstellungstheoretische Grundlagen	1
1.2 Verbandstheoretische Grundlagen	5
1.3 Dreieckmatroide	12
1.4 Endliche Dreieckverbände	17
1.5 Artinsche Dreieckverbände	35
1.6 Primeigenschaft, Abspaltbarkeit und Umkehrung von Satz 7	42

### 2. Das Kongruenzproblem in Sesquilinearräumen unendlicher Dimension

2.1 Problemstellung und Formulierung von Hauptsatz 25	48
2.2 Isometrischer Teil des Beweises	54
2.3 Mengentheoretischer Teil des Beweises	72
2.4 Ist $\mathbf{V}(V, E) \simeq \mathbf{V}(V', E)$ für diagonales $E$ eine hinreichende Kongruenzbedingung ?	79
2.5 Die subdirekt irreduziblen Faktoren von $\mathbf{V}_3[a]$ und Konstruktion eines nichtartinschen, distributiven $\mathbf{V}_4(a)$	97

## Literatur

## Symbol- und Schlagwortverzeichnis

## Einleitung

Sei  $(P, \leq)$  eine partiell geordnete Menge und  $E$  ein  $k$ -Vektorraum. Eine monotone Abbildung  $\rho : P \rightarrow L(E) := \{A \subseteq E \mid A \text{ Unterraum}\}$  heisst  $k$ -lineare Darstellung von  $P$ . Zwei lineare Darstellungen  $\rho : P \rightarrow L(E)$  und  $\rho' : P \rightarrow L(E')$  heissen isomorph, falls ein Vektorraumisomorphismus  $\varphi : E \rightarrow E'$  existiert, der die entsprechenden Unterräume aufeinander abbildet, d.h.  $(\forall a \in P) \varphi(\rho a) = \rho' a$ . Die Partialordnung  $(P, \leq)$  ist vom endlichen Darstellungstyp, falls  $P$  bis auf Isomorphie nur endlich viele endlich dimensionale, unzerlegbare Darstellungen besitzt (Def. von "unzerlegbar" auf S.2). Nazarova, Roiter und Gabriel haben alle Partialordnungen vom endlichen Darstellungstyp klassifiziert (für nähere Erläuterungen und Literaturangaben vgl. z.B. Po[23]).

Ist die Partialordnung  $(L, \leq)$  sogar ein Verband ( $L$  für "lattice"), so liegt es nahe, von einer Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  statt bloss Monotonie, Infimumstreue und Supremumstreue zu fordern. Die Darstellungstheorie der Verbände lässt sich leider nicht auf die Darstellungstheorie der Partialordnungen zurückführen; so ist ein Verband  $(L, \leq)$  als Partialordnung i.a. nicht vom endlichen Typ, kann aber als Verband eine "gute Darstellungstheorie" besitzen (z.B.  $L := \text{Fig.8(a)}$ ). Dabei sagen wir, dass ein endlicher (modularer) Verband  $L$  gut ist, falls die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Darstellungen von  $L$  bijektiv den subdirekt irreduziblen Faktoren von  $L$  entsprechen (ausführlichere Motivation in 1.1). Ziel des ersten Kapitels ist die kombinatorische Beschreibung einer Klasse von Verbänden (wir nennen sie "Dreieckverbände"), welche im obigen Sinne gut sind. Der Beweis dieses Hauptsatzes 7 wird in 1.4 erbracht. In 1.5 verallgemeinern wir einige der Ergebnisse auf unendliche Verbände und in 1.6 wird erläutert, weswegen die Dreieckverbände wahrscheinlich schon alle Verbände mit guter Darstellungstheorie ausmachen (Vermutung 23).

Im zweiten Kapitel wird statt linearer Darstellungstheorie "quadratische Darstellungstheorie" betrieben. Wir gehen aus von einem Vektorraum  $E$ , der mit einem "Skalarprodukt" (genauer: Sesquilinearform)  $(, ) : E \times E \rightarrow E$  ausgerüstet ist. Zwei Unterräume  $V, V' \subseteq E$  heissen kongruent in  $E$ , falls es eine Isometrie  $\varphi : E \rightarrow E$  mit  $\varphi(V) = V'$  gibt. " $V, V'$  isometrisch" ist trivialerweise eine notwendige Bedingung für Kongruenz. Bei  $\dim(E) < \infty$  (und  $\text{char}(k) \neq 2$ ) ist sie nach dem Satz von Witt auch hinreichend, jedoch nicht mehr bei  $\dim(E) = \infty$  ! In diesem Fall empfiehlt es sich, die von  $V$  bzw.  $V'$  erzeugten "quadratischen Verbände"  $\mathbf{V}(V) \subseteq L(E)$  bzw.  $\mathbf{V}(V') \subseteq L(E)$  zu betrachten. Man sieht leicht, dass jede Isometrie  $\varphi : E \rightarrow E$  mit  $\varphi(V) = V'$  einen Verbandsisomorphismus  $\eta : \mathbf{V}(V) \rightarrow \mathbf{V}(V')$  induziert (2.1). Wir fragen umgekehrt, ob  $\mathbf{V}(V) \simeq \mathbf{V}(V')$  auch eine hinreichende Bedingung für Kongruenz ist, oder allgemeiner, welche Verbandsisomorphismen  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  ( $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \subseteq L(E)$ ) von einer Isometrie  $\varphi : E \rightarrow E$  induziert sind. Nach Gross[11] ist dies für endliche, distributive  $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$  bei geeignetem  $[E, (, )]$  gewährleistet. Satz 25 – das Hauptergebnis von Kapitel 2 – verallgemeinert dieses Resultat auf Dreieckverbände  $\mathbf{V}$  mit einer gewissen Zusatzbedingung. Gleichzeitig wird die Dimensionsbeschränkung  $\dim(E) \leq \aleph_1$  in G[11] auf  $\dim(E) < (1. \text{ schwache Mahlo-Zahl})$  erhöht, was fast einer Aufhebung gleichkommt (S.79). Entsprechend zerfällt der Beweis von Satz 25 in einen isometrischen Teil 2.2 und einen mengentheoretischen Teil 2.3. Als Anwendung erhält man in 2.4, dass  $\mathbf{V}(V) \simeq \mathbf{V}(V')$  für  $\dim(E) \leq \aleph_3$  tatsächlich eine hinreichende Kongruenzbedingung ist (Satz 37,38). Leider braucht  $\mathbf{V}(V)$  für  $\dim(E) \geq \aleph_5$  kein Dreieckverband mehr zu sein und  $\mathbf{V}(V) \rightarrow \mathbf{V}(V')$  muss nicht von einer Isometrie induziert sein (Satz 43). Bis auf den Fall  $\dim(E) = \aleph_4$  ist somit die Frage der "Kongruenzhinlänglichkeit" von  $\mathbf{V}(V) \simeq \mathbf{V}(V')$  geklärt (der Fall  $\dim(E) = \aleph_4$  ist vermutlich auch zu verneinen; vgl. Bem. vor Satz 43). In 2.5 schliesslich betrachten wir "abstrakte" quadratische Verbände  $\mathbf{V}_m(a)$ : In Satz 46 werden die subdirekt irreduziblen Faktoren des 957-elementigen freien quadratischen Verbandes  $\mathbf{V}_3[a]$  bestimmt und in Satz 47 wird ein distributives  $\mathbf{V}_4(a)$  mit einer unendlich absteigenden Kette konstruiert.

Die Sätze, Lemmata und Korollare sind Kapitel übergreifend von 1 bis 47 durchnummeriert. Nicht vom Autor stammende Ergebnisse sind mit einer Referenzangabe versehen. Es sei noch darauf hingewiesen, dass das Zeichen  $\subset$  im Gegensatz zu  $\subseteq$  stets "echte Inklusion" bedeutet.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Gross meinen Dank aussprechen für sein Interesse an dieser Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge. Ebenso gebührt mein Dank Prof. Dr. Chr. Herrmann (Darmstadt), der im WS 85/86 mit vielen anregenden Diskussionen und dem Hinweis auf Resultate von Poguntke, Wille und Jónsson zum Gelingen von Kapitel 1 beigetragen hat (vgl. auch Lemma 5, Vermutung 23, Satz 47). Herrn Prof. Dr. H. Läuchli (ETH) verdanke ich das mengentheoretische Lemma 36.

Zürich, im Mai 1987

## 1. Dreieckverbände

### 1.1 Darstellungstheoretische Grundlagen

Eine partiell geordnete Menge  $(L, \leq)$  heisst Verband, falls je zwei Elemente  $a, b \in L$  eine kleinste obere Schranke (=Supremum)  $a \vee b$  und eine grösste untere Schranke (=Infimum)  $a \wedge b$  besitzen (welche dann eindeutig bestimmt sind). Eine bezüglich  $\vee$  und  $\wedge$  abgeschlossene Teilmenge  $L_0 \subseteq L$  heisst Unterverband. Eine mit  $\vee$  und  $\wedge$  verträgliche Abbildung  $\pi : L \rightarrow L_0$  ( $L, L_0$  Verbände) heisst (Verbands-)Homomorphismus.  $\pi$  ist ein Isomorphismus ( $L \simeq L_0$ ) bzw. Epimorphismus, falls  $\pi$  bijektiv bzw. surjektiv ist. Ein Verband  $(L, \leq)$  heisst modular, falls gilt

$$(1) \quad (\forall a, b, c \in L) \quad a \leq c \implies (a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c).$$

In der ganzen Arbeit bezeichnet  $k$  stets einen (nicht notwendig kommutativen) Körper. Ist  $E$  ein  $k$ -Vektorraum, so ist  $L(E) := \{A \subseteq E \mid A \text{ Teilraum}\}$  ein modularer Verband bezüglich  $\subseteq$ . Für  $A, B \in L(E)$  ist gerade  $A \vee B = A + B$  und  $A \wedge B = A \cap B$ .

Umgekehrt ist es schwierig zu entscheiden, welche modularen Verbände  $(L, \leq)$  als Unterverbände eines Vektorraumverbandes  $L(E)$  auftreten. Dies motiviert die folgenden Definitionen. Sei  $k$  ein Körper und  $E$  ein  $k$ -Vektorraum. Eine  $k$ -lineare Darstellung (oder  $k$ -Darstellung bzw. Darstellung, falls  $k$  fest) eines modularen Verbandes  $L$  ist ein Homomorphismus  $\rho : L \rightarrow L(E)$ . Zwei  $k$ -Darstellungen  $\rho : L \rightarrow L(E)$  und  $\rho' : L \rightarrow L(E')$  heissen isomorph ( $\rho \sim \rho'$ ), falls ein Vektorraumisomorphismus  $\varphi : E \rightarrow E'$  existiert mit  $\rho' = \varphi \circ \rho$ . Dabei ist  $\varphi : L(E) \rightarrow L(E') : A \mapsto \varphi A$  der von  $\varphi$  induzierte Verbandsisomorphismus. Seien  $\rho_i : L \rightarrow L(E_i)$  ( $i \in I$ )  $k$ -Darstellungen von  $L$ . Dann ist  $\bigoplus \rho_i : L \rightarrow L(\bigoplus E_i) : a \mapsto \bigoplus \{\rho_i a \mid i \in I\}$  offenbar eine  $k$ -Darstellung von  $L$ , die sog. (äussere) direkte Summe der Darstellungen  $\rho_i$  ( $i \in I$ ). Ist umgekehrt  $\rho : L \rightarrow L(E)$  eine Darstellung von  $L$  und ist  $E = \bigoplus \{E_i \mid i \in I\}$  eine Zerlegung, derart

dass

$$(2) \quad (\forall a \in L) \quad \rho a = \bigoplus \{ \rho a \cap E_i \mid i \in I \},$$

so heisst  $E = \bigoplus \{ E_i \mid i \in I \}$  eine Zerlegung von  $\rho$ . Dies ist gerechtfertigt durch folgende Feststellung.

**Satz 1:** (G-P[8],2.3) *Ist  $E = \bigoplus \{ E_i \mid i \in I \}$  Zerlegung der Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$ , so sind die Abbildungen  $\rho_i : L \rightarrow L(E_i) : a \mapsto \rho a \cap E_i$  Darstellungen von  $L$  und es ist  $\rho \sim \bigoplus \rho_i$ .*

Beweis: Sei  $j \in I$  fest und  $a, b \in L$ .  $\rho_j(a \wedge b) = \rho(a \wedge b) \cap E_j = (\rho a \cap \rho b) \cap E_j = (\rho a \cap E_j) \cap (\rho b \cap E_j) = \rho_j a \cap \rho_j b$  und  $\rho_j(a \vee b) = \rho(a \vee b) \cap E_j = (\rho a + \rho b) \cap E_j \stackrel{*}{=} (\rho a \cap E_j) + (\rho b \cap E_j) = \rho_j a + \rho_j b$ . \* folgt aus  $\rho a + \rho b \stackrel{(2)}{=} \bigoplus \{ \rho a \cap E_i \mid i \in I \} + \bigoplus \{ \rho b \cap E_i \mid i \in I \} = \bigoplus \{ (\rho a \cap E_i) + (\rho b \cap E_i) \mid i \in I \} \subseteq \bigoplus \{ (\rho a + \rho b) \cap E_i \mid i \in I \} \stackrel{(2)}{=} \rho a + \rho b$ . Um die zweite Behauptung zu zeigen, sei  $\varphi : \bigoplus E_i \rightarrow E$  durch  $(x_i \mid i \in I) \mapsto \sum x_i$  definiert. Dann ist  $\rho = \varphi \circ (\bigoplus \rho_i)$ , d.h.  $\rho \sim \bigoplus \rho_i$ .  $\square$

Eine Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  heisst zerlegbar, falls eine Zerlegung  $E = E_1 \oplus E_2$  von  $\rho$  mit  $E_1, E_2 \neq (0)$  existiert. Andernfalls heisst  $\rho$  unzerlegbar (ebenso ist für eine Partialordnung  $(P, \leq)$  die Zerlegbarkeit einer Darstellung  $\rho : P \rightarrow L(E)$  definiert; vgl. Einleitung).

Es sei  $L$  modularer Verband mit kleinstem Element  $0$  und grösstem Element  $1$  und  $\rho : L \rightarrow L(E)$  sei eine Darstellung. Ist  $E_1 := \rho 0$ ,  $E_2$  ein Supplement von  $E_1$  in  $\rho 1$  und  $E_3$  ein Supplement von  $E_1 \oplus E_2$  in  $E$ , so ist  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$  eine Zerlegung von  $\rho$ , denn für alle  $a \in L$  ist  $\rho a = (\rho a \cap (E_1 \oplus E_2)) \oplus (\rho a \cap E_3) \stackrel{(1)}{=} (\rho a \cap E_1) \oplus (\rho a \cap E_2) \oplus (\rho a \cap E_3)$ . Da wir in der ganzen Arbeit nur Verbände mit  $0, 1$  betrachten werden und da man  $E_1, E_3$  abspalten kann, vereinbaren wir die

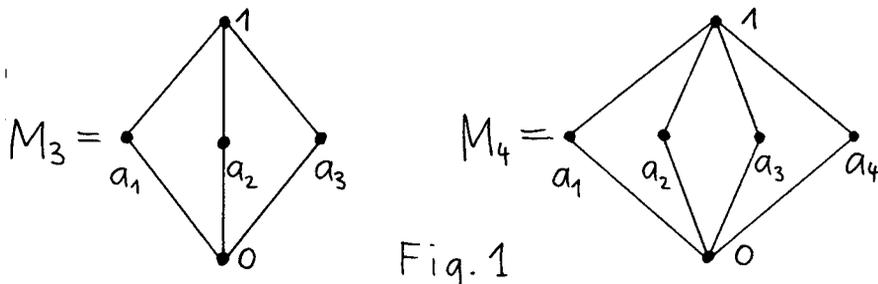
(3) *Konvention:* Unter einer Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  verstehen wir stets eine Darstellung mit  $\rho 0 = (0)$  und  $\rho 1 = E$ .

$\rho : L \rightarrow L(E)$  heisst  $\kappa$ -dimensional, falls  $\dim(E) = \kappa$ . Offenbar ist eine  $\kappa$ -dimensionale, konstante Darstellung  $\rho$  genau dann unzerlegbar, wenn  $\kappa \leq 1$  ist. Um diesen trivialen Fall auszuschliessen, machen wir ferner die

(4) *Konvention: Unter einer unzerlegbaren Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  verstehen wir stets eine nichtkonstante, unzerlegbare Darstellung.*

Jeder endliche, modulare Verband  $L$  hat eine wohlbestimmte Länge  $\delta(L)$  (Def. S.8). Von besonderem Interesse sind die injektiven,  $\delta(L)$ -dimensionalen Darstellungen von  $L$ , welche wir treu nennen.

Wir wollen diese Begriffe anhand der modularen Verbände  $M_3 := \{0, a_1, a_2, a_3, 1\}$  und  $M_4 := \{0, a_1, a_2, a_3, a_4, 1\}$  veranschaulichen (es ist  $\delta(M_3) = \delta(M_4) = 2$ ):



**Satz 2:** ("Folklore")

- (i)  $M_3$  besitzt über jedem Körper  $k$  eine treue  $k$ -Darstellung  $\rho[M_3, k]$ .
- (ii) Alle treuen  $k$ -Darstellungen von  $M_3$  sind zu  $\rho[M_3, k]$  isomorph.
- (iii) Jede unzerlegbare  $k$ -Darstellung von  $M_3$  ist treu.
- (iv) Für  $M_4$  gilt weder (i), (ii) noch (iii).

Beweis: (i).  $\rho 0 = \langle (0, 0) \rangle$ ,  $\rho a_1 = \langle (0, 1) \rangle$ ,  $\rho a_2 = \langle (1, 0) \rangle$ ,  $\rho a_3 = \langle (1, 1) \rangle$ ,  $\rho 1 = k^2$  definiert eine treue Darstellung  $\rho : M_3 \rightarrow L(k^2)$ . Ist  $k^2 = E_1 \oplus E_2$  eine Zerlegung von  $\rho$ , so sind  $\rho_1 : L \rightarrow L(E_1)$  und  $\rho_2 : L \rightarrow L(E_2)$  nicht beide konstant. Sei o.B.d.A.  $\rho_1$  nicht konstant. Da  $M_3$  einfach ist (Def. S.6), ist  $\rho_1$  injektiv, d.h.  $\dim(E_1) = 2$ . Also ist  $\rho$  unzerlegbar (allgemein ist jede treue Darstellung eines einfachen Verbandes

unzerlegbar; vgl. Bem. S.7).

(ii). Seien  $\rho : M_3 \rightarrow L(E) : a_i \mapsto \langle x_i \rangle$  und  $\rho' : L \rightarrow L(E') : a_i \mapsto \langle y_i \rangle$  zwei treue Darstellungen von  $M_3$ . Dann ist  $\{x_1, x_2\}$  eine Basis von  $E$  und  $x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ ). Analog ist  $\{y_1, y_2\}$  Basis von  $E'$  und  $y_3 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$  ( $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ ). Offenbar definiert  $x_i \mapsto \mu_i \lambda_i^{-1} y_i$  ( $i = 1, 2$ ) einen Isomorphismus  $\varphi : E \rightarrow E'$  mit  $\rho' = \bar{\varphi} \circ \rho$ .

(iii). Sei  $\rho : M_3 \rightarrow L(E)$  gegeben mit  $\rho 0 = \langle 0 \rangle$ ,  $\rho 1 = E$  und  $\rho a_i = A_i$  (vgl.(3)). Es sei  $\{x_{1i} \mid i \in I\}$  eine Basis von  $A_1$ . Für alle  $i \in I$  sei  $x_{1i} = x_{2i} + x_{3i} \in A_2 + A_3$ .  $\{x_{2i} \mid i \in I\}$  ist dann eine Basis von  $A_2$ , denn aus  $\sum \lambda_i x_{2i} = 0$  (f.a.  $\lambda_i = 0$ ) folgt  $\sum \lambda_i x_{1i} = \sum \lambda_i (x_{1i} - x_{2i}) = \sum \lambda_i x_{3i} \in A_1 \cap A_3 = \langle 0 \rangle$ , d.h. ( $\forall i \in I$ )  $\lambda_i = 0$ ; ausserdem ist  $A_2 \subseteq (A_1 + A_3) \cap A_2 \subseteq (\langle x_{2i} \mid i \in I \rangle + A_3) \cap A_2 \stackrel{(1)}{=} \langle x_{2i} \mid i \in I \rangle + A_3 \cap A_2 = \langle x_{2i} \mid i \in I \rangle$ . Ebenso ist  $\{x_{3i} \mid i \in I\}$  eine Basis von  $A_3$  und somit ist  $\{x_{2i}, x_{3i} \mid i \in I\}$  eine Basis von  $E$ . Man sieht nun leicht, dass  $E = \bigoplus \{\langle x_{2i}, x_{3i} \rangle \mid i \in I\}$  eine Zerlegung von  $\rho$  ist.

(iv). ad (i): Wegen  $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(0,0)\}| = 3$ , gibt es keine treue  $\mathbb{Z}_2$ -Darstellung von  $M_4$ . ad (ii): Sei  $k$  ein Körper mit  $|k| \geq 4$  und seien  $0, 1, \lambda, \mu \in k$  paarweise verschieden.  $\{x, y\}$  sei Basis eines  $k$ -Vektorraumes  $E$ . Wir definieren zwei treue Darstellungen  $\rho : M_4 \rightarrow L(E)$  und  $\rho' : M_4 \rightarrow L(E)$  durch  $\rho 0 = \rho' 0 = \langle 0 \rangle$ ,  $\rho a_1 = \rho' a_1 = \langle x \rangle$ ,  $\rho a_2 = \rho' a_2 = \langle y \rangle$ ,  $\rho a_3 = \rho' a_3 = \langle x + y \rangle$ ,  $\rho a_4 = \langle x + \lambda y \rangle$ ,  $\rho' a_4 = \langle x + \mu y \rangle$ ,  $\rho 1 = \rho' 1 = E$ . Angenommen, es existiert ein  $\varphi : E \rightarrow E'$  mit  $\rho' = \bar{\varphi} \circ \rho$ . Dann ist  $\varphi x = \alpha x$  ( $\alpha \neq 0$ ),  $\varphi y = \beta y$  ( $\beta \neq 0$ ),  $\varphi(x + y) = \alpha x + \beta y = \gamma(x + y)$ , woraus  $\alpha = \beta = \gamma$  folgt. Somit ist  $\varphi(x + \lambda y) = \alpha x + \lambda \alpha y = \delta(x + \mu y)$ , was zum Widerspruch  $\lambda \alpha = \mu \alpha$  führt. Also ist  $\rho \not\sim \rho'$ . ad (iii): Es sei  $|k| > 2$  und  $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ . Ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$  Basis eines  $k$ -Vektorraumes  $E$ , so ist die Darstellung  $\rho 0 = \langle 0 \rangle$ ,  $\rho 1 = E$ ,  $\rho a_1 = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ,  $\rho a_2 = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ ,  $\rho a_3 = \langle x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n \rangle$ ,  $\rho a_4 = \langle x_1 + \lambda y_1, x_2 + y_1 + \lambda y_2, \dots, x_n + y_{n-1} + \lambda y_n \rangle$  gemäss G-P[7],S.167 unzerlegbar.  $\square$

Der bemerkenswerte Unterschied zwischen  $M_3$  und  $M_4$  eröffnet zwei Perspektiven. In der fundamentalen Arbeit Gelfand–Ponomarev[7] werden für einen algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  der Charakteristik 0 alle endlichdimensionalen  $k$ -Darstellungen der Partialordnung  $(P, \leq) := \dots$  bestimmt. Dies ist äquivalent zur Bestimmung aller endlichdimensionalen  $k$ -Darstellungen des frei modularen Verbandes  $FM(P) = FM(\dots)$ . Mithin ist die (komplizierte) endlichdimensionale Darstellungstheorie aller 4-erzeugten Verbände über  $k$  bekannt, insbesondere diejenige von  $M_4$  (vgl. auch G-P[8],1.4).

Wir gehen umgekehrt von den angenehmen darstellungstheoretischen Eigenschaften (i),(ii),(iii) aus und fragen, welche Verbände diese mit  $M_3$  teilen! Dabei lassen wir beliebige Körper zu und auch unendlichdimensionale Darstellungen. Diese Charakterisierung der Verbände mit guter Darstellungstheorie (welche i.a. nicht 4-erzeugt sind) geschieht in 1.4 bis 1.6. In 1.2 bzw. 1.3 werden die dazu benötigten verbandstheoretischen bzw. matroidtheoretischen Grundlagen bereitgestellt.

## 1.2 Verbandstheoretische Grundlagen

Wir stellen einige Grundtatsachen über Verbände, insbesondere modulare Verbände zusammen, die in 1.4. gebraucht werden. Da sich fast alle Ergebnisse in ähnlicher Form in [4],[9],[27] finden, verzichten wir meist auf die Beweise.

Ein Element  $p$  eines Verbandes  $L$  heisst  $\vee$ -irreduzibel, falls aus  $p = a \vee b$  schon  $p = a$  oder  $p = b$  folgt. Analog ist " $\wedge$ -irreduzibel" definiert. Mit irreduzibel meinen wir in Zukunft stets " $\vee$ -irreduzibel". Da in 1.4 das irreduzible Element  $0 \in L$  meist ausgeschlossen wird, setzen wir

$$J(L) := \{p \in L \mid p \text{ irreduzibel}\} \setminus \{0\}$$

Sei  $L$  weiterhin ein Verband. Jeder Homomorphismus  $\pi : L \rightarrow L_0$  induziert eine Äquivalenzrelation  $\ker \pi := \{(a, b) \in L \times L \mid \pi a = \pi b\}$  auf  $L$  (Kern von  $\pi$ ). Setzt man  $\theta := \ker \pi$  und  $a\theta a_1 := \pi a = \pi a_1$ , so gilt

$$(5) \quad a\theta a_1, b\theta b_1 \implies (a \vee b)\theta(a_1 \vee b_1) \text{ und } (a \wedge b)\theta(a_1 \wedge b_1).$$

Umgekehrt heisst eine Äquivalenzrelation  $\theta \subseteq L \times L$  mit (5) eine Kongruenzrelation. Setzt man  $a_\theta := \{b \in L \mid a\theta b\}$  und  $L_\theta := \{a_\theta \mid a \in L\}$ , so ist  $L_\theta$  ein Verband unter den Operationen  $a_\theta \vee b_\theta := (a \vee b)_\theta$  bzw.  $a_\theta \wedge b_\theta := (a \wedge b)_\theta$  und  $\pi_\theta : L \rightarrow L_\theta : a \mapsto a_\theta$  ist ein surjektiver Verbandshomomorphismus mit  $\ker \pi_\theta = \theta$ .

Die durch  $\subseteq$  partiell geordnete Menge  $C(L) := \{\theta \subseteq L \times L \mid \theta \text{ Kongruenzrelation}\}$  ist selbst ein Verband, der sogenannte Kongruenzverband von  $L$ . Er ist stets vollständig (d.h. jede Teilmenge  $\Theta \subseteq C(L)$  besitzt ein Supremum und ein Infimum) und distributiv (vgl. (12)). Sein grösstes Element ist  $1 = L \times L$  und sein kleinstes  $0 = \{(a, a) \mid a \in L\}$ . Ist  $C(L) = \{0, 1\}$ , so heisst  $L$  einfach (d.h.  $L$  lässt nur die beiden trivialen Homomorphismen zu). Der erste Homomorphiesatz (für Verbände) besagt gerade, dass

$$(6) \quad C(L_\theta) \simeq \{\vartheta \in C(L) \mid \theta \leq \vartheta \leq 1\} \subseteq C(L).$$

Seien  $L_i$  ( $i \in I$ ) Verbände. Dann ist die durch  $\vec{a} \leq \vec{b} := (\forall i \in I) a_i \leq b_i$  partiell geordnete Menge  $\prod\{L_i \mid i \in I\}$  ein Verband (direktes Produkt der Verbände  $L_i$ ,  $i \in I$ ) und die Suprema bzw. Infima berechnen sich "komponentenweise". Ein injektiver Homomorphismus  $\pi : L \rightarrow \prod\{L_i \mid i \in I\}$  heisst subdirekte Darstellung von  $L$ , falls  $\pi_j := \pi_j \circ \pi$  für alle  $j \in I$  surjektiv ist ( $\pi_j : \prod L_i \rightarrow L_j$  ist die  $j$ -te Projektion).  $L$  heisst subdirekt irreduzibel, falls für jede subdirekte Darstellung  $\pi : L \rightarrow \prod\{L_i \mid i \in I\}$  ein  $j \in I$  existiert mit  $\ker \pi_j = 0$ . Eine subdirekte Darstellung  $\pi : L \rightarrow \prod\{L_i \mid i \in I\}$  ist irredundant, falls  $(\forall i \neq j \in I) \ker \pi_i \neq \ker \pi_j$ . Die irredundanten subd. Darstellungen von  $L$  entsprechen folgendermassen bijektiv den Teilmengen  $\Theta \subseteq C(L)$  mit  $\bigwedge \Theta = 0$ : Ist  $\pi : L \rightarrow \prod\{L_i \mid i \in I\}$  (irredundante) subd. Darstellung, so ist  $\bigwedge\{\ker \pi_i \mid i \in I\} = 0$  (da  $\pi$  injektiv) und ist umgekehrt  $\Theta \subseteq C(L)$  mit  $\bigwedge \Theta = 0$ , so ist

$\pi : L \rightarrow \prod\{L_\theta \mid \theta \in \Theta\} : a \mapsto (a_\theta \mid \theta \in \Theta)$  eine irredundante subdirekte Darstellung. Somit ist  $L$  genau dann subd. irreduzibel, wenn  $0 \in C(L)$  vollständig  $\wedge$ -irreduzibel ist ( $(\forall \Theta \subseteq C(L)) \wedge \Theta = 0 \Rightarrow 0 \in \Theta$ ). Insbesondere ist jeder einfache Verband subdirekt irreduzibel. Nach Birkhoff besitzt jeder Verband eine subdirekte Darstellung  $\pi : L \rightarrow \prod\{L_\theta \mid \theta \in \Theta\}$  mit subdirekt irreduziblen  $L_\theta$ .  $\Theta \subseteq C(L)$  ist i.a. nicht eindeutig bestimmt, man beachte aber (8). Aus Satz 1 ergibt sich leicht die folgende

**Bemerkung:** Jede Zerlegung  $E = \bigoplus\{E_i \mid i \in I\}$  einer injektiven Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  induziert eine (nicht notwendig irredundante) subdirekte Darstellung  $\pi : L \rightarrow \prod\{L_i \mid i \in I\}$  von  $L$  (wo  $L_i := \rho_i L$ ). Umgekehrt braucht eine injektive Darstellung eines subdirekt reduziblen Verbandes  $L$  nicht zerlegbar zu sein (ein Gegenbeispiel findet sich in Po[23], S.52); die Umkehrung gilt aber für Dreieckverbände (Satz 14)!

Für  $a \geq b$  aus  $L$  heisst der Unterverband  $a/b := \{c \in L \mid a \geq c \geq b\}$  Quotient von  $a$  und  $b$ . Falls  $(\forall c \in L) a > c \geq b \Rightarrow c = b$ , so ist  $a$  oberer Nachbar von  $b$  bzw.  $b$  unterer Nachbar von  $a$  ( $a \succ b$ ) und  $a/b$  heisst Primquotient.  $a/b$  heisst zu  $c/d$  nach oben (bzw. unten) transponiert, falls  $(a \vee d = c \text{ und } a \wedge d = b)$  ( $a/b \nearrow c/d$ ) bzw.  $(b \vee c = a \text{ und } b \wedge c = d)$  ( $a/b \searrow c/d$ ). Wir schreiben  $a/b \sim c/d$ , falls  $a/b$  zu  $c/d$  nach oben oder nach unten transponiert ist.  $a/b$  heisst zu  $e/f$  projektiv ( $a/b \approx e/f$ ), falls ein  $n \geq 1$  und Quotienten  $c_i/d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) existieren mit  $a/b = c_1/d_1 \sim c_2/d_2 \sim \dots \sim c_n/d_n = e/f$ . Offenbar ist  $\approx$  eine Äquivalenzrelation auf  $\{a/b \mid a, b \in L, a \geq b\}$ . Man sieht leicht, dass für jede Kongruenzrelation  $\theta \in C(L)$  aus  $a/b \approx e/f$  und  $\pi_\theta a = \pi_\theta b$  auch  $\pi_\theta e = \pi_\theta f$  folgt.

Ist  $L$  modularer Verband, so bestimmt umgekehrt jede Menge von Klassen projektiver Primquotienten auch eine Kongruenz  $\theta$ . Genauer: Ist  $L$  modular, so folgt aus  $a/b \approx c/d$  schon  $a/b \simeq c/d$  (Bi[4],S.13), insbesondere ist mit  $a/b$  auch  $c/d$  Primquotient. Ist  $L$  zusätzlich von endlicher Länge und bezeichnet  $[a/b]$  die  $\approx$ -Äquivalenzklasse von  $a/b$ , so gilt gemäss [4],S.236:

(7)  $C(L) \rightarrow \text{Pot}\{[a/b] \mid a/b \text{ Primquot.}\} : \theta \mapsto \{[a/b] \mid \pi_\theta a = \pi_\theta b\}$  ist Bijektion.

( $L$  hat endliche Länge, falls  $\sup\{|C| \mid C \subseteq L \text{ Kette}\} < \infty$ .) Für ein modulares  $L$  endlicher Länge ist also  $C(L)$  ein endlicher Boole'scher Verband (isomorph zur Potenzmenge einer Menge). Es sei  $\Theta \subseteq C(L)$  eine Menge von Kongruenzen, derart dass  $L \rightarrow \prod\{L_\theta \mid \theta \in \Theta\}$  eine subdirekte Darstellung von  $L$  mit subdirekt irreduziblen Faktoren  $L_\theta$  ist. Wegen (6) ist dann jedes  $\theta \in \Theta$   $\wedge$ -irreduzibel, was in einem Boole'schen Verband gleichbedeutend mit  $\theta < 1$  ist. Klarerweise ist jedes  $\theta < 1$  in  $\Theta$  (sonst wäre  $\bigwedge \Theta \neq 0$ ). In Analogie zur Ringtheorie heisse  $sp(L) := \{\theta \in C(L) \mid \theta < 1\}$  das Spektrum von  $L$ . Es gilt also

- (8) Für jeden modularen Verband  $L$  endlicher Länge ist  $L \rightarrow \prod\{L_\theta \mid \theta \in sp(L)\}$  :  
 $a \mapsto (a_\theta \mid \theta \in sp(L))$  die einzige subdirekte Darstellung von  $L$  mit einfachen Faktoren  $L_\theta$ .

Sei  $L$  weiterhin modular von endlicher Länge und seien  $a \leq b$  aus  $L$ . Dann haben je zwei maximale Ketten  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$  bzw.  $a = c'_0 < c'_1 < \dots < c'_m = b$  die gleiche Länge, d.h. es ist  $n = m$  (vgl. auch S.16). Für  $b \in L$  bezeichne  $\delta(b) := n$  die Länge einer maximalen 0-b-Kette  $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ . Dann gilt die "Dimensionsformel" (Bi[4],S.41)

$$(9) \quad (\forall a, b \in L) \quad \delta(a \wedge b) + \delta(a \vee b) = \delta(a) + \delta(b).$$

Es sei nun  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$  eine beliebige maximale Kette in  $L$ . Da wegen (7) jeder Primquotient  $a_{j+1}/a_j$  von genau einem  $\theta \in sp(L)$  getrennt wird (i.e.  $\pi_\theta a_{j+1} \neq \pi_\theta a_j$ ), folgt unschwer

$$(10) \quad \delta(L) = \sum_{\theta \in sp(L)} \delta(L_\theta) \quad (\delta(L) := \delta(1_L)).$$

Für eine verfeinerte Strukturtheorie modularer Verbände benötigen wir das einfache, aber fundamentale Lemma 3 aus Grä[9], welches einen Spezialfall von Hilfssatz 1.1 in Wille[27] darstellt. Dazu vereinbaren wir folgende Redeweise: Ein Verbandsepi-morphismus  $\pi : L \rightarrow L_0$  hat kleinste Urbilder, falls für alle  $c \in L_0$  die Faser  $\pi^{-1}(c) \subseteq L$

ein kleinstes Element  $\sigma c$  hat. Ist  $L$  endlich, so hat klarerweise jedes  $\pi : L \rightarrow L_0$  kleinste Urbilder ( $\sigma c = \bigwedge \pi^{-1}(c)$ ).

**Lemma 3** ([9], S.135) *Sei  $\pi : L \rightarrow L_0$  ein Epimorphismus, der kleinste Urbilder  $\sigma : L_0 \rightarrow L$  besitzen möge. Dann ist  $\sigma$  ein Supremumshomomorphismus, d.h. es ist  $(\forall a, b \in L_0) \sigma(a \vee b) = \sigma a \vee \sigma b$ .*

**Beweis:** Sei  $a \geq b$  in  $L$ . Wäre  $\sigma a \not\geq \sigma b$ , so folgte  $\sigma b \wedge \sigma a < \sigma b$ , d.h.  $b = b \wedge a = \pi(\sigma b \wedge \sigma a) < \pi(\sigma b) = b$ , Widerspruch. Also ist  $\sigma$  monoton, insbesondere ist  $(\forall a, b \in L_0) \sigma a \vee \sigma b \leq \sigma(a \vee b)$ . Da  $\sigma a \vee \sigma b$  Urbild von  $a \vee b$  ist, gilt auch  $\sigma a \vee \sigma b \geq \sigma(a \vee b)$ .  $\square$

In einem Verband  $L$  endlicher Länge besitzt offenbar jedes  $p \in J(L)$  genau einen Vorgänger  $q < p$ , den wir zukünftig mit  $\hat{p}$  bezeichnen. Ist  $L$  auch modular, so bezeichnen wir für ein  $\theta \in sp(L)$  die kleinsten Urbilder von  $\pi_\theta : L \rightarrow L_\theta$  mit  $\sigma_\theta : L_\theta \rightarrow L$ ; ferner setzen wir  $J^\theta(L) := \sigma_\theta(J(L_\theta))$ .

**Korollar 4** ([4], [9]): *Für jeden modularen Verband  $L$  endlicher Länge ist*

$$J(L) = \bigcup \{ J^\theta(L) \mid \theta \in sp(L) \} \quad (\text{disjunkte Vereinigung}).$$

**Beweis:** Ist  $p' \in J(L_\theta)$ , so ist wegen Lemma 3  $\sigma_\theta p' \in J(L)$ , d.h. es gilt  $\supseteq$ . Sei umgekehrt  $p \in J(L)$ ; wegen  $\bigwedge sp(L) = 0$  existiert ein  $\theta \in sp(L)$  mit  $p' := \pi_\theta p \neq \pi_\theta \hat{p}$ . Daraus folgt sofort  $p = \sigma_\theta p'$  (wie im Beweis von Lemma 3). Also ist  $J(L) = \bigcup \{ J^\theta(L) \mid \theta \in sp(L) \}$ . Dass die Vereinigung disjunkt ist, folgt aus (7), wonach jeder Primquotient von genau einem  $\theta \in sp(L)$  getrennt wird.  $\square$

Ein Element  $p \in L$  heisst prim, falls

$$(\forall a, b \in L) p \leq a \vee b \implies p \leq a \text{ oder } p \leq b.$$

Wie man sich leicht überlegt ([9], S.19), ist dies äquivalent zu  $p \in J^\theta(L)$  für ein  $\theta \in sp(L)$  mit  $L_\theta \simeq D_2 := \{0 < 1\}$  (zweielementige Kette).

**Lemma 5:** Sei  $L$  modularer Verband endlicher Länge und  $p, q, r \in J(L)$  seien verschiedene Elemente mit  $(\Delta 5) p \vee q = p \vee r = q \vee r$  (vgl. S.17). Dann gilt:

(i)  $(p \vee \hat{q}) \wedge r = \hat{r}$

(ii) (Herrmann)  $(\forall \theta \in sp(L)) p \in J^\theta(L) \implies q, r \in J^\theta(L)$

FM(3) =

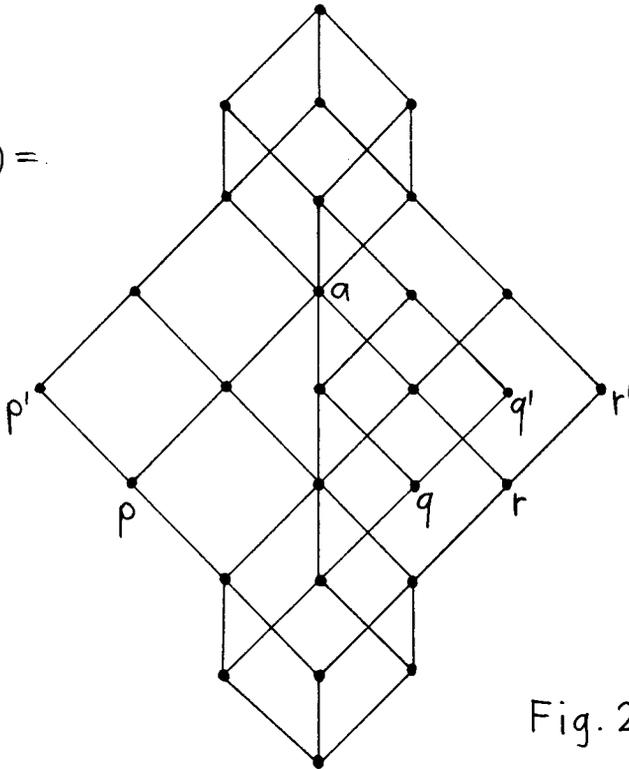


Fig. 2

Beweis: (i). Es ist  $(p \vee \hat{q}) \vee q = p \vee q$  und  $(p \vee \hat{q}) \wedge q \stackrel{(1)}{=} \hat{q} \vee (p \wedge q) = \hat{q}$  (da  $q$  irreduzibel), also  $q / \hat{q} \nearrow p \vee q / p \vee \hat{q}$ . Andererseits folgt aus  $(\Delta 5)$  sofort  $p \vee q / p \vee \hat{q} \searrow r / (p \vee \hat{q}) \wedge r$ . Also ist auch  $r / (p \vee \hat{q}) \wedge r$  ein Primquotient.

(ii) (Bew. Wild). In Fig. 2 ist der von drei Elementen  $p', q', r'$  frei modular erzeugte "Dedekind-Verband"  $FM(3)$  abgebildet (zur Def. von "frei erzeugt" siehe [4],[9]). Wir behaupten, dass der von drei Elementen  $p, q, r$  unter der Zusatzbedingung  $(\Delta 5)$  frei modular erzeugte Verband  $FM(\Delta 5)$  isomorph zu  $a/0 \subseteq FM(3)$  ist. Da  $(\Delta 5)$

äquivalent zu  $p \vee q \vee r = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) =: a$  ist, folgt in der Tat  $FM(\Delta 5) \simeq FM(3)/\theta(p \vee q \vee r/a) \stackrel{(7)}{\simeq} a/0$ , wobei  $\theta(p \vee q \vee r/a)$  die vom Quotienten  $p \vee q \vee r/a$  erzeugte Kongruenz ist.

Der von Elementen  $p, q, r \in J(L)$  mit  $(\Delta 5)$  erzeugte Unterverband von  $L$  ist also stets ein homomorphes Bild von  $FM(\Delta 5)$ . Daraus ersieht man, dass die Primquotienten  $p/\hat{p}$ ,  $q/\hat{q}$  und  $r/\hat{r}$  stets zueinander projektiv sind und die Behauptung folgt aus (7).  $\square$

Sei  $\mathbb{K}$  eine Klasse von Verbänden. Wir setzen

$$H(\mathbb{K}) := \{L_0 \mid \exists L \in \mathbb{K} \text{ und ein Epimorphismus } \pi : L \rightarrow L_0\}$$

$$S(\mathbb{K}) := \{L_0 \mid \exists L \in \mathbb{K} \text{ mit } L_0 \subseteq L \text{ Unterverband}\}$$

$$P(\mathbb{K}) := \{L_0 \mid \exists L_i \in \mathbb{K} (i \in I) \text{ mit } L_0 = \prod_{i \in I} L_i\}$$

$$P_\beta(\mathbb{K}) := \{L_0 \mid \exists L_i \in \mathbb{K} (i \in I) \text{ und eine subd. Darstellung } \pi : L_0 \rightarrow \prod_{i \in I} L_i\}$$

$\mathbb{K}$  heisst Varietät, falls  $H(\mathbb{K}), S(\mathbb{K}), P(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}$ . Für eine beliebige Klasse  $\mathbb{K}$  von Verbänden sei  $\mathbb{K}^e := \bigcap \{\mathbb{K}' \mid \mathbb{K}' \text{ Varietät und } \mathbb{K}' \supseteq \mathbb{K}\}$  die von  $\mathbb{K}$  erzeugte Varietät. Gemäss Tarski (Grä[9], S.230) ist stets  $\mathbb{K}^e = HSP(\mathbb{K})$ . Falls  $\mathbb{K}$  eine endliche Menge von endlichen Verbänden ist, so lässt sich die Tarski'sche Beschreibung von  $\mathbb{K}^e$  gemäss Jónsson verschärfen zu ([9], S.233):

$$(11) \quad \mathbb{K}^e = P_\beta HS(\mathbb{K}).$$

Ein Verband  $L$  heisst distributiv, falls

$$(12) \quad (\forall a, b, c \in L) \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Man kann zeigen, dass dann auch die duale Aussage  $(\forall a, b, c \in L) \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  gilt. Offenbar ist das modulare Gesetz (1) eine Abschwächung von (12). Der zweielementige Verband  $D_2 := \{0 < 1\}$  ist einfach und somit subdirekt irreduzibel. Man sieht auch leicht, dass  $D_2$  neben dem trivialen Verband  $\{1\}$  der einzige distributive, subdirekt irreduzible Verband ist (Bi[4], S.141): Sei dazu  $L \not\subseteq D_2$  distributiv und

seien  $a, b, c \in L$  mit  $a < b < c$ . Bezeichnen  $\theta$  bzw.  $\theta'$  die Kerne der beiden (nichtinjektiven) Homomorphismen  $d \mapsto d \wedge b$  bzw.  $d \mapsto d \vee b$ , so ist  $\theta \wedge \theta' = 0$ , denn  $d(\theta \wedge \theta')e$  bedeutet  $d \wedge b = e \wedge b$  und  $d \vee b = e \vee b$ , was  $d = d \vee (e \wedge b) = (d \vee e) \wedge (d \vee b) = (d \vee e) \wedge (e \vee b) = e \vee (d \wedge b) = e$  impliziert. Somit folgt

$$(13) \quad L \text{ distributiv} \iff L \in \{D_2\}^e.$$

Insbesondere ist für distributive Verbände  $L$  jedes irreduzible  $p \in J(L)$  auch prim (dies folgt auch leicht direkt aus (12);  $L$  braucht nicht endliche Länge zu haben).

### 1.3 Dreieckmatroide

Sei  $(J, -)$  eine Menge mit Abschlussoperator, d.h. für alle  $A, B \subseteq J$  gilt  $A \subseteq \overline{A}$ ,  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ,  $\overline{A} \subseteq B$ .  $(J, -)$  heisst Matroid (Ai[1], S.17), falls für alle  $A \subseteq J$  und  $p, q \in J$  gilt:

$$(M1) \quad p \notin \overline{A}, p \in \overline{A \cup \{q\}} \implies q \in \overline{A \cup \{p\}},$$

$$(M2) \quad \exists B \subseteq A: |B| < \infty \text{ und } \overline{B} = \overline{A}.$$

Gilt zusätzlich  $(\forall p \in J) \overline{\{p\}} = \{p\}$  und  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ , so ist  $(J, -)$  ein einfaches Matroid oder eine kombinatorische Geometrie. Dies wird im folgenden stets erfüllt sein; ebenso wird  $(J, -)$  endlich sein, sodass (M2) trivial gilt. Eine Teilmenge  $B \subseteq J$  heisst unabhängig, falls  $(\forall p \in B) p \notin \overline{B \setminus \{p\}}$ . Andernfalls heisst  $B$  abhängig. Aus dem "Steinitz'schen Austauschatz" (M1) folgt leicht, dass in jedem Matroid  $(J, -)$  gilt:

$$(14) \quad B \subseteq J \text{ unabhängig und } p \notin \overline{B} \implies B \cup \{p\} \text{ unabhängig.}$$

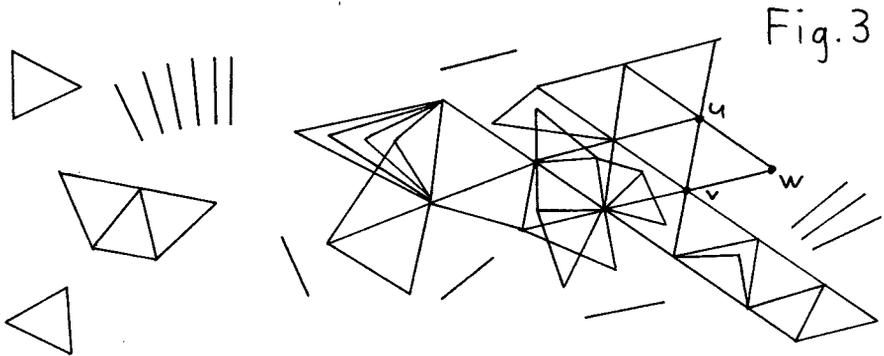
Sei  $A \subseteq J$ . Eine maximal unabhängige Teilmenge  $B \subseteq A$  heisst Basis von A. Wegen (14) ist dann  $\overline{B} = \overline{A}$ . Mit (14) und (M2) kann man auch leicht zeigen, dass alle Basen  $B \subseteq A$  die gleiche endliche Kardinalität  $rg(A)$  (Rang von A) haben. Eine minimal abhängige Teilmenge  $C \subseteq J$  heisst Kreis. Bezeichnet  $K(J, -)$  die Menge aller Kreise

in  $(J, -)$ , so lässt sich der Abschlussoperator  $- : J \rightarrow J$  folgendermassen beschreiben (Ai[1],S.23):

$$(15) \quad A = \bar{A} \iff (\forall C \in K(J, -)) (\forall p \in C) (C \setminus \{p\}) \subseteq A \Rightarrow C \subseteq A.$$

Sei jetzt  $G(V, J)$  ein endlicher, ungerichteter Graph mit Eckenmenge  $V$  und Kantenmenge  $J$ .  $C \subseteq J$  heisst  $G$ -Kreis der Länge  $n$  ( $n \geq 1$ ), falls es paarweise verschiedene  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  gibt mit  $C = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$  ( $v_i v_{i+1}$  ist die durch  $v_i$  und  $v_{i+1}$  bestimmte Kante). Betrachten wir die Menge aller  $G$ -Kreise  $C \subseteq J$ , so wird durch (15) offenbar ein Abschlussoperator  $-$  auf der Kantenmenge  $J$  definiert. Gemäss Ai[1],S.27 ist  $(J, -)$  sogar ein Matroid und die Kreise  $C \subseteq J$  sind gerade die  $G$ -Kreise  $C \subseteq J$ .  $(J, -)$  heisst Polygonmatroid von  $G(V, J)$  (insbesondere ist  $\bar{\emptyset}$  die Menge aller Schlaufen in  $G$  und  $\overline{\{p\}}$  die Menge der zu  $p$  parallelen Kanten; die für uns relevanten Graphen besitzen aber weder Schlaufen, noch parallele Kanten).

Wir interessieren uns für die Polygonmatroide spezieller Graphen  $G(V, J)$ , welche sich am einfachsten rekursiv definieren lassen:



( $\Delta 1$ ) Jeder Graph  $G(V, J)$  mit  $V = \{u, v\}$ ,  $u \neq v$  und  $J = \{uv\}$  heisst Dreiecksgraph.

( $\Delta 2$ ) Ist  $G(V, J)$  Dreiecksgraph und ist  $uv \in J$ ,  $w \notin V$ ,

so ist auch  $G(V', J') := G(V \cup \{w\}, J \cup \{uw, vw\})$  Dreiecksgraph.

( $\Delta 3$ ) Sind  $G(V_1, J_1)$  und  $G(V_2, J_2)$  Dreiecksgraphen und ist  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , so ist auch  $G(V_1, J_2) \oplus G(V_2, J_2) := G(V_1 \cup V_2, J_1 \cup J_2)$  Dreiecksgraph.

Das Polygonmatroid  $(J, -)$  eines Dreiecksgraphen  $G(V, J)$  möge Dreieckmatroid ( $\Delta$ -Matroid) heissen. Durch  $(\Delta 1)$  definierte  $\Delta$ -Matroide heissen trivial und durch  $(\Delta 1), (\Delta 2)$  definierte heissen zusammenhängend. Ein Kreis  $\Delta \in K(J, -)$  der Länge 3 heisse Dreieck und  $D \subseteq K(J, -)$  bezeichne die Menge aller Dreiecke. Eine Teilmenge  $A \subseteq J$  heisse dreieckabgeschlossen ( $\Delta$ -abgeschlossen), falls

$$(16) \quad (\forall \Delta \in D)(\forall p \in \Delta) \quad (\Delta \setminus \{p\}) \subseteq A \implies \Delta \subseteq A.$$

Das folgende Lemma wird in 1.4 an wesentlicher Stelle verwendet werden.

**Lemma 6:** *Sei  $(J, -)$  ein  $\Delta$ -Matroid. Dann ist  $A \subseteq J$  genau dann abgeschlossen, wenn  $A$   $\Delta$ -abgeschlossen ist.*

Beweis: Sicher ist jede abgeschlossene Menge a fortiori  $\Delta$ -abgeschlossen (vgl. (15)).

Für die umgekehrte Richtung können wir  $(J, -)$  o.B.d.A. zusammenhängend annehmen.

Wir gehen induktiv vor. Die Behauptung gilt klarerweise für triviale  $\Delta$ -Matroide.

In dem zum Dreiecksgraphen  $G(V, J)$  gehörigen  $\Delta$ -Matroid  $(J, -)$  sei gemäss Induktionsvoraussetzung jede  $\Delta$ -abgeschlossene Teilmenge auch abgeschlossen. Wir betrachten den durch  $(\Delta 2)$  definierten Dreiecksgraphen  $G(V', J')$  und fixieren eine  $\Delta$ -abgeschlossene Teilmenge  $A' \subseteq (J', -)$ . Es ist die Abgeschlossenheit von  $A'$  zu zeigen.

1. Fall:  $A' \subseteq J$ . Da  $A'$  erst recht  $\Delta$ -abgeschlossen in  $(J, -)$  ist, ist  $A'$  gemäss Induktionsvoraussetzung abgeschlossen.

2. Fall:  $A' = A \cup \{uw\}$ ,  $A \subseteq J$ . Klarerweise ist  $A$   $\Delta$ -abgeschlossen in  $(J, -)$  und damit abgeschlossen (Induktion). Ausserdem ist  $uw \notin A$  (denn  $uv, uw \in A'$  implizierte  $vw \in A'$ ). Es sei also  $(C \setminus \{p\}) \subseteq A'$  ein "Fastkreis". Es ist  $p \in A'$  zu zeigen. Ist  $(C \setminus \{p\}) \subseteq A$ , so ist  $p \in A$ , da  $A$  abgeschlossen ist. Andernfalls muss die Lücke  $p$  gerade gleich  $vw$  sein und da  $(C \setminus \{p\}) \neq \{wu, uv\}$  (da  $uv \notin A$ ), ist

$(C \setminus \{p\}) = \{wu, uu_1, \dots, u_{n-1}u_n, u_nv\}$  mit  $n \geq 1$ . Dann ist aber  $\{uu_1, \dots, u_nv\}$  ein

Fastkreis in  $A$  mit Lücke  $uv$ , im Widerspruch zur Abgeschlossenheit von  $A$ . Dieser Fall tritt also gar nicht ein.

3. Fall:  $A' = A \cup \{vw\}$ ,  $A \subseteq J$ . Analog zum 2. Fall.

3. Fall:  $A' = A \cup \{vw\}$ ,  $A \subseteq J$ . Analog zum 2. Fall.

4. Fall:  $A' = AU\{uw, vw\}$ ,  $A \subseteq J$ . Wie im 2. Fall schliesst man, dass  $A$  abgeschlossen ist. Da  $A'$   $\Delta$ -abgeschlossen ist, ist  $uv \in A$ . Sei wieder  $(C \setminus \{p\}) \subseteq A'$  ein Fastkreis und sei o.B.d.A.  $(C \setminus \{p\}) \not\subseteq A$ . Ist die Lücke  $p$  gleich  $uw$  oder  $vw$ , so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist  $(C \setminus \{p\}) = C_1 \cup \{uw, vw\} \cup C_2 = \{u_n u_{n-1}, \dots, u_1 u\} \cup \{uw, vw\} \cup \{v v_1, \dots, v_{m-1} v_m\}$ , wobei o.B.d.A.  $C_1 \neq \emptyset$  oder  $C_2 \neq \emptyset$ . Dann ist aber  $C_1 \cup \{uv\} \cup C_2$  ein Fastkreis in  $A$  mit Lücke  $p$ , was  $p \in A \subseteq A'$  impliziert.  $\square$

Inskünftig werden wir Dreieckmatroide  $(J, -)$  mit  $(J, D)$  bezeichnen, was nach obigem Lemma gerechtfertigt ist. Man beachte, dass es in einem Polygonmatroid  $(J, -)$ , das kein Dreieckmatroid ist,  $\Delta$ -abgeschlossene Mengen geben kann, die nicht abgeschlossen sind, z.B.  $\{5, 3, 9\}$  in Fig. 4:

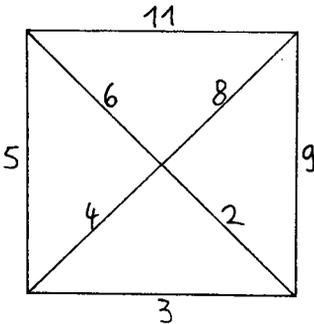


Fig. 4 (= Fig. 17(b))

Wir brauchen einige weitere einfache Tatsachen über  $\Delta$ -Matroide.  $(J, D) = \prod_{i=1}^s (J_i, D_i)$  bezeichne stets die Zerlegung von  $(J, D)$  in seine "Zusammenhangskomponenten". Dann gilt:

$$(17) \quad |J| = \sum_{i=1}^s |J_i| \quad \text{und} \quad (\forall 1 \leq i \leq s) |J_i| = 2|D_i| + 1,$$

$$(18) \quad \text{rg}(J) = \sum_{i=1}^s \text{rg}(J_i) \quad \text{und} \quad (\forall 1 \leq i \leq s) \text{rg}(J_i) = |D_i| + 1.$$

(17) und die erste Gleichung von (18) sind trivial. Die zweite Gleichung ergibt sich unschwer mit (14) und Induktion nach  $|D_i|$ .

Sei nun  $(J, D)$  ein nichttriviales, zusammenhängendes  $\Delta$ -Matroid. Unter einer  $(J, D)$ -Aufzählung verstehen wir eine Permutation  $(p_0, q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_t, p_t)$  von  $J$ , derart dass  $\forall 1 \leq i \leq t$  ein  $r_i \in \{p_0, q_1, p_1, \dots, q_{i-1}, p_{i-1}\}$  mit  $\{r_i, q_i, p_i\} \in D$  existiert (für  $i = 1$  ist  $r_0 = p_0$ ). Mit  $(\Delta 2)$  und Induktion nach  $|D|$  folgt leicht, dass dann  $\{\{r_i, p_i, q_i\} \mid 1 \leq i \leq t\}$  schon gleich  $D$  sein muss. Ebenso sieht man, dass es zu jedem  $p_0 \in J$  eine  $(J, D)$ -Aufzählung  $(p_0, q_1, p_1, \dots, q_t, p_t)$  gibt.

Für gewisse Matroide bedeutet "abhängig" soviel wie "linear abhängig". Genauer: Sei  $(J, -)$  ein Matroid und  $k$  ein Körper. Eine  $k$ -lineare Darstellung von  $(J, -)$  ist eine Abbildung  $w : J \rightarrow E$  ( $E$   $k$ -Vektorraum), derart dass für alle  $A \subseteq J$  gilt:

$$A \text{ abhängig} \iff w(A) \text{ linear abhängig.}$$

Ist  $(J, -)$  einfach, so ist  $w : J \rightarrow E$  klarerweise injektiv und man kann ferner o.B.d.A.  $\dim(E) = \text{rg}(J)$  annehmen. Ein Matroid, welches eine  $k$ -Darstellung besitzt, heisst  $k$ -Matroid und Matroide, welche über jedem Körper  $k$  eine  $k$ -Darstellung besitzen, heissen regulär. Es ist nicht schwer, zu beweisen, dass alle Polygonmatroide regulär sind (Welsh[26], S.148). (Man unterscheide  $k$ -lineare Darstellungen von Verbänden (1.1) und  $k$ -lineare Darstellungen von Matroiden. Im nächsten Abschnitt werden wir  $k$ -Darstellungen von Polygonmatroiden zur Konstruktion von  $k$ -Darstellungen gewisser Verbände verwenden.)

Ein Verband  $L$  endlicher Länge heisst semimodular ([9], S.172), falls

$$(1)' \quad (\forall a, b, c, d \in L) \quad (a \succ b \text{ und } a/b \not\prec c/d) \implies c \succ d.$$

Klarerweise ist Semimodularität eine Abschwächung von Modularität. Auch in semimodularen Verbänden endlicher Länge haben je zwei maximale  $0 - b$ -Ketten stets die gleiche Länge  $\delta(b)$ , doch gilt statt (9) nur noch

$$(9)' \quad (\forall a, b \in L) \quad \delta(a \vee b) + \delta(a \wedge b) \leq \delta(a) + \delta(b).$$

(Gleichheit für alle  $a, b$  ist äquivalent zur Modularität.) Für ein beliebiges Matroid  $(J, -)$  ist die durch  $\subseteq$  partiell geordnete Menge  $L(J, -) := \{A \subseteq J \mid A = \overline{A}\}$  ein Verband mit  $A \wedge B = A \cap B$  und  $A \vee B = \overline{A \cup B}$  und aus (M1) folgt leicht die Semi-modularität von  $L(J, -)$  ([1], S.37). In 1.4 werden wir vom unten stehenden Diagramm Gebrauch machen. (Fig. 5 ist übrigens gleich dem Verband, der auf dem Buchdeckel von Crawley-Dilworth[6] abgebildet ist.)

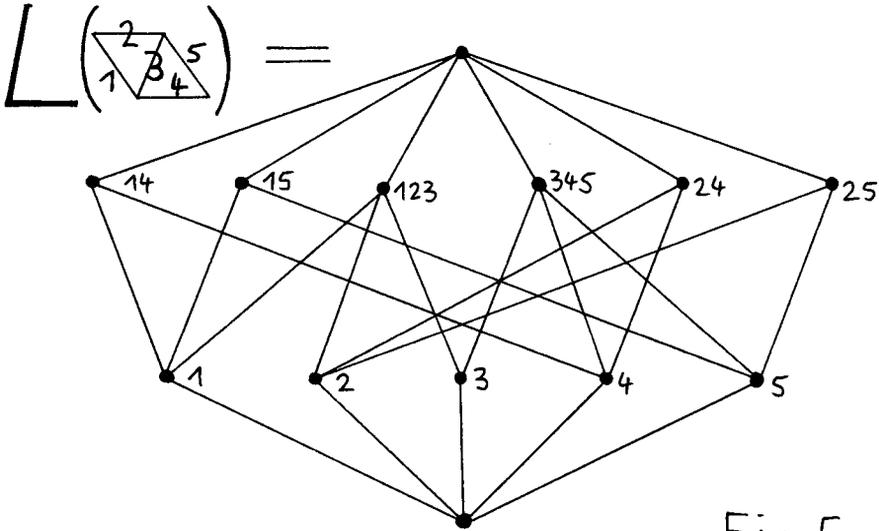


Fig. 5

#### 1.4 Endliche Dreieckverbände

Ein endlicher, modularer Verband  $L$  heisse Dreieckverband ( $\Delta$ -Verband), falls  $J(L)$  derart zu einem Dreieckmatroid gemacht werden kann, dass mit  $D(L) := D(J(L))$  gilt:

$$(\Delta 4) \quad \text{rg}(J(L)) = \delta(L),$$

$$(\Delta 5) \quad (\forall \{p, q, r\} \in D(L)) \quad p \vee q = p \vee r = q \vee r.$$

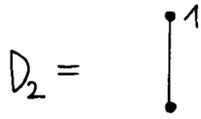


Fig. 6

$\frac{1}{rg = \delta = 1}$

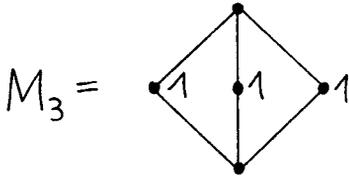
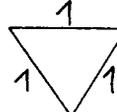


Fig. 7

  
 $rg = \delta = 2$

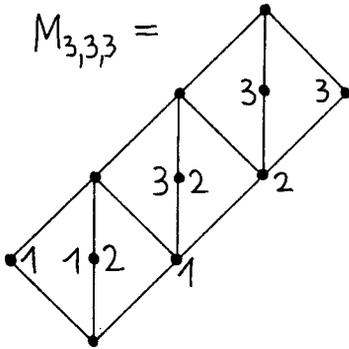


Fig. 8(a)  $rg = \delta = 4$

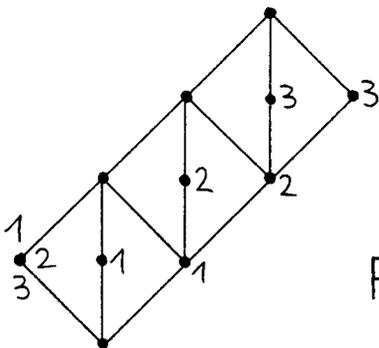
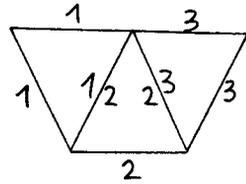
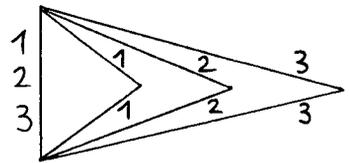
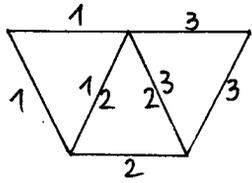
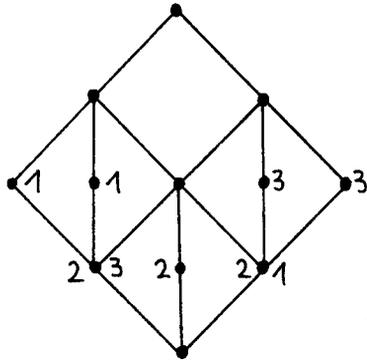


Fig. 8(b)

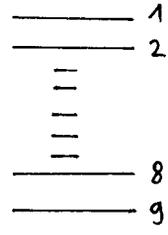
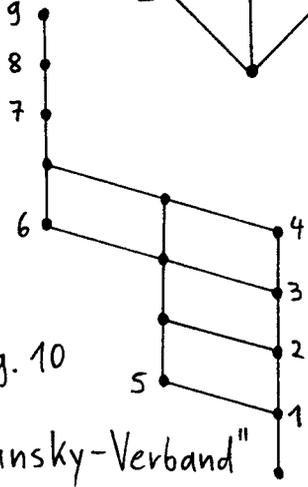


$rg = \delta = 4$

Fig. 9



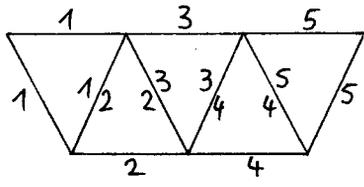
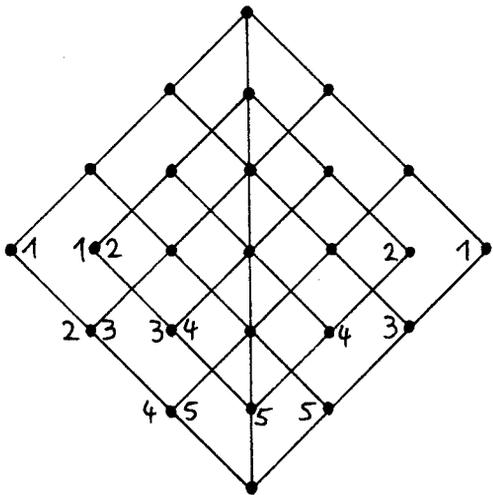
$rg = \delta = 4$



$rg = \delta = 9$

Fig. 10

"Kaplansky-Verband"



$rg = \delta = 6$

$S(6,4)$  (vgl. D-H-W[5])

Fig. 11

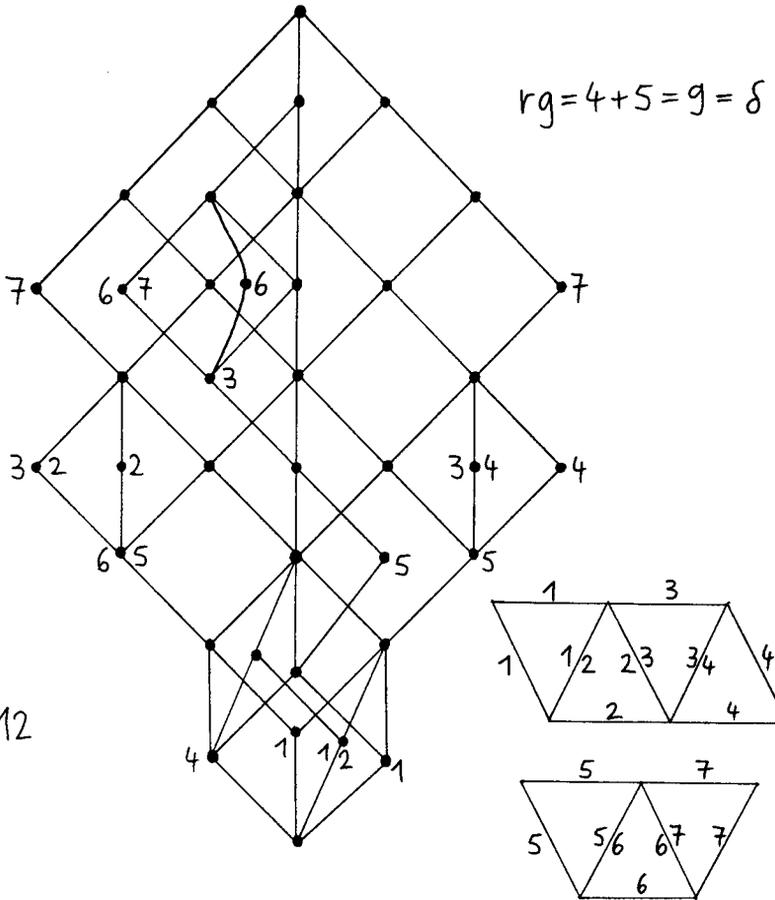


Fig. 12

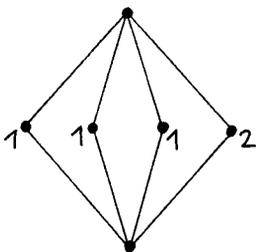
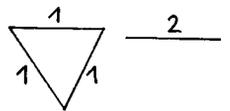
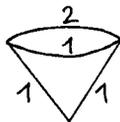


Fig. 13



kein Dreieck-  
matroid!  
( $\Delta_4$ ), ( $\Delta_5$ ) gelten zwar

Dreieckma-  
troid, aber  
 $rg = 3 \neq 2 = \delta$

Fig. 6 bis Fig. 12 stellt jeweils einen Dreieckverband  $L$  mit zugehörigem  $\Delta$ -Matroid  $(J(L), D(L))$  dar. Die zu einem Dreieck  $\Delta \in D(L)$  gehörigen Irreduziblen tragen dabei die gleiche Ziffer  $z$  ( $z \leq |D(L)|$ ). Der Leser möge verifizieren, dass auch  $FM(3)$  in Fig. 2 ein  $\Delta$ -Verband ist (das  $\Delta$ -Matroid besteht aus 7 Zusammenhangskomponenten).

Wie man anhand von Fig. 8 (a), (b) sieht, ist das Dreieckmatroid  $(J(L), D(L))$  eines Dreieckverbandes  $L$  i.a. nicht eindeutig bestimmt (immerhin ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eine Invariante; Satz 10(i)). Umgekehrt können nicht-isomorphe Dreieckverbände identische Dreieckmatroide besitzen (Fig. 8(a), Fig. 9). Eine bijektive Korrespondenz hat man nur für  $|D(L)| \leq 2$  (Satz 11).

Aus Fig. 13 ist ersichtlich, dass  $M_4$  kein Dreieckverband ist (und ebensowenig  $M_i$  für  $i \geq 5$ ). In 1.6 behandeln wir zwei weitere illustrative Gegenbeispiele.

In Satz 2 wurde gezeigt, dass  $M_3$  eine "gute Darstellungstheorie" besitzt. Wir wollen diesen Begriff nun exakt definieren. Ein endlicher, modularer Verband  $L$  heisse gut, falls für jeden Körper  $k$  die Isomorphieklassen  $[\rho]$  der unzerlegbaren  $k$ -Darstellungen  $\rho$  bijektiv den einfachen Faktoren von  $L$  entsprechen:

$$\{[\rho] \mid \rho \text{ unzerlegbare } k\text{-Darst. von } L\} \xrightarrow{\text{Bij.}} \text{sp}(L) : [\rho] \mapsto \ker \rho.$$

Wir erinnern an dieser Stelle an die Konventionen (3) und (4), die in der ganzen Arbeit gültig sind. Ebenso sei wiederholt, dass  $k$  nicht kommutativ zu sein braucht. Ziel dieses Abschnitts 1.4 ist der Beweis des folgenden Hauptsatzes.

**Satz 7:** *Jeder  $\Delta$ -Verband ist gut.*

Zuerst werden wir ein Kriterium beweisen, dass die  $k$ -Darstellbarkeit eines Verbandes  $L$  zurückführt auf die Existenz eines gewissen  $k$ -Matroides auf  $J(L)$ . (Ein modularer Verband  $L$  endlicher Länge heisse  $k$ -darstellbar, falls eine treue  $k$ -Darstellung von  $L$  existiert.) Daraus ergibt sich als Korollar 9, dass jeder  $\Delta$ -Verband  $L$  über jedem Körper  $k$  eine treue Darstellung  $\rho[L, k] : L \rightarrow L(E)$  besitzt. Anschliessend zeigen wir, dass für jeden  $\Delta$ -Verband  $L$  und jedes  $\theta \in \text{sp}(L)$  auch  $L_\theta$  ein  $\Delta$ -Verband ist, dessen

$\Delta$ -Matroid zusammenhängend ist (Satz 10). Satz 13 besagt, dass sämtliche treuen  $k$ -Darstellungen  $\rho$  eines einfachen  $\Delta$ -Verbandes  $L$  zu  $\rho[L, k]$  isomorph sind und in Satz 14 wird gezeigt, dass jede  $k$ -Darstellung  $\rho$  eines  $\Delta$ -Verbandes  $L$  in eine (eventuell unendliche) Summe von  $k$ -Darstellungen  $\sim \rho[L_\theta, k] \circ \pi_\theta$  ( $\theta \in sp(L)$ ) zerfällt. Damit ist Satz 7 dann bewiesen.

Wie erwähnt, befassen wir uns zunächst mit der  $k$ -Darstellbarkeit beliebiger modularer Verbände endlicher Länge.

Ein Verband  $L$  heisst 2-distributiv, falls

$$(\forall a, b, c, d \in L) \quad a \wedge (b \vee c \vee d) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (a \wedge (b \vee d)) \vee (a \wedge (c \vee d)).$$

Analog zu (12) ("1-distributiv") gilt dann auch die duale Gleichung. Man kann zeigen, dass  $L$  genau dann 2-distributiv ist, wenn  $L$  keine projektive Ebene  $L(k^3)$  als Unterverband enthält, insbesondere ist jeder gute Verband 2-distributiv (vgl.[1],S.121). In Jónsson-Nation[18] wird gezeigt, dass jeder modulare, 2-distributive Verband endlicher Länge über jedem Körper  $k$  mit  $|k| > |L|$  eine treue  $k$ -Darstellung besitzt.

Der nächste Satz beleuchtet die Frage der  $k$ -Darstellbarkeit von einem matroidtheoretischen Standpunkt aus. Der Beweis ist zum Beweis in [18] "disjunkt". (Problem: Lässt sich der komplizierte Beweis in [18] mit dem Kriterium aus Satz 8 vereinfachen?) Ist  $(J, \leq) = (J(L), \leq)$  die partiell geordnete Menge der irreduziblen Elemente eines Verbandes  $L$ , so ist  $I \subseteq J$  ein Ideal, falls mit  $p \in I$  auch  $\{p' \in J \mid p' \leq p\} \subseteq I$  ist. Für jedes  $a \in L$  sei  $J(a) := \{p \in J \mid p \leq a\}$  das durch  $a$  bestimmte Ideal und es sei  $L(J, \leq) := \{I \subseteq J \mid I \text{ Ideal}\}$ .

**Satz 8:** Für jeden modularen Verband  $L$  endlicher Länge und jeden festen Körper  $k$  gelten folgende Aussagen.

(i)  $L$  ist  $k$ -darstellbar  $\iff (J, \leq)$  trägt ein  $k$ -Matroid  $(J, \leq, -)$  mit

$$(\Delta 4) \quad rg(J) = \delta(L) \quad \text{und} \quad (\Delta 5)' \quad (\forall a \in L) \quad \overline{J(a)} = J(a).$$

- (ii) Ist  $L$   $k$ -darstellbar und  $(J, \leq, -)$  das zugehörige geordnete Matroid, so ist  
 $L(J, \leq, -) := L(J, -) \cap L(J, \leq)$  ein Unterverband von  $L(J, -)$  und  
 $\rho : L \rightarrow L(J, \leq, -) : a \mapsto J(a)$  ist ein Verbandisomorphismus.

Beweis: (i). Sei zunächst eine treue, d.h. injektive,  $\delta(L)$ -dimensionale Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  gegeben. Für jedes  $p \in J$  wähle man einen Vektor  $w(p) \in \rho p \setminus \rho \hat{p}$ . Da für  $p \not\leq q$   $\rho p \cap \rho q = \rho(p \wedge q) \subseteq \rho \hat{p}$ , erhalten wir so eine injektive Abbildung  $w : J \rightarrow E$ . Setzt man  $(\forall X \subseteq J) \bar{X} := \{p \in J \mid w(p) \in \langle w(X) \rangle\}$ , so ist  $(J, -)$  trivialerweise ein  $k$ -lineares Matroid. Zum Nachweis von  $(\Delta 5)'$  sei  $p \notin J(a)$ . Dann ist  $\rho a \cap \rho p \subseteq \rho \hat{p}$ , also  $w(p) \notin \rho a \supseteq \langle wJ(a) \rangle$  und somit  $p \notin \bar{J(a)}$ . Zum Beweis von  $(\Delta 4)$  genügt es wegen  $\dim(E) = \delta(L)$ , zu zeigen, dass  $(\forall a \in L) \dim \langle wJ(a) \rangle \geq \delta(a)$ . Ist  $a \in L$  und gilt die Behauptung für ein  $\hat{a} < a$ , so sei  $p \in J(a) \setminus J(\hat{a})$ . Nach  $(\Delta 5)'$  ist  $w(p) \in \langle wJ(a) \rangle \setminus \langle wJ(\hat{a}) \rangle$ , was  $\dim \langle wJ(a) \rangle \geq \dim \langle wJ(\hat{a}) \rangle + 1 \geq \delta(a)$  impliziert.

Sei umgekehrt  $(J, \leq)$  gleichzeitig ein Matroid  $(J, \leq, -)$ , das eine  $(\Delta 4)$ ,  $(\Delta 5)'$  erfüllende  $k$ -Darstellung  $w : J \rightarrow E$  besitze (mit o.B.d.A.  $\dim(E) = \text{rg}(J)$ ). Wir setzen

$$\rho : L \rightarrow L(E) \quad : \quad a \mapsto \langle wJ(a) \rangle.$$

Wegen  $(\Delta 4)$  ist jedenfalls  $\dim(E) = \text{rg}(J) = \delta(L)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\rho$  ein injektiver Homomorphismus ist. Die Injektivität ist ein Nebenprodukt von

$$(19) \quad (\forall a, b \in L) \quad (a \leq b \iff \rho a \leq \rho b) \quad \text{und} \quad (a < b \implies \rho a < \rho b).$$

Beweis von (19).  $\implies$  in der ersten Aussage ist trivial. Zum Beweis von  $\impliedby$  sei  $a \not\leq b$ . Dann existiert ein  $p \in J(a) \setminus J(b) \stackrel{(\Delta 5)'}{\subseteq} J(a) \setminus \bar{J(b)}$ . Nach Definition einer  $k$ -Matroiddarstellung ist somit  $w(p) \in \langle wJ(a) \rangle \setminus \langle wJ(b) \rangle$ , also  $\rho a \not\leq \rho b$ .

Aus  $a < b$  folgt daher  $\dim(\rho b / \rho a) \geq 1$ , aber  $\dim(\rho b / \rho a) > 1$  ist wegen  $\dim(E) = \delta(L)$  klarerweise unmöglich. Damit ist auch der zweite Teil bewiesen.

*Seien  $L, L'$  semimodulare Verbände endlicher Länge.*

- (20) *Dann ist jede Abbildung  $\rho : L \rightarrow L'$  mit (19) ein  $\vee$ -Homomorphismus.*

Beweis von (20). Wir zeigen  $(\forall a, b \in L) \rho(a \vee b) = \rho a \vee \rho b$  mit Induktion nach  $\delta(a) + \delta(b)$ . Dabei können wir wegen der Monotonie von  $\rho$  o.B.d.A.  $a$  und  $b$  als unvergleichbar annehmen. Sei  $\delta(a) + \delta(b) \geq 2$ . Man wähle ein  $\hat{a} < a$ . Wegen (9)' ist dann  $\hat{a} \vee b = a \vee b$  oder  $\hat{a} \vee b < a \vee b$ . Im ersten Fall ist  $\rho a \vee \rho b \leq \rho(a \vee b) = \rho(\hat{a} \vee b) \stackrel{\text{Ind.}}{=} \rho \hat{a} \vee \rho b \leq \rho a \vee \rho b$ . Im zweiten Fall ist  $\rho a \leq \rho(a \vee b)$  und gemäss (19)  $\rho(\hat{a} \vee b) < \rho(a \vee b)$ ,  $\rho a \not\leq \rho(\hat{a} \vee b)$ , mithin  $\rho(\hat{a} \vee b) \vee \rho a = \rho(a \vee b)$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\rho(\hat{a} \vee b) = \rho \hat{a} \vee \rho b$ . Daraus ergibt sich  $\rho(a \vee b) = \rho a \vee \rho b$ .

Sind  $L, L'$  modular, so folgt dual zu (20) auch die  $\wedge$ -Treue von  $\rho : L \rightarrow L'$ . Alternativbeweis:  $\rho(a \wedge b) \subseteq \rho a \wedge \rho b$  und  $\delta(\rho(a \wedge b)) \stackrel{(19)}{=} \delta(a \wedge b) \stackrel{(9)}{=} \delta(a) + \delta(b) - \delta(a \vee b) = \delta(\rho a) + \delta(\rho b) - \delta(\rho(a \vee b)) \stackrel{(20)}{=} \delta(\rho a) + \delta(\rho b) - \delta(\rho a \vee \rho b) = \delta(\rho a \wedge \rho b)$ .

(ii). Wegen  $(\Delta 5)'$  ist  $\overline{J(a)} = J(a)$  und somit  $\rho$  wohldefiniert. Die Injektivität folgt sofort aus  $a = \bigvee J(a)$ . Für  $a, b \in L$  ist  $\rho(a \wedge b) = J(a \wedge b) = J(a) \cap J(b) = \rho a \wedge \rho b$  und  $\rho(a \vee b) = J(a \vee b) \stackrel{\cong}{=} \overline{J(a) \cup J(b)} = \rho a \vee \rho b$ . Die Inklusion  $\supseteq$  bei  $\star$  ist trivial. Um  $\subseteq$  zu zeigen, müssen wir von der  $k$ -linearen Matroiddarstellung  $w : J \rightarrow E$  Gebrauch machen:  $p \in J(a \vee b) \Rightarrow w(p) \in \langle wJ(a \vee b) \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle wJ(a) \rangle + \langle wJ(b) \rangle = \langle w(J(a) \cup J(b)) \rangle \Rightarrow p \in \overline{J(a) \cup J(b)}$ . Somit ist  $\text{Im}(\rho) \subseteq L(J, -)$  Unterverband und  $\rho : L \rightarrow \text{Im}(\rho)$  ein Isomorphismus. Zum Nachweis von  $\text{Im} \rho = L(J, \leq, -)$  sei  $X \in L(J, \leq, -)$  ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist  $X = \overline{X} = \bigcup_{p \in X} \overline{J(p)} = \bigvee_{p \in X} \rho p \in \text{Im} \rho$ .  $\square$

Bevor wir zu den Anwendungen von Satz 8 kommen, wollen wir sehen, ob die Äquivalenz (i) auch für semimodulare Verbände gilt.

Ist  $L$  ein semimodularer Verband endlicher Länge, der nicht modular ist, so existieren Elemente  $a, b \in L$  mit  $\delta(a \wedge b) + \delta(a \vee b) < \delta(a) + \delta(b)$ . Eine dimensionstreue,  $\vee$ -treue Abbildung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  kann daher nicht  $\wedge$ -treu sein, denn es ist  $\delta(\rho(a \wedge b)) = \delta(a \wedge b) < \delta(a) + \delta(b) - \delta(a \vee b) = \delta(\rho a) + \delta(\rho b) - \delta(\rho a \vee \rho b) = \delta(\rho a \wedge \rho b)$ . Ein semimodularer Verband  $L$  endlicher Länge heisst daher  $k$ -darstellbar, falls ein  $k$ -Vektorraum  $E$  mit  $\dim(E) = \delta(L)$  und ein injektiver, dimensionstreuer  $\vee$ -Homomorphismus  $\rho : L \rightarrow L(E)$  existieren.

Aus dem Beweis von Satz 8 (i) ergibt sich sofort, dass die Existenz einer  $k$ -Matroidstruktur auf  $J(L)$  mit  $(\Delta 4)$ ,  $(\Delta 5)'$  auch für semimodulare  $L$  noch hinreichend für  $k$ -Darstellbarkeit ist. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass die Bedingung nicht mehr notwendig ist!

Es sei  $k := \mathbb{Z}_2$  und  $x, y, z$  sei Basis eines  $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraumes  $E$ . In Fig.14 sind ein semimodularer Verband  $L$ , sowie eine  $\vee$ -treue  $\mathbb{Z}_2$ -Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  angegeben. Angenommen  $J(L) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$  trägt eine  $\mathbb{Z}_2$ -Matroidstruktur  $(J, -)$  mit  $(\Delta 4)$   $rg(J) = \delta(L) = 3$ . Wegen  $|J| = 7$  ist dann  $(J, -) \simeq (E \setminus \{0\}, -)$ , wobei  $\bar{X} := \langle X \rangle \setminus \{0\}$  für alle  $X \subseteq E \setminus \{0\}$ . Klarerweise gibt es dann keine abgeschlossenen Mengen der Kardinalität 2, d.h.  $(\Delta 5)'$  ist für  $a = 4, 5, 7, 8$  verletzt.

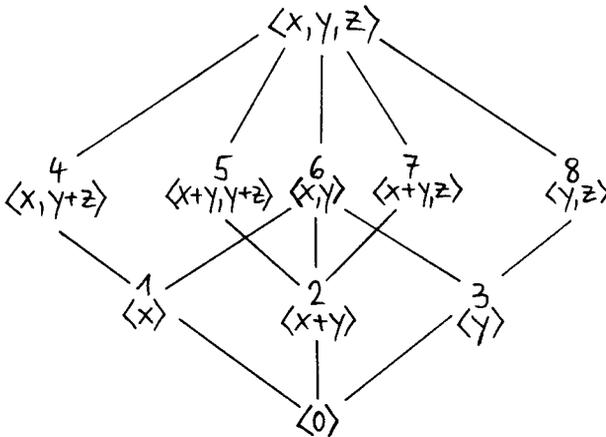


Fig.14

Nach diesem kurzen Abstecher betrachten wir von nun an nur noch Darstellungen modularer Verbände, die per definitionem  $\vee$ - und  $\wedge$ -treu sind. Gibt es Klassen modularer Verbände, für welche das Kriterium (i) aus Satz 8 schnell verifizierbar ist? Man sieht leicht, dass für jeden endlichen, distributiven Verband  $L$  gilt  $|J(L)| = \delta(L)$  (vgl.[9],S.62 oder kombiniere (10),(13),Korollar 4). Fassen wir  $J(L)$  als freies Matroid auf (d.h.  $(\forall X \subseteq J) \bar{X} := X$ ), so sind  $(\Delta 4)$  und  $(\Delta 5)'$  trivial erfüllt, woraus mit Satz 8 die universelle  $k$ -Darstellbarkeit von  $L$ , sowie die wohlbekannte Tatsache  $L \simeq L(J, \leq)$

folgen ([9],S.62). Dies ist bloss ein Spezialfall von

**Korollar 9:** Sei  $L$  ein  $\Delta$ -Verband. Dann gelten folgende Aussagen.

- (i) Zu jedem Körper  $k$  existiert eine  $k$ -Matroiddarstellung  $w : J(L) \rightarrow E$ , derart dass  $\rho[L, k] : L \rightarrow L(E) : a \mapsto \langle wJ(a) \rangle$  eine treue  $k$ -Darstellung von  $L$  ist.
- (ii)  $\rho[L] : L \rightarrow L(J, D, \leq) := L(J, D) \cap L(J, \leq) : a \mapsto J(a)$  ist ein Verbandisomorphismus.

Beweis: Als Polygonmatroid ist  $(J(L), D(L))$  über jedem Körper  $k$  darstellbar.

( $\Delta 4$ ) gilt definitionsgemäss. Aus ( $\Delta 5$ ) folgt sofort, dass alle Teilmengen von  $J(L)$  der Form  $J(a)$   $\Delta$ -abgeschlossen sind (Def.(16)). Gemäss Lemma 6 sind sie dann auch abgeschlossen, d.h. es gilt ( $\Delta 5$ )'. Mithin ergeben sich (i) bzw. (ii) aus Satz 8 (i) bzw. (ii).  $\square$

Ist  $L$   $\Delta$ -Verband mit Zusammenhangskomponenten  $(J, D) = \prod_{i=1}^s (J^i, D^i)$ , so ist  $(\forall a \in L) J(a) = \bigcup_{i=1}^s J^i(a) := \bigcup_{i=1}^s (J(a) \cap J^i)$ . Da der Abschluss von  $X \subseteq J$  "komponentenweise" gebildet wird, können wir das  $\rho := \rho[L]$  aus Korollar 9 auch als subdirekte Darstellung

$$\rho : L \rightarrow \prod_{i=1}^s L(J^i, D^i, \leq) : a \mapsto (J^i(a) \mid 1 \leq i \leq s)$$

auffassen. Der nächste Satz besagt u.a., dass alle Faktoren  $\rho_i := \pi_i \circ \rho$  einfach sind.

**Satz 10:**

- (i) Für jeden  $\Delta$ -Verband  $L$  mit  $(J(L), D(L)) = \prod_{i=1}^s (J^i, D^i)$  ist  $s = |sp(L)|$  und es ist  $\{J^i \mid 1 \leq i \leq s\} = \{J^\theta(L) \mid \theta \in sp(L)\}$  (für  $J^\theta(L) = J^i(L)$  setze  $D^\theta(L) := D^i(L)$ ). Weiter ist für alle  $\theta \in sp(L)$   $L_\theta$  ein  $\Delta$ -Verband mit  $D(L_\theta) = \{\{\pi_\theta p, \pi_\theta q, \pi_\theta r\} \mid \{p, q, r\} \in D^\theta(L)\}$ . Insbesondere ist  $L$  genau dann ein einfacher  $\Delta$ -Verband, wenn  $(J(L), D(L))$  zusammenhängend ist.
- (ii) Sind umgekehrt alle Faktoren  $L_\theta$  ( $\theta \in sp(L)$ ) des endlichen, modularen Verbandes  $L$   $\Delta$ -Verbände, so ist auch  $L$  ein  $\Delta$ -Verband mit  $(J(L), D(L)) = \prod_{\theta \in sp(L)} (J^\theta(L), D^\theta(L))$ , wobei  $D^\theta(L) = \{\{\sigma_\theta p, \sigma_\theta q, \sigma_\theta r\} \mid \{p, q, r\} \in D(L_\theta)\}$ .

**Beweis:** (i). Wir verwenden stillschweigend Lemma 3 und Korollar 4. Es ist  $\{\ker \rho_i \mid 1 \leq i \leq s\} = sp(L)$  zu zeigen, wobei wie oben  $\rho_i : L \rightarrow L(J^i, D^i)$  durch  $a \mapsto J^i(a)$  definiert ist. Dazu notieren wir zunächst die trivialen Ungleichungen

$$(21) \quad (\forall 1 \leq i \leq s) \quad \delta(L_i) = \delta(wJ^i(1)) \leq \dim(wJ^i(1)) = rg(J^i).$$

Ist nun  $p \in J^i$ , so impliziert  $p \notin J^i(\hat{p}) = \overline{J^i(\hat{p})}$  (Lemma 6), dass  $w(p) \notin (wJ^i(\hat{p}))$ . Also ist  $\rho_i \hat{p} \neq \rho_i p$ . Dies bedeutet aber  $\ker \rho_i \subseteq \theta_i$ , wo  $\theta_i$  die gemäss Lemma 5 (ii) eindeutig bestimmte Kongruenz aus  $sp(L)$  mit  $J^i(L) \subseteq J^{\theta_i}(L)$  ist. Die hierdurch gestiftete Surjektion  $\{\rho_i \mid 1 \leq i \leq s\} \rightarrow sp(L) : \rho_i \mapsto \theta_i$  muss nun wegen

$$(22) \quad \delta(L) \stackrel{(\Delta 4)}{=} \sum_{i=1}^s rg(J^i) \stackrel{(21)}{\geq} \sum_{i=1}^s \delta(L_i) \geq \sum_{i=1}^s \delta(L_{\theta_i}) \geq \sum_{\theta \in sp(L)} \delta(L_{\theta}) \stackrel{(10)}{=} \delta(L)$$

auch injektiv sein und es muss  $(\forall 1 \leq i \leq s) \ker \rho_i = \theta_i$  gelten.

Sei  $\theta \in sp(L)$ . Da  $\pi_{\theta} : L \rightarrow L_{\theta}$  die Zusammenhangskomponente  $J^{\theta}(L)$  bijektiv und homomorph auf  $J(L_{\theta})$  abbildet, wird  $J(L_{\theta})$  unter  $D(L_{\theta}) := \{\{\pi_{\theta} p, \pi_{\theta} q, \pi_{\theta} r\} \mid \{p, q, r\} \in D^{\theta}(L)\}$  zu einem  $\Delta$ -Matroid mit  $(\Delta 5)$ . Wegen  $rg(J(L_{\theta})) = rg(J^{\theta}(L)) \stackrel{(22)}{=} \delta(L_{\theta})$ , gilt auch  $(\Delta 4)$ , d.h.  $L_{\theta}$  ist ein  $\Delta$ -Verband.

(ii). Sei  $\theta \in sp(L)$ . Da  $\sigma_{\theta} : L_{\theta} \rightarrow L$   $J(L_{\theta})$  bijektiv und  $\vee$ -treu auf  $J^{\theta}(L)$  abbildet, wird  $J^{\theta}(L)$  unter  $D^{\theta}(L) := \{\{\sigma_{\theta} p, \sigma_{\theta} q, \sigma_{\theta} r\} \mid \{p, q, r\} \in D(L_{\theta})\}$  zu einem zusammenhängenden  $\Delta$ -Matroid mit  $(\Delta 5)$ . Setze  $(J(L), D(L)) := \prod_{sp(L)} (J^{\theta}(L), D^{\theta}(L))$ ; dann ist wegen  $rg(J(L)) = \sum rg(J^{\theta}(L)) = \sum rg(J(L_{\theta})) = \sum \delta(L_{\theta}) \stackrel{(10)}{=} \delta(L)$   $L$  ein  $\Delta$ -Verband.  $\square$

Mit Korollar 9 und Satz 10 können die einfachen Faktoren  $L_{\theta} \simeq \{J^{\theta}(a) \mid a \in L\} \subseteq L(J^{\theta}, D^{\theta}, \leq)$  eines Dreieckverbandes  $L$  bestimmt werden (der Leser möge dies für das  $L$  aus Fig. 12 durchführen). Dabei genügt es, die Faktoren  $L_{\theta}$  mit  $|J^{\theta}(L)| > 5$  zu berechnen, denn für  $|J^{\theta}(L)| = 1$  bzw. 3 bzw. 5 ist (unabhängig von  $L$ ) stets  $L_{\theta} \simeq D_2$  bzw.  $L_{\theta} \simeq M_3$  bzw.  $L_{\theta} \simeq M_{3,3}$  ( $:=$  zwei  $M_3$  übereinander statt drei, wie in  $M_{3,3,3}$ ). Mit anderen Worten:

**Satz 11:** Sei  $L$  ein endlicher, modularer Verband. Dann gelten folgende Äquivalenzen.

- (i)  $L$  ist  $\Delta$ -Verband mit  $(\forall \theta \in sp(L)) |J^\theta(L)| = 1 \iff |J(L)| = \delta(L)$   
 $\iff L \in \{D_2\}^e \iff L$  distributiv.
- (ii)  $L$  ist  $\Delta$ -Verband mit  $(\forall \theta \in sp(L)) |J^\theta(L)| \leq 3 \iff L \in \{M_3\}^e$ .
- (iii)  $L$  ist  $\Delta$ -Verband mit  $(\forall \theta \in sp(L)) |J^\theta(L)| \leq 5 \iff L \in \{M_{3,3}\}^e$ .

Beweis: (i). Sei  $L$   $\Delta$ -Verband mit  $(\forall \theta \in sp(L)) |J^\theta(L)| = 1$ . Gemäss Satz 10 ist für alle  $\theta \in sp(L)$   $L_\theta$  ein  $\Delta$ -Verband mit  $|J(L_\theta)| = 1 = rg(J(L_\theta)) = \delta(L_\theta)$ , d.h.  $L_\theta \simeq D_2$ , was äquivalent zur Distributivität von  $L$  ist (vgl.(13)).  $(\forall \theta \in sp(L)) L_\theta \simeq D_2$  impliziert wiederum  $|J(L)| \stackrel{K.4}{=} \sum_{sp(L)} |J^\theta(L)| = \sum_{sp(L)} 1 = \sum_{sp(L)} \delta(L_\theta) \stackrel{(10)}{=} \delta(L)$ . Sei nun  $L$  endlicher, modularer Verband mit  $|J(L)| = \delta(L) =: s$ . Fassen wir  $J(L) = \{p^1, \dots, p^s\}$  als  $\Delta$ -Matroid  $(J(L), \emptyset) := \prod_{i=1}^s (\{p^i\}, \emptyset)$  auf, so gelten  $(\Delta 4)$ ,  $(\Delta 5)$  und  $L$  ist ein  $\Delta$ -Verband mit  $(\forall \theta \in sp(L)) |J^\theta(L)| = 1$ .

(ii). Ist  $L$   $\Delta$ -Verband mit  $(\forall \theta \in sp(L)) |J^\theta(L)| \simeq \text{—}$  oder  $\nabla$ , so folgt aus Satz 10 (i)  $(\forall \theta \in sp(L)) (|J(L_\theta)| = \delta(L_\theta) = 1)$  oder  $(|J(L_\theta)| = 3, \delta(L_\theta) = 2)$ , was offenbar  $(\forall \theta \in sp(L)) L_\theta \simeq D_2$  oder  $L_\theta \simeq M_3$  impliziert. Ist umgekehrt  $L \in \{M_3\}^e$ , so folgt aus (11) unmittelbar  $(\forall \theta \in sp(L)) L_\theta \simeq D_2$  oder  $L_\theta \simeq M_3$ . Also ist  $L$  nach Satz 10 (ii) ein  $\Delta$ -Verband.

(iii). Ist  $L \in \{M_{3,3}\}^e$ , so überlegt man sich mit (11) leicht, dass  $(\forall \theta \in sp(L)) L_\theta \simeq D_2$  oder  $L_\theta \simeq M_3$  oder  $L_\theta \simeq M_{3,3}$ . Nach Satz 10 (ii) ist  $L$  somit  $\Delta$ -Verband. Die umgekehrte Richtung ist etwas schwieriger. Es bleibt zu zeigen, dass ein  $\Delta$ -Verband  $L$  mit  $(J(L), D(L)) \simeq \nabla$  zu  $M_{3,3}$  isomorph sein muss. Dazu fassen wir  $L$  gemäss Korollar 9 als Unterverband von  $L(\nabla)$  auf (siehe Fig. 5).  $A(L) := \{p \in L \mid 0 < p\} \subseteq J(L)$  bezeichne die Menge der Atome von  $L$ . Wir führen eine Fallunterscheidung nach  $|A(L)|$  durch.  $|A(L)| = 5$ : In diesem Fall ist offenbar  $L = L(\nabla)$ , was unmöglich ist, da  $L(\nabla)$  nicht modular ist (z.B. ist  $2 < 25$ , aber  $(2 \vee 14) \wedge 25 \neq 2 \vee (14 \wedge 25)$ ).  $|A(L)| = 4$ : Ist  $A(L) = \{1, 2, 3, 4\}$ , so ist 15 oder 25 das fünfte Irreduzible, was in jedem Fall zum Widerspruch  $5 \in A(L)$  führt. Andernfalls ist o.B.d.A.  $A(L) = \{1, 2, 4, 5\}$ , woraus aber der Widerspruch  $3 = 123 \wedge 345 \in A(L)$  folgte.  $|A(L)| = 3$ : Es sei  $J(L) = A(L) \cup \{p, q\}$ .

Ist  $A(L) = \{1, 2, 4\}$ , so folgt  $\{p, q\} \subseteq \{15, 25, 345\}$ , was  $5 \in A(L)$  implizierte. Daher ist o.B.d.A.  $A(L) = \{1, 2, 3\}$  und es ist  $\{p, q\} \subseteq \{14, 24, 345, 15, 25\}$ . Aus  $\{p, q\} \subseteq \{14, 24, 345\}$  folgte  $4 \in A(L)$  und aus  $\{p, q\} \subseteq \{345, 15, 25\}$  folgte  $5 \in A(L)$ . Ist  $\{p, q\} = \{14, 25\}$  oder  $\{p, q\} = \{15, 24\}$ , so ist  $L$  nicht modular (betrachte  $2, p, q$ ). Also muss  $\{p, q\}$  gleich  $\{14, 15\}$  oder  $\{24, 25\}$  sein. In beiden Fällen ist  $L \simeq M_{3,3}$ .  $|A(L)| \leq 2$ : Dieser Fall ist trivialerweise unmöglich, da dann in jeder dreielementigen Menge  $\{p, q, r\} \subseteq J(L)$  zwei vergleichbare Elemente wären.  $\square$

**Bemerkung:** In Avann[2], Thm.4.6 wird die Äquivalenz " $|J(L)| = \delta(L) \iff L$  distributiv" rein verbandstheoretisch hergeleitet.

Sei  $\rho : L \rightarrow L(E)$  eine Darstellung eines modularen Verbandes. Ist  $E = X \oplus X_*$  eine Zerlegung von  $\rho$ , so ist  $\rho_X : L \rightarrow L(X) : a \mapsto \rho a \cap X$  gemäss Satz 1 ein Homomorphismus, d.h. es gilt

$$(23) \quad (\forall a, b \in L) \quad (\rho a + \rho b) \cap X = (\rho a \cap X) + (\rho b \cap X) \\ \text{und } (X + \rho a) \cap (X + \rho b) = X + (\rho a \cap \rho b).$$

Die zweite Gleichung in (23) ist äquivalent zur ersten ( $(X, \rho a, \rho b)$  bilden ein sog. "distributives Tripel"; vgl. Bi[4], S.37). Ist umgekehrt ein Teilraum  $X \subseteq E$  mit der Eigenschaft (23) gegeben, so ist es unbekannt, ob  $X$  stets Summand einer Zerlegung von  $\rho$  ist (vgl. (36) ff.). Ein  $X \subseteq E$  mit (23) möge aber Pseudosummand(von  $\rho$ ) heissen und die Darstellung  $L \rightarrow L(X) : a \mapsto \rho a \cap X$  sei auch mit  $\rho_X$  bezeichnet (in G-P[8], S.74 werden solche  $X$  "admissible subspaces" genannt). Das folgende Lemma bildet das Kernstück von Satz 13 und Satz 14. Im Hinblick auf 1.5 lassen wir auch unendliche Verbände  $L$  zu.

**Lemma 12:** Sei  $\rho : L \rightarrow L(E)$  Darstellung eines modularen Verbandes  $L$  und sei  $X \subseteq E$  ein Pseudosummand von  $\rho$ . Ferner sei  $V := \rho(L)$  und  $\pi : V \rightarrow L_0$  sei ein Epimorphismus auf einen einfachen  $\Delta$ -Verband  $L_0$ , derart dass kleinste Urbilder  $\sigma : L_0 \rightarrow V$  existieren. Dann existiert zu jedem  $p_0 \in J(L_0)$  und jedem  $w \in X + \sigma p_0 \setminus X + \widehat{\sigma p_0}$  ein  $W \subseteq E$ , derart dass gilt:

- (i)  $W$  ist Pseudosummand mit  $\dim(W) = \delta(L_0)$  und  $\ker \rho_W = \ker \pi \circ \rho$ ,  
(ii)  $w \in X \oplus W$  und  $X \oplus W$  ist Pseudosummand mit der Eigenschaft  
 $(\forall A \in \mathbf{V}) (X \oplus W) \cap A = (X \cap A) \oplus (W \cap A)$ .

Beweis: Im folgenden bezeichnen für  $p, q, r, \dots$  aus  $J(L_0)$  (ev. mit Indices) die Grossbuchstaben  $P, Q, R, \dots$  jeweils die Bilder unter  $\sigma : L_0 \rightarrow \mathbf{V}$ . Ist  $L_0 \neq D_2$ , d.h.  $D(L_0) \neq \emptyset$ , so fixieren wir eine  $(J(L_0), D(L_0))$ -Aufzählung  $(p_0, q_1, p_1, \dots, q_t, p_t)$  gemäss S.16. Zerlegt man  $w$  in  $w = x + w(p_0) \in X + P_0$ , so ist wegen  $w \notin X + \widehat{P}_0$  auch

$$(24) \quad w(p_0) \in P_0 \setminus (X + \widehat{P}_0).$$

(mit  $p_0$  ist auch  $P_0$  irreduzibel (Lemma 3). Ist  $\mathbf{V}$  unendlich, so braucht allerdings kein Vorgänger  $\widehat{P}_0 < P_0$  zu existieren. In diesem Fall möge (24) eine Abkürzung sein für  $(\forall A < P_0) w(p_0) \in P_0 \setminus (X + A)$ ). Man zerlege nun  $w(p_0)$  in  $w(p_0) = w(q_1) + w(p_1) \in Q_1 + P_1$  (wegen  $(\Delta 5)$  und der Supremumstreue von  $\sigma$  ist  $Q_1 + P_1 \supseteq P_0$ ). Allgemein zerlege man  $w(r_i) \in R_i$  in  $w(r_i) = w(q_i) + w(p_i) \in Q_i + P_i$  ( $r_i$  wie auf S.16). Es sei

$$(25) \quad W := \langle w(p_0), w(p_1), \dots, w(p_t) \rangle \quad (\text{für } D(L_0) = \emptyset \text{ ist } t = 0).$$

Trivialerweise sind für  $D(L_0) \neq \emptyset$  alle  $w(q_i) \in W$ . Dass die Vektoren  $w(p_0), \dots, w(p_t)$  linear unabhängig sind, wird sich später ergeben.

$$(26) \quad (\forall r \in J(L_0)) \quad w(r) \in R \setminus (X + \widehat{R}).$$

Beweis von (26). Gemäss (24) gilt (26) für  $r = p_0$ . Es genügt, (26) für  $p_1, q_1$  nachzuweisen (Induktion). Angenommen  $w(p_1) \in X + \widehat{P}_1$ . Dann ist  $w(p_0) = w(p_1) + w(q_1) \in (X + P_0) \cap (X + \widehat{P}_1 + Q_1) \stackrel{(23)}{=} X + (P_0 \cap (\widehat{P}_1 + Q_1)) \stackrel{*}{\subseteq} X + \widehat{P}_0$ , im Widerspruch zu (24). Dabei gilt  $*$ , weil  $\widehat{P}_1 + Q_1 \not\supseteq P_0$ . Andernfalls folgte nämlich  $\widehat{p}_1 \vee q_1 \geq \pi(\widehat{P}_1 + Q_1) \geq \pi P_0 = p_0$ , im Widerspruch zu Lemma 5 (i)! Ebenso schliesst man, dass  $w(q_1) \notin (X + \widehat{Q}_1)$ .

$$(27) \quad W \text{ ist Pseudosummand mit } \ker \rho_W = \ker \pi \circ \rho, \text{ genauer gilt: } (\forall c \in L_0) \\ (\forall A \in \pi^{-1}(c)) A \cap W = (X + A) \cap W = W_c := \langle wJ(c) \rangle \text{ und } \dim(W_c) = \delta(c).$$

Beweis von (27). Klarerweise ist  $W_c \subseteq A \cap W \subseteq (X + A) \cap W$  für alle  $A \in \pi^{-1}(c)$ . Um an beiden Stellen Gleichheit zu zeigen und zum Nachweis der übrigen Behauptungen beweisen wir ähnlich wie in (19) zunächst

$$(28) \quad (\forall c, d \in L_0) \quad c \leq d \iff W_c \leq W_d \\ \iff (\exists A \in \pi^{-1}(c))(\exists B \in \pi^{-1}(d)) \quad (X + A) \cap W \subseteq (X + B) \cap W.$$

Beweis von (28). Ist  $c \leq d$ , so ist trivialerweise  $W_c \subseteq W_d$  und  $(X + \sigma c) \cap W \subseteq (X + \sigma d) \cap W$ . Sei nun  $c \not\leq d$ . Wir behaupten, dass dann  $W_c \not\subseteq W_d$  und dass  $(\forall A \in \pi^{-1}(c)) (X + A) \cap W \not\subseteq (X + \sigma d) \cap W$ . Sei dazu  $r \in J(c) \setminus J(d)$  fixiert. Dann ist  $w(r) \in W_c$  und  $w(r) \in (X + A) \cap W$  für alle  $A \in \pi^{-1}(c)$ , aber es ist  $w(r) \notin (X + \sigma d) \cap W \supseteq W_d$ , denn sonst folgte  $w(r) \in (X + \sigma d) \cap (X + R) \stackrel{(23)}{=} X + (\sigma d \cap R) \subseteq X + \hat{R}$  (wegen  $r \not\leq d$  ist  $R \not\subseteq \sigma d$ ). Dies ist ein Widerspruch zu (26).

Aus (28) folgt  $(\forall c \in L_0) \dim W_c \geq \delta(c)$ . Da andererseits  $\dim(W) \stackrel{(25)}{\leq} |D(L_0)| + 1 \stackrel{(18)}{=} \text{rg}(J(L_0)) \stackrel{(\Delta^*)}{=} \delta(L_0)$ , muss Gleichheit gelten. Wäre für ein  $A \in \pi^{-1}(c)$   $W_c \subset (X + A) \cap W$ , d.h.  $\dim(W_c) < \dim((X + A) \cap W)$ , so ergäbe sich mit (28) sofort der Widerspruch  $\dim(W) = \dim(W_1) < \dim((X + E) \cap W) = \dim(W)$ . Damit ist (27) und insbesondere (i) bewiesen.

Mit  $A = \langle 0 \rangle$  erhalten wir aus (27)  $\langle 0 \rangle = X \cap W$  und somit  $w = x + w(p_0) \in X \oplus W$ . Ausserdem folgt  $(\forall A \in \mathbf{V}) (X + A) \cap W = (A \cap W) = (X \cap W) + (A \cap W)$ , was äquivalent zur Gleichung in (ii) ist ("distributives Tripel"). Daraus und weil  $X$  und  $W$  Pseudosummanden sind, folgt schliesslich, dass auch  $X \oplus W$  Pseudosummand ist:  $(X \oplus W) \cap (A + B) = (X \cap (A + B)) \oplus (W \cap (A + B)) = (X \cap A) + (X \cap B) + (W \cap A) + (W \cap B) = ((X \oplus W) \cap A) + ((X \oplus W) \cap B)$ .  $\square$

**Satz 13:** Sei  $k$  ein beliebiger Körper und  $L_0$  ein einfacher  $\Delta$ -Verband. Dann sind je zwei treue  $k$ -Darstellungen  $\rho : L_0 \rightarrow L(E)$  und  $\rho' : L_0 \rightarrow L(E')$  isomorph.

Beweis: Es sei  $\mathbf{V} := \rho L_0$ ,  $\mathbf{V}' := \rho' L_0$  und für alle  $a \in L_0$  sei  $A := \rho a$  und  $A' := \rho' a$  (analog für andre Buchstaben). Es ist ein Vektorraumisomorphismus  $\varphi : E \rightarrow E'$  anzugeben, der den Verbandisomorphismus  $\rho' \circ \rho^{-1} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  induziert. Ist  $L_0 \simeq D_2$ ,

so tut's ein beliebiger Isomorphismus  $\varphi$  (beachte Konvention (3)). Andernfalls fixieren wir eine  $(J(L_0), D(L_0))$ -Aufzählung  $(p_0, q_1, p_1, \dots, q_t, p_t)$  und wenden Lemma 12 auf den Fall  $\pi := id_{\mathbf{V}}$  und  $X := \{0\}$  an, d.h. wir zerlegen ein beliebiges  $w(p_0) \in P_0 \setminus \widehat{P}_0$  entlang der  $(J(L_0), D(L_0))$ -Aufzählung und erhalten so Vektoren  $w(r) \in R \setminus \widehat{R}$  ( $r \in J(L_0)$ ), derart dass gilt (vgl.(27)):

$$(29) \quad w(p_0), \dots, w(p_t) \text{ ist Basis von } E \text{ und } (\forall A \in \mathbf{V}) A = \langle wJ(a) \rangle.$$

Dito erhält man, ausgehend von einem  $w'(p_0) \in P'_0 \setminus \widehat{P}'_0$ , durch Zerlegung entlang  $(p_0, \dots, q_t, p_t)$  Vektoren  $w'(r) \in R' \setminus \widehat{R}'$  ( $r \in J(L_0)$ ), derart dass gilt:

$$(29)' \quad w'(p_0), \dots, w'(p_t) \text{ ist Basis von } E' \text{ und } (\forall A' \in \mathbf{V}') A' = \langle w'J(a) \rangle.$$

Wir definieren  $\varphi: E \rightarrow E'$  durch  $\varphi(w(p_i)) := w'(p_i)$  ( $0 \leq i \leq t$ ). Mit Induktion nach  $i$  folgt leicht, dass  $\varphi(w(r)) = w'(r)$  für alle  $r \in J(L_0)$ . Somit ist  $(\forall A \in \mathbf{V}) \varphi(A) = \varphi\langle wJ(a) \rangle = \langle w'J(a) \rangle = A'$ .  $\square$

Da gemäss (7) und Satz 10 (i) jedes homomorphe Bild eines  $\Delta$ -Verbandes  $L$  selbst  $\Delta$ -Verband ist, kann man sich im folgenden Satz auf die Untersuchung injektiver Darstellungen  $\rho: L \rightarrow L(E)$  beschränken.

**Satz 14:** Sei  $k$  ein beliebiger Körper und  $L$  ein  $\Delta$ -Verband. Dann existiert für jede (injektive)  $k$ -Darstellung  $\rho: L \rightarrow L(E)$  eine Zerlegung  $E = \bigoplus \{W_{\theta, i} \mid \theta \in sp(L), i \in I(\theta)\}$  von  $\rho$ , derart dass  $(\forall \theta \in sp(L)) (\forall i \in I(\theta)) \rho W_{\theta, i} \sim \rho[L_{\theta}, k] \circ \pi_{\theta}$ .

Beweis: Es sei wieder  $\mathbf{V} := \rho L$ . Wir werden obige Zerlegung nicht in einem Schritt definieren, sondern "so lange" Pseudosummanden  $W_{\theta, i}$  aufsummieren, bis  $E$  ausgeschöpft ist.

(30) Sei  $X \subseteq E$  Pseudosummand von  $\rho$  und sei  $w \in E \setminus X$ . Dann ist  $w$  zu  $X$

adjungierbar, d.h. es existiert ein  $W = W^1 \oplus \dots \oplus W^m \subseteq E$  ( $m \geq 1$ ), so dass gilt:

(i)  $W^i$  ist Pseudosummand mit  $\theta_i := \ker \rho_{W^i} \in sp(L)$  und  $\dim(W^i) = \delta(L_{\theta_i})$ ,

(ii)  $w \in X \oplus W$  und  $X(w) := X \oplus W$  ist Pseudosummand mit  
 der Eigenschaft  $(\forall A \in \mathbf{V}) (X \oplus W) \cap A = (X \cap A) \oplus \bigoplus_{i=1}^m (W^i \cap A)$ .

Beweis von (30). Es seien ein Pseudosummand  $X \subseteq E$  und ein  $w \in E \setminus X$  gegeben. Gemäss (23) ist die Menge  $\mathbf{M}(w, X) := \{A \in \mathbf{V} \mid w \in X + A\}$  der Räume  $A$ , welche  $w$  "einfangen", ein Filter in  $\mathbf{V}$ . Da  $\mathbf{V}$  endlich ist, ist  $\mathbf{M}(w, X)$  ein Hauptfilter; sein erzeugendes Element sei mit  $D(w, X)$  bezeichnet. Wir teilen den Beweis von (30) in (31) und (32) auf.

(31) *Ist  $D(w, X)$  irreduzibel, so ist  $w$  zu  $X$  adjungierbar.*

Beweis von (31). Sei  $D := D(w, X)$  und sei  $\pi_\theta : \mathbf{V} \rightarrow L_\theta$  der den Primquotienten  $D/\hat{D}$  trennende Faktor (vgl.(8)). Es ist dann  $D = \sigma_\theta p_0$  für ein  $p_0 \in J(L_\theta)$  (vgl. Beweis von Lemma 3) und nach Lemma 12 existiert somit ein  $W^1 \subseteq E$ , welches (i), (ii) von (30) erfüllt.

(32) *Ist jedes  $w \in E \setminus X$  mit irreduziblem  $D(w, X)$  adjungierbar,  
 so ist jedes  $w \in E \setminus X$  adjungierbar.*

Beweis von (32). Es sei ein  $w \in E \setminus X$  vorgegeben. Ist  $D(w, X)$  irreduzibel, so ist  $w$  gemäss (31) zu  $X$  adjungierbar. Sei nun  $D(w, X)$  reduzibel. Wir werden sogar zeigen, dass  $w$  oberhalb  $X$  adjungierbar ist, d.h.  $w$  ist zu jedem Pseudosummanden  $X^1 \supseteq X$  adjungierbar. Wir nehmen das Gegenteil an. Es genügt, ein reduzibles  $D(w^1, X^1) \subset D(w, X)$  anzugeben, derart dass  $w^1$  nicht oberhalb  $X^1$  adjungierbar ist. So erhält man induktiv eine unendlich absteigende Kette in  $\mathbf{V}$ . Sei dazu  $D(w, X) = D^1 + D^2$  ( $D^1, D^2 \in \mathbf{V}$ ,  $D^1, D^2 \subset D(w, X)$ ) und  $w = x + w^1 + w^2 \in X + D^1 + D^2$ . O.B.d.A. ist  $w^1$  nicht oberhalb  $X$  adjungierbar (wären  $w^1$  und  $w^2$  oberhalb  $X$  adjungierbar, so überlegt man sich leicht, dass dies auch für  $w$  gelten müsste, Widerspruch). Also gibt es ein  $X^1 \supseteq X$ , sodass  $w^1$  nicht zu  $X^1$  adjungierbar ist. Wegen (31) ist  $D(w^1, X^1)$  notwendigerweise reduzibel. Da  $w^1$  von  $D^1$  eingefangen wird, ist  $D(w^1, X^1) \subseteq D^1 \subset D(w, X)$ . Dies beweist (32) und somit (30).

Mit (30) erhalten wir die gewünschte Zerlegung von  $\rho$  wie folgt. Es sei  $(e_\eta \mid \eta < \kappa)$  eine Basis von  $E$ . Wir definieren rekursiv eine aufsteigende Kette von Unterräumen  $X_\xi$  ( $\xi < \kappa$ ):

$$\begin{aligned} X_0 &:= \langle 0 \rangle \\ X_{\xi+1} &:= \begin{cases} X_\xi(e_\gamma), & \text{falls } X_\xi \neq E \quad (\gamma := \min\{\eta < \kappa \mid e_\eta \notin X_\xi\}) \\ E, & \text{sonst} \end{cases} \\ X_\lambda &:= \bigcup_{\eta < \lambda} X_\eta \quad \text{für Limeszahlen } \lambda \end{aligned}$$

Mit Induktion nach  $\xi < \kappa$  beweist man leicht, dass für alle  $\xi < \kappa$  gilt: (a)  $X_\xi$  ist ein Pseudosummand, (b)  $(\exists \xi_0 \leq \xi) X_\xi = \bigoplus \{W_{\xi, \mu} \mid \mu < \xi_0\}$ , (c) alle  $W_{\xi, \mu}$  ( $\mu < \xi_0$ ) erfüllen (32) (i) und es gilt  $(\forall A \in \mathbf{V}) X_\xi \cap A = \bigoplus \{W_{\xi, \mu} \cap A \mid \mu < \xi_0\}$ . (Man überprüfe in (a),(b),(c) insbesondere den Fall  $\xi = \lambda = \text{Limeszahl}$ .)

Da  $\{e_\eta \mid \eta < \kappa\} \subseteq \bigcup_{\xi < \kappa} X_\xi$ , ist  $E = \bigoplus \{W_{\xi, \mu} \mid \xi < \kappa, \mu < \xi_0\}$  und dies ist wegen (c) eine Zerlegung von  $\rho$ . Für jedes  $\theta \in \text{sp}(L)$  sei  $\{W_{\theta, i} \mid i \in I(\theta)\} := \{W_{\xi, \mu} \mid \xi < \kappa, \mu < \xi_0, \ker \rho_{W_{\xi, \mu}} = \theta\}$ . Für alle  $\theta, i$  zerlegt sich also die Darstellung  $\rho_{W_{\theta, i}} : L \rightarrow L(W_{\theta, i})$  in  $\rho_{W_{\theta, i}} = \dot{\rho}_{W_{\theta, i}} \circ \pi_\theta : L \rightarrow L_\theta \rightarrow L(W_{\theta, i})$ . Gemäss Satz 13 ist aber  $\dot{\rho}_{W_{\theta, i}} \sim \rho[L_\theta, k]$ .

□

**Bemerkung:** Die Methode, einen Vektorraum mit Hilfe der Räume  $D(w, X)$  auszuschöpfen, stammt von Gross. In G[11] wird so in einem unendlich dimensional, alternierenden Raum  $[E, (,)]$  eine Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  konstruiert, welche einen vorgegebenen Verbandsisomorphismus  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  ( $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \subseteq L(E)$  endlich und distributiv) induziert. Dieser Satz (=Satz 24 in Kap. 2) löste beim Autor die Frage aus: "Wie stark nichtdistributiv dürfen  $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$  überhaupt sein, sodass  $\eta$  stets linear induziert ist?" Satz 13 zeigt, dass die "lineare Induziertheit" für alle  $\Delta$ -Verbände garantiert ist. In 1.6 werden wir der Frage nachgehen, ob umgekehrt jeder gute Verband ein  $\Delta$ -Verband sein muss.

## 1.5 Artinsche Dreieckverbände

Es sei  $L$  ein Dreieckverband. Setzt man  $\Theta := sp(L)$ , so kann man dies gemäss Satz 10 auch so ausdrücken:

$$(33) \quad \begin{aligned} &\{\pi_\theta : L \rightarrow L_\theta \mid \theta \in \Theta\} \text{ ist subdirekte Darstellung von } L \\ &\text{und } \forall \theta \in \Theta \text{ ist } L_\theta \text{ einfacher Dreieckverband.} \end{aligned}$$

In Verallgemeinerung der ursprünglichen Definition nennen wir von jetzt an jeden Verband  $L$ , der eine Teilmenge  $\Theta \subseteq C(L)$  mit (33) zulässt, einen Dreieckverband ( $\Delta$ -Verband). In diesem Paragraphen wollen wir einige Ergebnisse von 1.4 auf unendliche Dreieckverbände ausdehnen. Am einfachsten ist die Verallgemeinerung von Korollar 9:

**Satz 15:** *Sei  $k$  ein beliebiger Körper und  $L$  ein Dreieckverband. Dann existiert ein  $k$ -Vektorraum  $E$  und eine injektive Darstellung  $\rho[L, k] : L \rightarrow L(E)$ .*

Beweis: Es sei eine subdirekte Darstellung (33) fixiert. Zu jedem  $\theta \in \Theta$  sei  $E_\theta$  ein  $\delta(L_\theta)$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum und  $\rho_\theta := \rho[L_\theta, k] : L_\theta \rightarrow L(E_\theta)$  die treue  $k$ -Darstellung von  $L_\theta$  aus Korollar 9. Setzt man  $E := \bigoplus \{E_\theta \mid \theta \in \Theta\}$  und definiert

$$\rho[L, k] : L \rightarrow L(E) : a \mapsto (\rho_\theta(a_\theta) \mid \theta \in \Theta),$$

so ist  $\rho[L, k]$  klarerweise ein Homomorphismus (komponentenweises Rechnen). Sind  $a \neq b$  aus  $L$ , so existiert ein  $\theta \in \Theta$  mit  $a_\theta \neq b_\theta$ , was  $\rho_\theta(a_\theta) \neq \rho_\theta(b_\theta)$ , d.h.  $\rho[L, k](a) \neq \rho[L, k](b)$  impliziert.  $\square$

Um auch Satz 13 und Satz 14 zu verallgemeinern, benötigen wir einige Vorbereitungen. Ein Verband  $L$  heisst artinsch, falls es in  $L$  keine unendlich absteigende Kette  $f_1 > f_2 > f_3 > \dots$  gibt (andre Bezeichnung:  $L$  erfüllt die "absteigende Kettenbedingung", DCC).

**Lemma 16:** ([4],[9]) *Sei  $L$  ein artinscher Verband. Dann gelten folgende Aussagen*

- (i) *Für alle  $\emptyset \neq F \subseteq L$  existiert das Infimum  $\bigwedge F$  und es ist  $\bigwedge F = \bigwedge F_0$  für geeignetes endliches  $F_0 \subseteq F$ ; insbesondere besitzt jeder Epimorphismus  $\pi : L \rightarrow L_0$  kleinste Urbilder  $\sigma : L_0 \rightarrow L$ .*
- (ii)  *$L$  besitzt ein grösstes Element 1 genau dann, wenn  $L$  vollständig ist.*

Beweis: (i). Angenommen, es gäbe ein  $F \subseteq L$ , derart dass  $\bigwedge F$  nicht existiert, oder derart dass  $\bigwedge F \neq \bigwedge F_0$  für alle endlichen  $F_0 \subseteq F$ . Zu beliebigem  $f_1 \in F$  existiert dann ein  $f_2 \not\geq f_1$  aus  $F$  (sonst wäre  $\bigwedge F = f_1$ ), d.h. es ist  $f_1 > f_1 \wedge f_2$ . Ebenso existiert ein  $f_3$  aus  $F$  mit  $f_3 \not\geq f_1 \wedge f_2$ , d.h.  $f_1 > f_1 \wedge f_2 > f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$ . So erhält man induktiv eine unendlich absteigende Kette, im Widerspruch zur Voraussetzung. Nun folgt leicht die Existenz von  $\sigma$ , denn für alle  $c \in L_0$  existiert  $\bigwedge \pi^{-1}(c)$  und ist gleich einem endlichen Infimum; mithin ist  $\bigwedge \pi^{-1}(c)$  kleinstes Urbild von  $c$ .

(ii). Ist  $L$  vollständig, so ist  $1 := \bigvee L$  grösstes Element von  $L$ . Sei umgekehrt  $1 \in L$  grösstes Element und sei  $F \subseteq L$  vorgegeben. Wegen  $1 \in G := \{g \in L \mid (\forall f \in F) g \geq f\}$  ist die Menge der oberen Schranken von  $F$  nicht leer und gemäss (i) existiert daher  $\bigvee F = \bigwedge G$ .  $\square$

Durch Hinzufügen eines Einselementes kann also jeder artinsche Verband "vervollständigt" werden. Sprechen wir im folgenden von artinschen Dreieckverbänden, so meinen wir stets solche mit Einselement. Es gelte weiterhin Konvention (3).

Wie für endliche  $\Delta$ -Verbände, kann man auch für artinsche  $\Delta$ -Verbände  $L$  eine gewisse Teilmenge  $sp(L) \subseteq C(L)$  in natürlicher Weise aussondern.

**Lemma 17:** *Sei  $L$  ein artinscher  $\Delta$ -Verband mit subdirekter Darstellung (33). Setzt man  $sp(L) := \{\theta \in \Theta \mid (\exists c, d \in L) c \succ d \text{ und } (c, d) \notin \theta\}$ , so ist  $\{\pi_\theta : L \rightarrow L_\theta \mid \theta \in sp(L)\}$  eine minimale subdirekte Darstellung von  $L : (\forall \theta \in sp(L)) \bigwedge (sp(L) \setminus \{\theta\}) \neq 0$ .*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass jeder Primquotient  $c/d$  in  $L$  von genau einer Kongruenz  $\theta = \theta_{c,d} \in \Theta$  getrennt wird. Klarerweise existiert mindestens ein  $c/d$  tren-

nendes  $\theta \in \Theta$  (Def. einer subdirekten Darstellung). Gäbe es noch ein  $c/d$  trennendes  $\vartheta \neq \theta$  in  $\Theta$ , so betrachte man den Epimorphismus  $\pi := \pi_\theta \times \pi_\vartheta : L \rightarrow L_0 := L_\theta \times L_\vartheta$ . Es folgt leicht, dass  $\pi c/\pi d$  auch Primquotient in  $L_0$  ist. Dieser würde aber von verschiedenen Kongruenzen  $\theta_0, \vartheta_0 \in sp(L_0)$  getrennt werden, im Widerspruch zu (7).

Es seien nun  $a \neq b$  aus  $L$  vorgegeben. O.B.d.A. ist  $a \wedge b < a$ . Da  $L$  artinsch ist, gibt es  $c, d$  mit  $a \wedge b \leq d < c \leq a$ . Für  $\theta := \theta_{c,d} \in sp(L)$  ist daher  $\pi_\theta a \neq \pi_\theta b$ , womit gezeigt ist, dass  $\{\pi_\theta : L \rightarrow L_\theta \mid \theta \in sp(L)\}$  eine subdirekte Darstellung von  $L$  ist. Diese ist klarerweise minimal, denn ein fester Primquotient  $c/d$  wird von keinem  $\theta \in sp(L) \setminus \{\theta_{c,d}\}$  getrennt.  $\square$

Besitzt ein Verband  $L$  eine minimale subdirekte Darstellung mit subdirekt irreduziblen Faktoren (was nicht immer zutrifft), so ist diese eindeutig bestimmt (D-C[6],11.5). Somit ist die Bezeichnung "sp(L)" in Lemma 17 gerechtfertigt. Für endliche  $\Delta$ -Verbände fällt die Definition natürlich mit (8) zusammen.

Nun sind wir in der Lage, Satz 14 auf artinsche Dreieckverbände auszudehnen. Zwei Definitionen seien noch vorweggenommen. Ein Element  $a$  eines Verbandes  $L$  heisst kompakt, falls aus  $a \leq \bigvee F$  schon  $a \leq \bigvee F_0$  für eine endliche Teilmenge  $F_0 \subseteq F$  folgt. Offenbar besitzt ein irreduzibles, kompaktes  $p \in L$  stets einen eindeutig bestimmten Vorgänger  $\hat{p} < p$ . Eine Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  eines vollständigen Verbandes  $L$  heisst stetig, falls auch für unendliche Suprema bzw. Infima  $\rho(\bigvee F) = \sum \rho(F)$  bzw.  $\rho(\bigwedge F) = \bigcap \rho(F)$  gilt.

**Satz 18:** *Sei  $k$  ein beliebiger Körper und  $L$  ein artinscher  $\Delta$ -Verband. Dann existiert für jede injektive, stetige  $k$ -Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  eine Zerlegung  $E = \bigoplus \{W_{\theta,i} \mid \theta \in sp(L), i \in I(\theta)\}$  von  $\rho$ , derart dass  $(\forall \theta \in sp(L)) (\forall i \in I(\theta)) \rho_{W_{\theta,i}} \sim \rho[L_\theta, k] \circ \pi_\theta$ .*

Beweis: Wir gehen den Beweis von Satz 14 durch und präzisieren an einigen Stellen die Argumentation. Gelingt es, (30) für den Fall eines artinschen  $\Delta$ -Verbandes  $L$  zu beweisen, so erhält man analog zu Satz 14 eine Zerlegung  $E = \bigoplus \{W_{\theta,i} \mid \theta \in \Theta, i \in I(\theta)\}$  von  $\rho$  mit  $\Theta \subseteq sp(L)$  (man vergewissere sich, dass beim "Aufsummieren" der

Pseudosummanden  $W_{\theta,i}$  im Beweis von Satz 14 nirgends die Endlichkeit von  $L$  verwendet wurde). Da obige Zerlegung von  $\rho$  eine subdirekte Darstellung von  $L$  induziert (S.7) und da  $sp(L)$  minimal ist, muss  $\Theta = sp(L)$  sein!

Beweis von (30) für artinsche  $\Delta$ -Verbände. Es seien ein Pseudosummand  $X \subseteq E$  und ein  $w \in E \setminus X$  gegeben. Wieder ist  $M(w, X) = \{A \in \mathbf{V} \mid w \in X + A\}$  wegen (23) ein Filter in  $\mathbf{V}$ . Gemäss Lemma 16 ist  $D(w, X) := \bigcap M(w, X)$  schon ein endlicher Durchschnitt, d.h.  $D(w, X)$  ist wieder Erzeugendes von  $M(w, X)$ . Elemente  $A \in \mathbf{V}$  der Form  $A = D(w, X)$  stellen sich als kompakt heraus: Sei dazu  $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{V}$  und  $D(w, X) \subseteq \sup \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}$  (hier verwenden wir, dass  $\rho$  stetig ist; andernfalls könnte  $\sup \mathbf{F} > \sum \mathbf{F}$  sein).  $w \in X + \sum \mathbf{F}$  impliziert  $w = x + \sum_{i=1}^n x_i \in X + \sum_{i=1}^n A_i$  ( $A_i \in \mathbf{F}$ ), d.h.  $\sum_{i=1}^n A_i$  fängt  $w$  ein. Also ist  $D(w, X) \subseteq \sum_{i=1}^n A_i$ .

(31)\* *Ist  $D(w, X)$  irreduzibel, so ist  $w$  zu  $X$  adjungierbar.*

Beweis von (31)\*. Da  $D := D(w, X)$  kompakt ist, existiert ein Vorgänger  $\hat{D} \prec D$  in  $\mathbf{V}$ . Es sei  $\theta \in sp(\mathbf{V})$  die den Primquotienten  $D/\hat{D}$  trennende Kongruenz. Gemäss Lemma 16 besitzt  $\pi_\theta : \mathbf{V} \rightarrow L_\theta$  kleinste Urbilder  $\sigma_\theta : L_\theta \rightarrow \mathbf{V}$ . Es ist dann  $D = \sigma_\theta p_\theta$  für ein  $p_\theta \in J(L_\theta)$  und nach Lemma 12 existiert somit ein  $W^1 \subseteq E$ , welches (i),(ii) von (30) erfüllt. Dies beweist (31)\*.

Es bleibt der Fall eines reduziblen  $D(w, X)$  zu untersuchen. Hierzu kann die Schlussweise des Beweises von (32) wörtlich übertragen werden; es wird nur verwendet, dass  $\mathbf{V}$  keine unendlich absteigende Kette besitzt.  $\square$

Es seien  $\rho : L \rightarrow L(E)$  und  $\rho' : L \rightarrow L(E')$  zwei Darstellungen eines modularen Verbandes  $L$  mit 0,1. Eine notwendige Bedingung für  $\rho \sim \rho'$ , d.h. für die Existenz eines Isomorphismuses  $\varphi : E \rightarrow E'$  mit  $(\forall a \in L) \varphi(\rho a) = \rho' a$  ist klarerweise

(34)  *$\rho$  und  $\rho'$  sind indextreu, d.h. für alle Quotienten  $a/b$  in  $L$  gilt  $\dim(\rho a / \rho b) = \dim(\rho' a / \rho' b)$ .*

In Verallgemeinerung von Satz 13 beweisen wir, dass für artinsche  $\Delta$ -Verbände (34) auch hinreichend für die Isomorphie zweier Darstellungen ist.

**Satz 19:** Sei  $k$  ein beliebiger Körper und  $L$  ein artinscher  $\Delta$ -Verband. Dann sind je zwei indextreue, injektive, stetige  $k$ -Darstellungen  $\rho : L \rightarrow L(E)$  und  $\rho' : L \rightarrow L(E')$  isomorph.

Beweis: Wir betrachten Zerlegungen  $E = \bigoplus \{W_{\theta,i} \mid \theta \in sp(L), i \in I(\theta)\}$  von  $\rho$  bzw.  $E' = \bigoplus \{W'_{\theta,i'} \mid \theta \in sp(L), i' \in I'(\theta)\}$  von  $\rho'$  gemäss Satz 18. Dann gilt

$$(35) \quad (\forall \theta \in sp(L)) \quad |I(\theta)| = |I'(\theta)|.$$

Beweis von (35). Sei  $\theta \in sp(L)$  fest. Dann ist  $\theta = \theta_{c,d}$  für einen Primquotienten  $c/d$  in  $L$ . Da alle  $\vartheta \in sp(L) \setminus \{\theta\}$  den Primquotienten  $c/d$  identifizieren, ist  $(\forall \vartheta \in sp(L) \setminus \{\theta\})(\forall i \in I(\vartheta)) C \cap W_{\vartheta,i} = D \cap W_{\vartheta,i}$  (beachte  $\ker \rho_{W_{\vartheta,i}} = \vartheta$ ). Somit ist  $\dim(C/D) = \sum \{\dim(C \cap W_{\vartheta,i} / D \cap W_{\vartheta,i}) \mid \vartheta \in sp(L), i \in I(\vartheta)\} = \sum \{\dim(C \cap W_{\theta,i} / D \cap W_{\theta,i}) \mid i \in I(\theta)\} = |I(\theta)| \cdot 1 = |I(\theta)|$ . Ebenso schliesst man  $\dim(C'/D') = |I'(\theta)|$ . Weil nach Voraussetzung  $\dim(C/D) = \dim(C'/D')$  ist, folgt die Behauptung.

Man fixiere nun für jedes  $\theta \in sp(L)$  eine Bijektion  $I(\theta) \rightarrow I'(\theta) : i \mapsto i'$ . Nach Satz 18 ist  $(\forall \theta \in sp(L))(\forall i \in I(\theta)) \rho_{W_{\theta,i}} \sim \rho[L_{\theta}, k] \circ \pi_{\theta} \sim \rho'_{W_{\theta,i'}}$ . Es existieren daher Vektorraumisomorphismen  $\varphi_{\theta,i} : W_{\theta,i} \rightarrow W'_{\theta,i'}$  mit  $(\forall A \in \mathbf{V}) \varphi_{\theta,i}(A \cap W_{\theta,i}) = A' \cap W'_{\theta,i'}$ . Definiert man  $\varphi : E \rightarrow E'$  durch  $\varphi|_{W_{\theta,i}} := \varphi_{\theta,i}$  ( $\theta \in sp(L), i \in I(\theta)$ ), so ist  $(\forall A \in \mathbf{V}) \varphi(A) = \varphi(\bigoplus \{A \cap W_{\theta,i} \mid \theta \in sp(L), i \in I(\theta)\}) = \bigoplus \{A' \cap W'_{\theta,i'} \mid \theta \in sp(L), i' \in I'(\theta)\} = A'$ , d.h. es ist  $\rho \sim \rho'$ .  $\square$

Sind  $\rho$  und  $\rho'$  nicht stetig, so braucht Satz 19 nicht zu gelten, wie man schon an folgendem, trivialen Beispiel sieht:  $(e_{\eta} \mid \eta < \omega + \omega)$  sei Basis eines Vektorraumes  $E$  und die Darstellungen  $\rho, \rho' : \omega + \omega + 1 \rightarrow L(E)$  seien durch  $\rho\xi := (e_{\eta} \mid \eta < \xi)$  ( $\xi \leq \omega + \omega$ ) bzw.  $\rho'\xi := \rho\xi$  ( $\xi < \omega$ ),  $\rho'\xi := (e_{\eta} \mid \eta \leq \xi)$  ( $\omega \leq \xi < \omega + \omega$ ),  $\rho'(\omega + \omega) := E$  definiert.  $\rho$  und  $\rho'$  sind offenbar injektiv und indextreu (mit (3)), aber für ein  $\varphi : E \rightarrow E$  mit  $(\forall \xi < \omega) \varphi(\rho\xi) = \rho'\xi$  folgt  $\varphi(\rho\omega) = (e_{\eta} \mid \eta < \omega) \neq \rho'\omega$ . Also ist  $\rho \not\sim \rho'$ .

Auch die Injektivität der Darstellungen ist (anders als in Satz 14) für unendliche  $\Delta$ -Verbände eine notwendige Voraussetzung, denn ein homomorphes Bild eines unendlichen  $\Delta$ -Verbandes braucht kein  $\Delta$ -Verband mehr zu sein. C. Herrmann wies

nich auf folgendes Gegenbeispiel hin: In D-H-W[5] tritt ein Verband  $K$  auf, der ein subdirektes Produkt der einfachen  $\Delta$ -Verbände  $S(n, 4)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist (vgl. Fig. 11), aber  $M_4$  als homomorphes Bild besitzt! (Allerdings ist  $K$  nicht artinsch; ein solches Gegenbeispiel steht noch aus.)

Ein artinscher  $\Delta$ -Verband  $L$  heisse "vom endlichen Typ", falls die Isomorphieklassen der  $L_\theta$  ( $\theta \in sp(L)$ ) eine endliche Menge bilden. Dann ist also  $L \in \{L_1, \dots, L_n\}^e$ , wo die  $L_i$  einfache  $\Delta$ -Verbände sind. Wegen (11) und weil jeder Unterverband eines endlichen  $\Delta$ -Verbands selbst  $\Delta$ -Verband ist (S.47), ist jedes  $L_0 \in \{L_1, \dots, L_n\}^e$  subdirektes Produkt einfacher  $\Delta$ -Verbände, insbesondere alle homomorphen Bilder  $L_0$  von  $L$ . Somit erhalten wir

**Korollar 20:** *Ist  $L$  artinscher  $\Delta$ -Verband vom endlichen Typ, so gelten die Sätze 18 und 19 ohne die Voraussetzung der Injektivität der Darstellungen (" $sp(L)$ " in Satz 18 ist durch " $sp(L/\ker \rho)$ " zu ersetzen). Mithin gilt Hauptsatz 7 statt für endliche  $\Delta$ -Verbände allgemeiner für artinsche  $\Delta$ -Verbände vom endlichen Typ.*

**Bemerkung:** Für artinsche  $\Delta$ -Verbände  $L$  vom endlichen Typ liefert  $sp(L)$  offensichtlich nicht nur eine minimale, sondern sogar die kleinste subdirekte Darstellung von  $L$ .

Abschliessend wollen wir die Bedeutung der absteigenden Kettenbedingung  $DCC$  etwas diskutieren. Im Beweis von Satz 18 wurde an drei Stellen davon Gebrauch gemacht: Zuerst verwendeten wir, dass in jedem  $DCC$ -Verband  $\mathbf{V} \subseteq L(E)$  (trivialerweise) gilt

- (i) Für jeden Filter  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$  und für alle Teilräume  $X \subseteq E$  ist " $X$  mit  $\mathbf{M}$  verträglich", d.h.  $X + \bigcap \mathbf{M} = \bigcap \{X + A \mid A \in \mathbf{M}\}$ .

Man kann sich überlegen, dass (i) sogar äquivalent zu  $DCC$  ist. Statt (i) könnte man auch eine etwas schwächere Bedingung verwenden:

- (i)' ((7) in Sch[24]) *Es existiert eine Zerlegung  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , ( $\forall i \in I$ )  $\dim(E_i) \leq \aleph_0$ , sodass jedes  $X := \bigoplus_{j \in J} E_j$  ( $J \subseteq I$ ) mit jedem Filter  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$  verträglich ist.*

Weiter garantierte uns *DCC*:

- (ii) *Jeder Epimorphismus  $\pi : \mathbf{V} \rightarrow L_0$  besitzt kleinste Urbilder  $\sigma : L_0 \rightarrow \mathbf{V}$ .*

Schliesslich benötigten wir *DCC* für die Implikation

- (iii) *Ist  $w \in E \setminus X$  für alle irreduziblen  $D(w, X)$  adjungierbar, so auch für reduzible  $D(w, X)$  ( $X$  Pseudosummand).*

Setzt man  $\mathbf{V}$  als distributiv voraus, so ist Satz 19 ein Korollar von Thm.1 in Sch[24].

In diesem Fall kann man "(ii) und (iii)" ersetzen durch

- (iv)  *$\mathbf{V}$  ist vollständig und jedes kompakte Element  $A \in \mathbf{V}$  ist Summe von irreduziblen Elementen.*

Dies wollen wir kurz skizzieren.

ad (ii). Ist  $\mathbf{V}$  distributiv, so ist gemäss (13) für alle  $\theta \in sp(\mathbf{V})$   $\mathbf{V}_\theta \simeq D_2$ . Ein Blick in den Beweis von Lemma 12 zeigt aber, dass für  $L_0 \simeq D_2$  die Existenz von kleinsten Urbildern gar nicht verwendet wird!

ad (iii). Sei  $X \subseteq E$  Pseudosummand und  $w \in E \setminus X$ , derart dass  $D(w, X)$  reduzibel ist. Gemäss (iv) ist  $D(w, X) = D^1 + \dots + D^n$  mit endlich vielen irreduziblen  $D^i \in \mathbf{V}$ . Wählt man  $n$  minimal, so folgt, dass für jede Zerlegung  $w = x + w^1 + \dots + w^n \in X + D^1 + \dots + D^n$  stets gilt  $D(w^1, X) = D^1, D(w^2, X \oplus (w^1)) = D^2, \dots, D(w^n, X \oplus (w^1, \dots, w^{n-1})) = D^n$  (G[10], S.119). Man kann also, da die Adjunktionsaufgabe für irreduzible  $D(v, Y)$  lösbar ist, nacheinander  $w^1, \dots, w^n$  adjungieren und hat damit auch  $w$  adjungiert. (Ist  $\mathbf{V}$  nicht distributiv, so muss man i.a. statt  $(w^i)$  mehrdimensionale Räume  $W^i \supset (w^i)$  adjungieren; dann kann aber  $D(w^i, X \oplus W^1 \oplus \dots \oplus W^{i-1}) \subset D^i$  sein! Um ein unendliches Absteigen auszuschliessen, war deshalb *DCC* im Beweis von (iii) unerlässlich.)

Ist  $\dim(E) \leq \aleph_0$ , so ist (i)' eine leere Bedingung, d.h. Satz 19 gilt unter der Voraussetzung "V distributiv mit (iv)", was nach einer Note von Herrmann auch äquivalent ist zu "V vollständig distributiv" (Def.in Bi[4]). Dies ist die lineare Version von Thm.1 in G[10],Kap.4 — dem Vatertheorem der Gross'schen "Verbandsmethode". Insbesondere können in einem  $\aleph_0$ -dimensionalen Vektorraum  $E$  zwei vollständige, unendlich absteigende Ketten  $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \subseteq L(E)$ , welche indextreu isomorph sind, stets durch einen Isomorphismus  $\varphi : E \rightarrow E$  aufeinander abgebildet werden. Erstaunlicherweise gilt dies schon für  $\dim(E) = 2^{\aleph_0}$  nicht mehr; Thm.2 in G-K[13] bildet ein Gegenbeispiel.

### 1.6 Primeigenschaft, Abspaltbarkeit und Umkehrung von Satz 7

Ein einfacher, modularer Verband  $L_0$  endlicher Länge hat die Primeigenschaft (Po[23],S.53), falls für jeden Körper  $k$  jede unzerlegbare  $k$ -Darstellung  $\rho : L_0 \rightarrow L(E)$  treu ist (die Umkehrung ist trivial; vgl. Bem.S.7). In Po[23],S.55 wird bewiesen, dass  $D_2, M_3$  und alle projektiven Geometrien  $PG_n[k] := L(k^n)$  ( $k$  Primkörper,  $n \geq 3$ ) die Primeigenschaft haben. Aus Satz 14 ergibt sich unmittelbar folgende Verallgemeinerung des Resultates über  $D_2$  und  $M_3$ .

**Korollar 21:** *Jeder einfache Dreieckverband  $L_0$  hat die Primeigenschaft.*

Bevor wir einen zweiten in Po[23] eingeführten Begriff diskutieren, noch einige Bemerkungen über Pseudosummanden. In Gelfand-Ponomarev[8],S.74 wird folgende Frage aufgeworfen:

(36) *Sei  $X \subseteq E$  Pseudosummand einer Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$ . Existiert stets ein  $X_* \subseteq E$ , derart dass  $X \oplus X_*$  eine Zerlegung von  $\rho$  ist ?*

Zur Illustration sei  $k$  beliebig und  $x, y, z, w$  Basis eines  $k$ -Vektorraumes  $E$ . Wir betrachten die durch Fig. 15 definierte Darstellung  $\rho : L \rightarrow \mathbf{V} \subseteq L(E)$ . Man bestätigt leicht, dass die eingezeichnete Partition von  $\mathbf{V}$  eine Kongruenz  $\theta \in C(\mathbf{V})$  darstellt mit

$V_\theta \simeq M_3$ . Weiter rechnet man unschwer nach, dass  $X := \langle y, z \rangle$  ein Pseudosummand von  $\rho$  mit  $\ker \rho_X = \theta$  ist. Wählt man willkürlich ein lineares Supplement  $X_\star$  von  $X$  in  $E$ , so wird man natürlich i.a. keine Zerlegung von  $\rho$  erhalten: Setzt man beispielsweise für das  $\rho$  aus Fig. 15  $X_\star := \langle x + y, z + w \rangle$ , so wird der Raum  $A := \langle x, y, w \rangle \in V$  nicht zerlegt, denn  $A \neq (X \cap A) \oplus (X_\star \cap A) = \langle y \rangle + \langle x + y \rangle$ .

Falls eine Ergänzung  $X_\star \subseteq E$  zu einer Zerlegung existiert, so braucht diese nicht eindeutig bestimmt zu sein. Zum Beispiel kann unser  $X = \langle y, z \rangle$  sowohl durch  $X_\star := \langle x, w \rangle$  als auch durch  $X_\star := \langle x, y + w \rangle$  zu einer Zerlegung von  $\rho$  ergänzt werden.

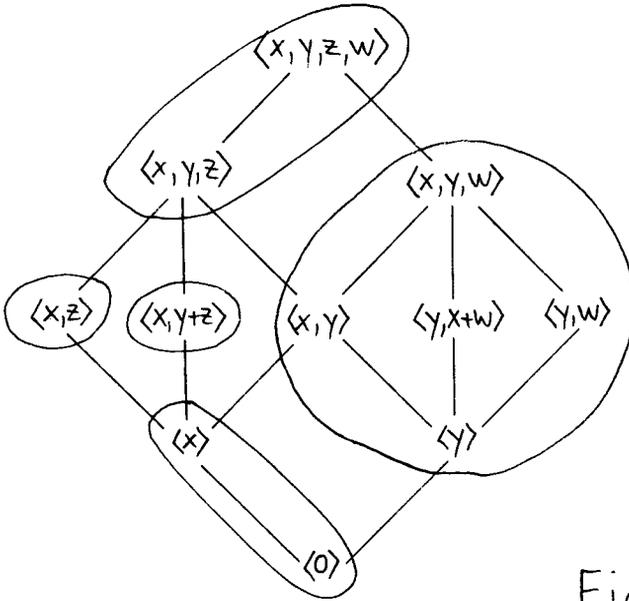


Fig. 15

In Erweiterung von Po[23] nennen wir einen modularen, subdirekt irreduziblen, endlich erzeugten Verband absplattbar aus  $L$ , falls für jeden Körper  $k$  und jede  $k$ -Darstellung  $\rho : L \rightarrow L(E)$  gilt: Existiert ein nicht bijektiver Epimorphismus  $\pi : \rho L \rightarrow L_0$ , so gibt es eine Zerlegung  $E = X \oplus X_\star$  von  $\rho$  mit  $\rho_X(L) \simeq L_0$ . Falls  $L_0$  aus jedem modularen Verband  $L$  absplattbar ist, so heisst  $L_0$  absplattbar (Po[23], Def.1.3). In Po[23] ist bewiesen, dass  $D_2$  und  $M_3$  absplattbar sind, jedoch nicht  $M_4$ .

**Korollar 22:** Sei  $L_0$  ein einfacher Dreieckverband. Dann gelten folgende Aussagen.

- (i)  $L_0$  ist aus jedem Dreieckverband abspaltbar.
- (ii) Falls (36) zu bejahen ist, so ist  $L_0$  aus jedem artinschen, modularen Verband  $L$  abspaltbar.

Beweis: (i) ist eine Umformulierung von Satz 14. (ii). Sei  $\rho : L \rightarrow \mathbf{V} \subseteq L(E)$  eine Darstellung eines artinschen, modularen Verbandes  $L$  und sei  $\pi : \mathbf{V} \rightarrow L_0$  ein nicht bijektiver Epimorphismus. Gemäss Lemma 16 existieren kleinste Urbilder  $\sigma : L_0 \rightarrow \mathbf{V}$ . Setzen wir somit in Lemma 12  $X := \langle 0 \rangle$ , so erhalten wir einen Pseudosummanden  $W \subseteq E$  mit  $\rho_W(L) \simeq L_0$  (sogar  $\ker \rho_W = \ker \pi \circ \rho$ ). Nach Voraussetzung (36) kann nun  $W$  zu einer Zerlegung  $E = W \oplus W_*$  von  $\rho$  ergänzt werden.  $\square$

Den Rest dieses Paragraphen widmen wir der Umkehrung von Hauptsatz 7, d.h. wir diskutieren die Frage, ob jeder gute Verband schon  $\Delta$ -Verband sein muss.

Für einen endlichen, einfachen, modularen Verband  $L_0$  bedeutet "  $L_0$  ist gut " soviel wie "  $L_0$  besitzt bis auf Isomorphie über jedem Körper  $k$  genau eine unzerlegbare Darstellung  $\rho[L_0, k] : L_0 \rightarrow L(E)$ ". Die folgenden beiden Beispiele zeigen, dass für einen einfachen, modularen Verband  $L_0$  Existenz bzw. Eindeutigkeit unzerlegbarer  $k$ -Darstellungen i.a. unabhängige Eigenschaften sind.

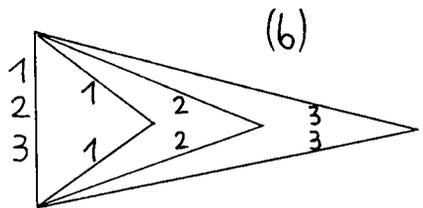
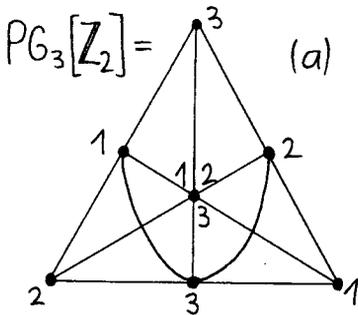
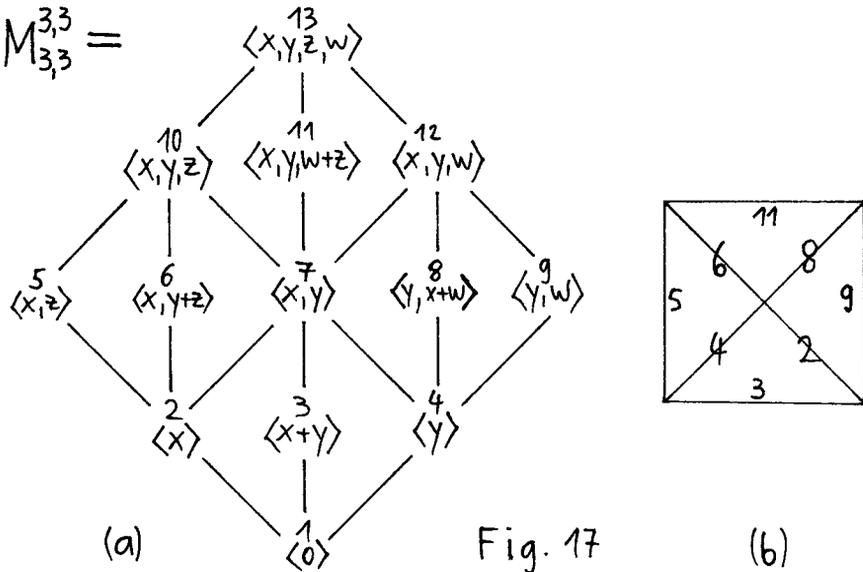


Fig. 16

**Beispiel 1:** (nicht  $\forall k$  Existenz, aber Eindeutigkeit) Da die (einfache) projektive Ebene  $PG_3[\mathbb{Z}_2]$  gemäss Po[23] die Primeigenschaft hat, sind alle unzerlegbaren  $k$ -Darstellungen  $\rho : PG_3[\mathbb{Z}_2] \rightarrow L(E)$  3-dimensional. Man sieht nun leicht (z.B. [1],S.121), dass solche  $\rho$ 's nur für  $\text{char}(k) = 2$  möglich sind, aber dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind.



**Beispiel 2:** ( $\forall k$  Existenz, aber nicht Eindeutigkeit) Der Verband  $M_{3,3}^{3,3}$  aus Fig. 17 (a) ist klarerweise einfach (alle Primquotienten sind untereinander projektiv). Sei  $k$  beliebig und  $x, y, z, w$  sei Basis eines  $k$ -Vektorraumes  $E$ . Die Definition der treuen  $k$ -Darstellung  $\rho_1 : M_{3,3}^{3,3} \rightarrow L(E)$  ist aus Fig. 17(a) ersichtlich. Wir behaupten, dass für  $k \neq \mathbb{Z}_2$  jedes  $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$  Anlass zu einer weiteren unzerlegbaren  $k$ -Darstellung  $\rho_\lambda : M_{3,3}^{3,3} \rightarrow L(E)$  gibt, die nicht zu  $\rho_1$  isomorph ist. Man erhält  $\rho_\lambda$  aus  $\rho_1$ , indem man den Raum  $\langle x, y, w + z \rangle$  durch  $\langle x, y, w + \lambda z \rangle$  ersetzt. Angenommen, es gäbe einen Isomorphismus  $\varphi : E \rightarrow E$  mit  $(\forall a \in M_{3,3}^{3,3}) \varphi(\rho_1 a) = \rho_\lambda a$ .

$x \mapsto \alpha x$ ,  $y \mapsto \beta y$ ,  $x + y \mapsto \alpha x + \beta y = \epsilon(x + y)$  impliziert (i)  $\beta = \epsilon = \alpha$ .  $w \mapsto \beta' y + \delta w$ ,  $x + w \mapsto \alpha x + \beta' y + \delta w = \beta'' y + \zeta(x + w)$  impliziert (ii)  $\delta = \zeta = \alpha$ .  
 $z \mapsto \alpha' x + \gamma z$ ,  $y + z \stackrel{(i)}{\mapsto} \alpha y + \alpha' x + \gamma z = \alpha'' x + \eta(y + z)$  impliziert (iii)  $\gamma = \eta = \alpha$ . Nun führt  $w + z \stackrel{(ii)(iii)}{\mapsto} (\beta' y + \alpha w) + (\alpha' x + \alpha z) = \alpha''' x + \beta''' y + \vartheta(w + \lambda z)$  zum Widerspruch  $\vartheta = \alpha = \vartheta \lambda$ .

(Man kann sich überlegen, dass man durch Variation von  $\lambda \in k \setminus \{0\}$  bis auf Isomorphie alle treuen  $k$ -Darstellungen von  $M_{3,3}^{3,3}$  erhält.)

Wegen ihrer "schlechten" Darstellungstheorie können die Verbände  $PG_3[\mathbb{Z}_2]$  bzw.  $M_{3,3}^{3,3}$  keine Dreieckverbände sein; wir wollen sehen, wie stark sich die "Geometrien" von  $J(PG_3[\mathbb{Z}_2])$  und  $J(M_{3,3}^{3,3})$  von einem Dreieckmatroid unterscheiden!

Die projektive Ebene  $PG_3[\mathbb{Z}_2]$  wird üblicherweise durch Fig. 16(a) dargestellt (die 7 Punkte bzw. 7 Geraden (eine "Gerade" ist krumm) entsprechen inklusionstreu den 1-dimensionalen bzw. 2-dimensionalen Teilräumen von  $\mathbb{Z}_2^3$ ). Daraus ersieht man, dass  $J(PG_3[\mathbb{Z}_2])$  zu einem  $(\Delta 5)$  erfüllenden  $\Delta$ -Matroid gemacht werden kann (Fig. 16(b)). Wie bei  $M_4$  (Fig. 13) ist aber  $(\Delta 4)$  verletzt:  $rg(J(PG_3[\mathbb{Z}_2])) = 4 \neq 3 = \delta(PG_3[\mathbb{Z}_2])$ .  $J(M_{3,3}^{3,3})$  kann zu einem  $(\Delta 4)$ ,  $(\Delta 5)'$  erfüllenden Polygonmatroid gemacht werden (Fig. 17(b)). Mit Satz 8 folgt somit direkt die "universelle" Darstellbarkeit von  $M_{3,3}^{3,3}$ . Dass für festes  $k$  die treuen Darstellungen von  $M_{3,3}^{3,3}$  nicht eindeutig bestimmt sind, ist letztlich auf die Lage der vier zu  $M_3$  isomorphen Unterverbände (der Länge 2) zurückzuführen, welche einen sogenannten  $M_3$ -Kreis bilden (genaue Definition steht in Mitschke-Wille[22]).

**Vermutung 23:** (Herrmann, Wild) *Für jeden endlichen, modularen Verband  $L$  sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $L$  ist  $\Delta$ -Verband.
- (ii)  $L$  ist gut.
- (iii)  $L$  besitzt keinen Unterverband  $M_4$  und keinen  $M_3$ -Kreis.
- (iv)  $|J(L)| = 2\delta(L) - |sp(L)|$ .

**"Beweis":** (i)  $\implies$  (ii). Dies ist der Inhalt von Hauptsatz 7. (ii)  $\implies$  (iii). Existiert ein Unterverband  $M_4 \subseteq L$ , so kann man sich überlegen, dass auch ein  $M_4 \subseteq L$  der Länge 2 existiert; daher besitzt  $L$  keine  $\mathbb{Z}_2$ -Darstellung (Satz 2). Gäbe es einen  $M_3$ -Kreis in  $L$ , so verallgemeinere man Bsp. 2, um für festes  $k$  nichtisomorphe, treue Darstellungen von  $L$  zu erhalten (eine genaue Durchführung steht noch aus). (iii)  $\implies$  (i).  $L$  erfülle (iii) und es sei  $a < 1$ . Dann gilt (iii) klarerweise auch für den Unterverband  $a/0 \subseteq L$  und wir können annehmen, dass  $a/0$   $\Delta$ -Verband ist (Induktion). C. Herrmann konnte zeigen (mündliche und briefliche Mitteilungen), dass dann auch  $L$   $\Delta$ -Verband sein muss. (i)  $\implies$  (iv). Ist  $L$  einfach, so ist  $|J(L)| \stackrel{(17)}{=} 2(|D(L)|+1)-1 \stackrel{(18)}{=} 2\text{rg}(J(L))-1 \stackrel{(\Delta^4)}{=} 2\delta(L)-1$ . Für ein reduzibles  $L$  folgt die Behauptung mit (10), Satz 10 (i) durch Summation. (iv)  $\implies$  (i) beweist man ähnlich wie "(iii)  $\implies$  (i)" mit Induktion nach  $\delta(L)$  (schwierig).  $\square$

**Bemerkung:** Falls Vermutung 23 zutrifft, so folgt aus der Äquivalenz von (i) und (iii) unmittelbar, dass jeder Unterverband eines  $\Delta$ -Verbands wieder  $\Delta$ -Verband ist. C. Herrmann und ich hoffen, Vermutung 23 in absehbarer Zeit zu einem Satz zu befördern (siehe [17]).

## 2. Das Kongruenzproblem in Sesquilinearräumen unendlicher Dimension

### 2.1 Problemstellung und Formulierung von Hauptsatz 25

Sei  $k$  ein (nicht notwendig kommutativer) Körper und  $\nu : k \rightarrow k$  ein Antiautomorphismus, d.h. eine Bijektion mit  $(\alpha + \beta)^\nu = \alpha^\nu + \beta^\nu$ ,  $(\alpha\beta)^\nu = \beta^\nu\alpha^\nu$ . Ist  $E$  ein  $k$ -Vektorraum und  $(, ) : E \times E \rightarrow k$  eine in beiden Argumenten additive Abbildung, so heisst  $(, )$  Sesquilinearform (bezüglich  $(k, \nu)$ ), falls für alle  $x, y \in E, \lambda \in k$  gilt  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  und  $(x, \lambda y) = (x, y)\lambda^\nu$ . Die Sesquilinearform  $(, )$  heisst orthosymmetrisch, falls  $(\forall x, y \in E) (x, y) = 0 \implies (y, x) = 0$ . In diesem Fall ist also  $x \perp y \iff (x, y) = 0$  eine symmetrische Relation. Im ganzen Kapitel meinen wir mit "Sesquilinearform" stets stillschweigend eine orthosymmetrische Sesquilinearform. Für einen Unterraum  $V \subseteq E$  ist  $V^\perp := \{x \in E | (\forall y \in V)(x, y) = 0\}$  der Orthogonalraum von  $V$ .  $E$  heisst regulär (a.a.O. "nicht ausgeartet"), falls  $E^\perp = \{0\}$ . Eine orthogonale Zerlegung des Teilraums  $X \subseteq E$  ist eine Zerlegung  $X = \bigoplus \{X_i | i \in I\}$ , sodass  $(\forall i \neq j \in I)(\forall x_i \in X_i)(\forall x_j \in X_j) x_i \perp x_j$ . Für eine solche Zerlegung schreiben wir zukünftig  $X = \bigoplus \{X_i | i \in I\}$ . Ist  $[E, (, )]$  ein Sesquilinearraum und  $\Phi : E \rightarrow E$  ein Automorphismus mit  $(\forall x, y \in E)(x, y) = (\Phi x, \Phi y)$ , so ist  $\Phi$  eine Isometrie. Zwei Teilräume  $V, V' \subseteq E$  heissen kongruent (in  $E$ ), falls es eine Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  mit  $\Phi(V) = V'$  gibt. Unter dem Kongruenzproblem für  $E$  verstehen wir die Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen an Teilräume  $V, V' \subseteq E$  für das Bestehen von Kongruenz.

Eine triviale notwendige Bedingung für Kongruenz ist natürlich, dass  $V$  und  $V'$  isometrisch sind ( $V \cong V'$ ), d.h. es existiert eine Isometrie  $\psi : V \rightarrow V'$ . Der Erweiterungssatz von Witt (G[10],S.376) besagt, dass für beliebige, endlichdimensionale, reguläre Sesquilinearräume  $E$  über einem Körper  $k$  der Charakteristik  $\neq 2$  diese Bedingung schon hinreichend ist. Ist  $\text{char}(k) = 2$ , so muss man neben  $V \cong V'$  noch eine weitere (notwendige) Bedingung hinzunehmen, um Kongruenz zu erzwingen (G[10],S.381).

Für endlichdimensionale Sesquilinearräume ist also das Kongruenzproblem in befriedigender Weise gelöst. Ist aber  $\dim(E) = \aleph_\alpha$  eine unendliche Kardinalzahl, so ist  $V \simeq V'$  und  $\text{char}(k) \neq 2$  i.a. nicht mehr hinreichend für Kongruenz! (Gegenbsp. sind leicht zu finden, z.B. G[12],S.133.)

Wir wollen eine Verfeinerung der notwendigen Bedingung  $V \simeq V'$  herleiten. Ist  $\Phi : E \rightarrow E$  eine Isometrie mit  $\Phi(V) = V'$ , so gilt auch  $\Phi(V^\perp) = V'^\perp$ ,  $\Phi(V \cap V^\perp) = V' \cap V'^\perp$ ,  $\Phi(V + V^\perp) = V' + V'^\perp, \dots$ , d.h.  $\Phi$  ist mit den Operationen  $\perp, \cap, +$  verträglich. Ist weiter  $\sigma_\gamma$  für jede Ordinalzahl  $\gamma \geq 0$  die durch die Nullumgebungs-basis  $U_\gamma := \{Y^\perp | Y \subseteq E, \dim(Y) < \aleph_\gamma\}$  gegebene lineare Topologie auf  $E$  im Sinn von Kö[19], so folgt leicht, dass  $\Phi : E \rightarrow E$  für alle  $\gamma$  ein  $\sigma_\gamma$ -Homöomorphismus ist (für  $\gamma > \alpha$  ist  $\sigma_\gamma$  diskret). Dies motiviert die folgende Definition: Für einen Unterraum  $V$  eines Sesquilinearraumes  $[E, (,)]$  sei  $\mathbf{V}(V) = \mathbf{V}(V, E)$  der von  $V$  in  $L(E)$   $\perp$ -stabil und  $\sigma_\gamma$ -stabil erzeugte Unterverband mit  $(0), E \in \mathbf{V}(V)$ . Obige Überlegungen zeigen also, dass  $\mathbf{V}(V) \simeq \mathbf{V}(V')$  eine notwendige Bedingung für die Kongruenz von  $V$  und  $V'$  ist. Natürlich ist die Verbandsisomorphie  $\eta : \mathbf{V}(V) \rightarrow \mathbf{V}(V')$  indextreu (vgl. (34)) und vertauscht mit  $\perp$  und  $\sigma_\gamma$ . Fortan heisse ein Verbandsisomorphismus  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  ( $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \subseteq L(E)$ ) kurz zulässig, falls  $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$  bezüglich  $\perp, \sigma_\gamma$  abgeschlossen sind und  $\eta$  mit  $\perp, \sigma_\gamma$  vertauscht und indextreu ist. Die Topologie  $\sigma_0$  nimmt eine Sonderstellung ein, denn gemäss G[10],S.35 gilt

$$(37) \quad (\forall U \subseteq E) \quad \sigma_0 U = U^{\perp\perp},$$

wobei  $U^{\perp\perp}$  eine Abkürzung für  $(U^\perp)^\perp$  sei und  $\sigma_\gamma U$  allgemein den  $\sigma_\gamma$ -Abschluss von  $U$  bezeichne.

Wir wollen in diesem Kapitel u.a. der Frage nachgehen, ob  $\mathbf{V}(V) \simeq \mathbf{V}(V')$  in diagonalen Räumen  $[E, (,)]$  auch eine hinreichende Bedingung für Kongruenz ist (Abschnitt 2.4). Dabei heisst nach G[12],Bä[3] ein regulärer Sesquilinearraum  $[E, (,)]$  diagonal, falls eine orthogonale Zerlegung  $E = \bigoplus \{E_i | i \in I\}$  mit  $(\forall i \in I) \dim(E_i) < \aleph_0$  existiert. Der folgende Satz von Gross bildet den Ausgangspunkt unserer Unter-

suchungen. Zuvor noch eine Definition: Ein Raum  $[E, (,)]$  heisst alternierend, falls  $(\forall x \in E)(x, x) = 0$  (dann muss  $k$  kommutativ,  $\nu = \text{id}$  und  $(\forall x, y \in E)(x, y) = -(y, x)$ ) sein; G[10],S.10).

**Satz 24** (Gross[11]): Sei  $[E, (,)]$  ein regulärer, diagonal, alternierender Raum. Ist  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  ( $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \subseteq L(E)$ ) ein zulässiger Verbandisomorphismus, so sind die folgenden Bedingungen hinreichend für die Existenz einer Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  mit  $(\forall A \in \mathbf{V}) \eta(A) = \Phi(A)$ :

$$(38) \quad \mathbf{V} \text{ ist endlich und distributiv,}$$

$$(39) \quad \dim(E) \leq \aleph_{\omega_1}.$$

**Bemerkung:** Satz 24 besagt also, dass für distributive  $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$  der durch Satz 19 garantierte,  $\eta$  induzierende Isomorphismus  $\Phi : E \rightarrow E$  sogar isometrisch gewählt werden kann! Schuppli hat in [24] dieses Ergebnis verallgemeinert: Die Bedingung, dass  $E$  alternierend sei, wird abgeschwächt zu gewissen Bedingungen an Quotienten  $D/\hat{D}$  in  $\mathbf{V}$  und es werden auch gewisse unendliche, distributive Verbände zugelassen, nämlich solche mit S.41(iv) und einer orthogonalen Zerlegung S.41(i)' (in Satz 38 befassen wir uns ebenfalls mit nichtalternierenden Räumen).

Der Gross'sche Satz ist für nichtdistributive Dreieckverbände i.a. falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:  $k$  sei ein Körper mit  $\sqrt{-1} \notin k$  und  $e, f$  sei Basis eines regulären, alternierenden Raumes  $E : (e, e) = (f, f) = 0, (e, f) = 1$ . Sei  $\mathbf{V} := \{\langle 0 \rangle, \langle e \rangle, \langle f \rangle, \langle e + f \rangle, E\}$ ,  $\mathbf{V}' := \{\langle 0 \rangle, \langle e \rangle, \langle f \rangle, \langle e - f \rangle, E\}$  (also  $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \simeq M_3$ ) und  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  sei durch  $\langle 0 \rangle \mapsto \langle 0 \rangle, \langle e \rangle \mapsto \langle e \rangle, \langle f \rangle \mapsto \langle f \rangle, \langle e + f \rangle \mapsto \langle e - f \rangle, E \mapsto E$  definiert. Da  $A^\perp = A$  für  $A = \langle e \rangle, \langle f \rangle, \langle e + f \rangle, \langle e - f \rangle$ , sind  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{V}'$  bezüglich  $\perp$  abgeschlossen und  $\eta$  vertauscht trivialerweise mit  $\perp$ . Wäre nun  $\eta$  durch eine Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  induziert, so folgte  $\Phi e = \lambda e, \Phi f = \mu f, \Phi(e + f) = \lambda e + \mu f = \nu(e - f)$ . Also ist  $\mu = -\lambda$ , was zum Widerspruch  $(e, f) = (\Phi e, \Phi f) = (\lambda e, -\lambda f) = -\lambda^2(e, f)$  führt.

Trotzdem ist es möglich, eine Bedingung zu formulieren, welche die isometrische Induziertheit impliziert. Für einen Sesquilinearraum  $E$  und einen bezüglich  $\perp$  und  $\sigma_\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) abgeschlossenen, artinschen Dreieckverband  $\mathbf{V} \subseteq L(E)$  und ein festes  $\theta \in sp(\mathbf{V})$  definieren wir folgende Aussage:

$$\begin{aligned}
 & \text{Es ist } \mathbf{V}_\theta \simeq D_2 \text{ oder es existiert eine } (J^\theta(\mathbf{V}), D^\theta(\mathbf{V}))\text{-Aufzählung} \\
 (\Delta 6) \quad & (P_0, Q_1, P_1, \dots, Q_t, P_t) \text{ (S.16), derart dass für alle } 1 \leq i \leq t \\
 & \epsilon_i := \min\{\gamma \mid \sigma_\gamma P_i = P_i, \sigma_\gamma Q_i = Q_i, \sigma_\gamma R_i = R_i\} \geq 1 \\
 & \text{und } \sigma_{\epsilon_i - 1}(P_i \cap Q_i) \supseteq P_i.
 \end{aligned}$$

(Falls  $\epsilon_i$  eine Limeszahl ist, so sei  $\sigma_{\epsilon_i - 1}(P_i \cap Q_i) \supseteq P$  eine Abkürzung für  $(\forall \gamma < \epsilon_i) \sigma_\gamma(P_i \cap Q_i) \supseteq P_i$ .)

Neben der Verallgemeinerung von (38), wollen wir auch die Schranke  $\aleph_{\omega_1}$  in (39) durch die erste schwache Mahlo-Zahl  $\mathfrak{m}_0$  ersetzen. Schwache Mahlo-Zahlen sind spezielle schwach unerreichbare Zahlen; die genaue Definition findet sich auf S.78 in 2.3. Unser Ziel ist die folgende Verallgemeinerung von Satz 24.

**Satz 25:** *In Satz 24 von Gross sind die Prämissen (38) und (39) abschwächbar zu*

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & \mathbf{V} \text{ ist abzählbarer, artinscher Dreieckverband,} \\
 & \text{derart dass } (\Delta 6) \text{ gilt für alle } \theta \in sp(\mathbf{V}).
 \end{aligned}$$

$$(41) \quad \dim(E) < \mathfrak{m}_0.$$

Ist  $\mathbf{V}$  aus der Varietät  $\{M_3\}^e$ , so bedeutet  $(\Delta 6)$  einfach, dass es zu jedem Dreieck  $\Delta \in D(\mathbf{V})$  eine Permutation  $\Delta = (R, Q, P)$  gibt, sodass  $\sigma_{\epsilon - 1}(P \cap Q) \supseteq P$ . Ist ausserdem  $\dim(E) \leq \aleph_0$ , so ist  $\sigma_{\epsilon - 1} = \sigma_0$  und man erhält das

**Korollar 26:** *Sei  $E$  regulär, alternierend mit  $\dim(E) \leq \aleph_0$ . Ist  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  ein zulässiger Verbandsisomorphismus zwischen artinschen Verbänden aus der Varietät  $\{M_3\}^e$  und besitzt jedes  $\Delta \in D(\mathbf{V})$  eine Permutation  $\Delta = (R, Q, P)$  mit  $(P \cap Q)^{\perp\perp} \supseteq P$ , so ist  $\eta$  von einer Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  induziert (Beweis auf S.66).*

Zunächst einige Worte zur inskünftig verwendeten Notation. Es ist vorteilhaft, statt eines festen Raumes  $[E, (,)]$  zwei isomorphe Kopien  $[E, (,)]$  und  $[E', (,)]$  zu betrachten. Ist  $\dim(E)$  unendlich, so ist  $\aleph_\alpha$  für  $\dim(E)$  reserviert. Einfachheitshalber definieren wir  $(\forall A \in \mathbf{V}) A' := \eta A$ . Weiter ist es im Beweis von Satz 25 oft angenehmer, mit den Bezeichnungen  $\tau_\gamma := \sigma_{\gamma+1}$  ( $\gamma \geq 0$ ) zu arbeiten ( $\sigma_0$  geht nicht verloren, da gemäss (37) " $\sigma_0 = \perp\perp$ "). Schliesslich sei schon hier bemerkt, dass sich die Bedingung " $\mathbf{V}$  abzählbar" durch schwächere (aber unschönere) Forderungen ersetzen lässt. Setzt man  $\tau_\gamma(\mathbf{V}) := \{\tau_\gamma A \mid A \in \mathbf{V}\}$  und  $D(\gamma, \mathbf{V}) := \{D \in \mathbf{V} \mid D \text{ irreduzibel, kompakt, } \dim(D/\hat{D}) = \aleph_\gamma\}$ , so muss gelten

$$(42) \quad (\forall \gamma < \alpha) \quad |\tau_\gamma(\mathbf{V})| \leq \aleph_\gamma,$$

$$(43) \quad (\forall \gamma < \alpha) \quad |D(\gamma, \mathbf{V})| \leq \aleph_\gamma.$$

(Man beachte, dass (42),(43) im Fall  $\dim(E) \leq \aleph_0$  leere Bedingungen sind; deshalb musste man in Korollar 26 auch nicht mehr " $\mathbf{V}$  abzählbar" voraussetzen.)

Wir werden zuerst Satz 24 im Detail beweisen. Dabei weichen wir an einigen Stellen etwas vom Aufbau in G[11] ab, um einen besseren Anschluss an Satz 25 zu erhalten, der danach bewiesen wird (ab S.66). Wie in G[11] gliedern wir unsere Überlegungen in einen isometrischen Teil 2.2 und einen mengentheoretischen Teil 2.3. Der Rest dieses Abschnitts ist einer Motivation und Übersicht des Beweisaufbaus gewidmet.

Es seien  $E, E'$  und  $\mathbf{V} \subseteq L(E)$ ,  $\mathbf{V}' \subseteq L(E')$  wie in Satz 24. Man ist versucht, die Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E'$  wie folgt zu konstruieren. Gemäss Satz 18 und Satz 19 existieren Zerlegungen  $E = \bigoplus \{W_{\theta,i} \mid \theta \in sp(\mathbf{V}), i \in I(\theta)\}$  bzw.  $E' = \bigoplus \{W'_{\theta,i} \mid \theta \in sp(\mathbf{V}'), i \in I'(\theta)\}$  von  $\mathbf{V}$  bzw.  $\mathbf{V}'$  mit  $(\forall \theta \in sp(\mathbf{V})) |I(\theta)| = |I'(\theta)|$ . Selbst falls es gelingt, für alle  $\theta, i$  eine Isometrie  $\varphi_{\theta,i} : W_{\theta,i} \rightarrow W'_{\theta,i}$  zu konstruieren, liefert jedoch die Zusammensetzung der  $\varphi_{\theta,i}$  bloss dann eine Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E'$ , wenn die obigen

Zerlegungen von  $V$  und  $V'$  orthogonale Zerlegungen sind. Da dies i.a. natürlich nicht der Fall ist, müssen wir  $\Phi : E \rightarrow E'$  anders aufbauen.

$\Phi$  soll als Vereinigung einer aufsteigenden Kette  $(\varphi_i : X_i \rightarrow X'_i \mid i \geq 0)$  von "partiellen" Isometrien mit den folgenden Eigenschaften konstruiert werden (wir unterdrücken die Indices  $i$ ):

$$(44) \quad (\forall A, B \in V) \quad (X + A) \cap (X + B) = X + (A \cap B),$$

$$(44') \quad (\forall A', B' \in V') \quad (X' + A') \cap (X' + B') = X' + (A' \cap B'),$$

$$(45) \quad (\forall A \in V) \quad \varphi(X \cap A) = X' \cap A'.$$

(44) und (44') entsprechen Bedingung (23) von Seite 29. Da jetzt lineare Zerlegungen von  $V, V'$  nichts nützen (siehe oben), sprechen wir nicht mehr von "Pseudosummanden". Aus den Ergebnissen von Kapitel 1 folgt sofort, dass sich jede Isometrie  $\varphi : X \rightarrow X'$  mit (44), (44'), (45) zu einer linearen Abbildung  $\tilde{\varphi} : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  mit (44), (44'), (45) fortsetzen lässt (vgl. S.61). In 2.2 zeigen wir in mehreren Schritten, dass man  $\tilde{\varphi}$  auch wieder isometrisch wählen kann, d.h. es gilt

$$(46) \quad (\forall w \in W)(\forall y \in X \oplus W) \quad (w, y) = (\tilde{\varphi}w, \tilde{\varphi}y).$$

Wir skizzieren die Grundidee.

1. Fall:  $\dim(X) < \aleph_0$ . (46) bedeutet das Lösen eines endlichen Gleichungssystems, was mit dem "Kaplansky-Lemma" (62) bewerkstelligt werden kann (die erste Version von Satz 24 in G[10], S.113 beschränkt sich auf diesen Fall, d.h. es ist  $\dim(E) \leq \aleph_0$  vorausgesetzt).

2. Fall:  $\dim(X) \geq \aleph_0$ . Mit dem folgenden Trick von Gross gelingt es auch in diesem Fall, (46) auf das Lösen eines endlichen Gleichungssystems zurückzuführen. Lässt sich nämlich  $\varphi : X \rightarrow X'$  partitionieren in

$$(47) \quad \begin{aligned} X &= X_h \oplus U \quad (E = X_h \oplus X_h^\perp, \dim(U) < \infty), \\ X' &= X'_h \oplus U' \quad (E' = X'_h \oplus X'^{\perp}_h, \dim(U') < \infty), \\ \varphi(X_h) &= X'_h, \quad \varphi(U) = U', \end{aligned}$$

d.h.  $X$  ist im wesentlichen ein orthogonaler Summand, so berechnet sich zu vorgegebenem  $w' \notin X'$  ein "winkeltreues" Pendant  $w \notin X$  folgendermassen: Es ist  $w' = \underline{w}' + w'_0 \in X'_h \oplus X'^{\perp}_h$  und für alle  $y = \underline{y} + y_0 \in X_h \oplus U$  ist  $(w', \varphi y) = (\underline{w}', \varphi \underline{y}) + (w'_0, \varphi y_0)$ . Setzt man  $\underline{w} := \varphi^{-1} \underline{w}'$  und bestimmt  $w_0 \in X_h \setminus U$  mit dem Kaplansky-Lemma derart, dass  $(\forall y_0 \in U) (w_0, y_0) = (w'_0, \varphi y_0)$ , so ist  $w := \underline{w} + w_0 \notin X$  ein zu  $w'$  winkeltreuer Vektor und  $\varphi : X \rightarrow X'$  lässt sich isometrisch zu  $\tilde{\varphi} : X \oplus \langle w \rangle \rightarrow X' \oplus \langle w' \rangle$  fortsetzen.

Eine Isometrie  $\varphi : X \rightarrow X'$  mit (47) heisst "partitionierte Isometrie" (genaue Definition auf S.57). Man sieht leicht, dass mit  $\varphi_i (= \varphi)$  auch  $\varphi_{i+1} (= \tilde{\varphi})$  partitioniert ist ((49)). Für  $\dim(E) > \aleph_0$  müssen wir aber  $\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow X'_\lambda$  auch für Limeszahlen  $\lambda < \dim(E)$  erklären. Es liegt nahe,  $\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow X'_\lambda$  als  $\bigcup_{i < \lambda} \varphi_i : \bigcup_{i < \lambda} X_i \rightarrow \bigcup_{i < \lambda} X'_i$  zu definieren. Klarerweise ist  $\varphi_\lambda$  isometrisch und erfüllt (44), (44'), (45) (S.57). Leider ist aber  $\varphi_\lambda$  i.a. nicht mehr partitioniert (S.59,72)! Indem man in die Räume  $X_i, X'_i$  ( $i < \lambda$ ) "vorsorgend" geeignete Teilräume steckt, kann man dennoch erreichen, dass die Grenzabbildung  $\varphi_\lambda$  wieder partitioniert ist. Dazu muss man aber beachtliche mengentheoretische Schwierigkeiten überwinden; dies wird der Inhalt von 2.3 sein.

## 2.2 Isometrischer Teil des Beweises

Die folgenden Grundbegriffe stammen aus G[11]. Sei  $E$  ein Vektorraum.  $S \subseteq L(E)$  heisst Partitionierung von  $E$ , falls entweder  $\dim(E) \leq \aleph_0$  und  $S = \emptyset$  ist, oder falls  $\dim(E) = \aleph_\alpha > \aleph_0$  ist und gilt

$$(48) \quad S = \bigcup \{S_\gamma \mid \gamma < \alpha\},$$

$$(\forall \gamma \leq \alpha) \quad E = \bigoplus S_\gamma \quad \text{und} \quad (\forall F \in S_\gamma) \quad \dim(F) = \aleph_\gamma,$$

$$(\forall \beta \leq \gamma < \alpha) \quad F \in S_\gamma \implies F = \bigoplus \{G \mid G \in S_\beta, G \subseteq F\}.$$

Es sei  $(E, S)$  ein partitionierter Raum der Dimension  $\aleph_\alpha > \aleph_0$ .  $X \subseteq E$  heisst homogen, falls  $X$  Summe von Räumen aus  $S_0$  ist. Sei  $\gamma < \alpha$ . Ein Teilraum  $X \subseteq E$  heisst  $\gamma$ -Raum, falls  $X$  Summe von  $\leq \aleph_\gamma$  vielen Räumen aus  $S_\gamma$  ist. Für ein  $X \subseteq E$  mit  $\dim(X) \leq \aleph_\gamma$

sei  $A(X, \gamma)$  der von  $X$  erzeugte  $\gamma$ -Raum. (Für  $x \in E$  sei  $x = \sum x_F \in \bigoplus \mathcal{S}_\gamma$ . Dann ist  $A(X, \gamma) = \bigoplus \{F \in \mathcal{S}_\gamma \mid (\exists x \in X) x_F \neq 0\}$ ). Ein partitionierter Unterraum  $X$  eines partitionierten Raumes  $(E, \mathcal{S})$  ist eine direkte Summe

$$X = X_{\gamma_m} \oplus X_{\gamma_{m-1}} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U$$

von endlich vielen  $\gamma_i$ -Räumen  $X_{\gamma_i}$  ( $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_m \leq \alpha$ ) und einem endlich dimensionalen  $U \subseteq E$ , derart dass  $A(U, 0) \cap (X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1}) = \{0\}$ .  $X_h := X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1}$  bezeichne den homogenen Teil von  $X$  (vgl.(47)). Man beachte, dass jeder endlich dimensionale Teilraum  $X \subseteq E$  ein partitionierter Unterraum ist ( $X_h = \{0\}$ ). Seien  $(E, \mathcal{S})$  und  $(E', \mathcal{S}')$  partitionierte Räume gleicher Dimension. Eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi : X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U \longrightarrow X'_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X'_{\gamma_1} \oplus U'$$

zwischen part. Unterräumen vom selben Typ  $(\gamma_m, \dots, \gamma_1)$  heisst partitionierter Isomorphismus, falls  $(\forall 1 \leq i \leq m) \varphi(X_{\gamma_i}) = X'_{\gamma_i}$  und  $\varphi(U) = U'$ . Für spätere Zwecke notieren wir

Sei  $\varphi : X = X_h \oplus U \rightarrow X' = X'_h \oplus U'$  ein part. Isomorphismus und sei

(49)  $\tilde{\varphi} : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  eine lineare Bijektion mit

$$\tilde{\varphi}|_X = \varphi, \dim(W) < \aleph_0, \tilde{\varphi}(W) = W', (\forall w \in W) \tilde{\varphi} \underline{w} = \underline{\tilde{\varphi} w}$$

(Def. von  $\underline{w}$  unten). Dann ist auch  $\tilde{\varphi}$  ein part. Isomorphismus.

Beweis von (49). Es sei  $E = X_h \oplus Y_h$ ,  $E' = X'_h \oplus Y'_h$ , wobei  $Y_h := \bigoplus \{F \in \mathcal{S}_0 \mid F \cap X_h = \{0\}\}$ ,  $Y'_h := \bigoplus \{F' \in \mathcal{S}'_0 \mid F' \cap X'_h = \{0\}\}$ . Ein  $w \in W$  bzw.  $w' \in W'$  werde diesbezüglich in  $w = \underline{w} + w_0$  bzw. in  $w' = \underline{w}' + w'_0$  zerlegt. Sei  $\underline{W} := \{\underline{w} \mid w \in W\}$ ,  $W_0 := \{w_0 \mid w \in W\}$ ,  $\underline{W}' := \{\underline{w}' \mid w' \in W'\}$ ,  $W'_0 := \{w'_0 \mid w' \in W'\}$ . Da  $(\forall w \in W) \tilde{\varphi} w_0 = \tilde{\varphi}(w - \underline{w}) = \tilde{\varphi} w - \tilde{\varphi} \underline{w} = \tilde{\varphi} w - \underline{\tilde{\varphi} w} = (\tilde{\varphi} w)_0$ , ist  $\tilde{\varphi}(W_0) = W'_0$  und somit  $X \oplus W = X_h \oplus (U \oplus W_0) \rightarrow X'_h \oplus (U' \oplus W'_0) = X' \oplus W'$ , d.h.  $\tilde{\varphi} : X_h \oplus Z \rightarrow X'_h \oplus Z'$  ist ein partitionierter Isomorphismus ( $Z := U \oplus W_0$ ,  $Z' := U' \oplus W'_0$ ).

**Bemerkung:** Schwächt man in (49) die Voraussetzung  $(\forall w \in W) \tilde{\varphi}w = \underline{\tilde{\varphi}}w$  zu  $\tilde{\varphi}(W) = \underline{W}'$  ab, so folgt i.a. nicht mehr  $\tilde{\varphi}(W_0) = W'_0$ .

Sei  $\mathbf{F}$  eine Familie von partitionierten Isomorphismen zwischen part. Unterräumen von  $(E, S)$  und  $(E', S')$ . Ein Element  $(\varphi : X_h \oplus U \rightarrow X'_h \oplus U') \in \mathbf{F}$  erfüllt die Ping-Pong-Bedingung (PP), falls gilt

(G[11],S.26) Jedes  $w \in W$  (bzw.  $w' \in W'$ ) kann zu  $\varphi$  adjungiert werden,  
 (PP) d.h. es existiert ein  $(\tilde{\varphi} : X_h \oplus Z \rightarrow X'_h \oplus Z') \in \mathbf{F}$  mit  $\tilde{\varphi} \supseteq \varphi$   
 und  $w \in \text{dom} \tilde{\varphi}$  (bzw.  $w' \in \text{im} \tilde{\varphi}$ ).

(PP) entspricht (30); dort adjungierten wir Vektoren  $w$  zu Unterräumen  $X \subseteq E$ , hier zu partitionierten Isomorphismen  $\varphi : X \rightarrow X'$ . Ferner sagen wir, dass  $\mathbf{F}$  die chain condition (CC) erfüllt, falls gilt

Für jede aufsteigende Kette  $\{\varphi_i : X_i \rightarrow X'_i \mid i \geq 0\} \subseteq \mathbf{F}$  für die  
 (CC)  $\bigcup \varphi_i : \bigcup X_i \rightarrow \bigcup X'_i$  (zufälligerweise) ein partitionierter  
 Isomorphismus ist, ist auch  $\bigcup \varphi_i \in \mathbf{F}$ .

Der folgende Satz, den Gross für  $\dim(E) \leq \aleph_{\omega_1}$  bewies und den wir in 2.3 auf  $\dim(E) < \mathfrak{m}_0$  ausdehnen werden, erledigt die mengentheoretischen Schwierigkeiten im Umgang mit partitionierten Räumen.

**Satz 33:** (G[11],S.26, Wild) Es seien  $(E, S)$  und  $(E', S')$  part. Räume der Dimension  $\kappa < \mathfrak{m}_0$  und  $B := (e_\iota \mid \iota < \kappa)$  bzw.  $B' := (e'_\iota \mid \iota < \kappa)$  seien Folgen in  $E$  bzw.  $E'$ . Ferner sei  $\mathbf{F}$  eine (CC) erfüllende Familie, derart dass gewisse  $(\varphi : X \rightarrow X') \in \mathbf{F}$  (PP) erfüllen:

$\dim(X) < \aleph_0 \implies \varphi$  erfüllt (PP),  
 (50)  $(\dim(X) \geq \aleph_0$  und  $\{e_\iota \mid \iota < \dim(X)\} \subseteq X$  und  
 $\{e'_\iota \mid \iota < \dim(X')\} \subseteq X') \implies \varphi$  erfüllt (PP).

Dann besitzt jedes  $(\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0) \in \mathbf{F}$  eine Erweiterung  $(\Phi : E \rightarrow E') \in \mathbf{F}$ .

Sei  $[E, (,)]$  ein regulärer Sesquilinearraum der Dimension  $\aleph_\alpha > \aleph_0$ . Ist  $S$  eine Partitionierung des Vektorraumes  $E$ , derart dass in (48)  $(\forall \gamma < \alpha) E = \bigoplus S_\gamma$ , so ist  $S$  eine orthogonale Partitionierung von  $E$ . Einen isometrischen, partitionierten Isomorphismus  $\varphi : X \rightarrow X'$  nennen wir partitionierte Isometrie.

Ziel dieses Abschnitts 2.2 ist der Beweis des folgenden Lemmas, das zusammen mit Satz 33 den Beweis unseres Hauptsatzes 25 ergibt (setze  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0$  gleich  $\langle 0 \rangle \rightarrow \langle 0 \rangle$ ).

**Lemma 27:** (G[11], Wild) *Es seien  $E, E', V \subseteq L(E), V' \subseteq L(E')$  wie in Satz 25 gegeben und es gelte (40), (41). Dann existieren orthogonale Partitionierungen  $S$  bzw.  $S'$  und Basen  $B = (e_\iota \mid \iota < \kappa)$  bzw.  $B' = (e'_\iota \mid \iota < \kappa)$  von  $E$  und  $E'$ , derart dass*

$$\mathbf{F} := \{\varphi : X \rightarrow X' \mid \varphi \text{ ist partitionierte Isometrie mit (44), (44'), (45)}\}$$

sowohl (CC) als auch (50) erfüllt.

Man sieht leicht, dass  $\mathbf{F}$  jedenfalls (CC) erfüllt (unabhängig von der Wahl von  $S, S'$ ): Sei dazu  $\{\varphi_i : X_i \rightarrow X'_i \mid i \geq 0\} \subseteq \mathbf{F}$  eine aufsteigende Kette. Klarerweise ist auch  $\varphi := \bigcup \varphi_i : \bigcup X_i \rightarrow \bigcup X'_i$  isometrisch. Zum Nachweis von (44) (und (44')) sei  $x \in (\bigcup X_i + A) \cap (\bigcup X_i + B)$ . Dann existiert ein  $j$  mit  $x \in (X_j + A) \cap (X_j + B) = X_j + (A \cap B) \subseteq \bigcup X_i + (A \cap B)$ ; die andre Inklusion ist trivial. Wegen  $(\bigcup X_i) \cap A = \bigcup (X_i \cap A) \rightarrow \bigcup (X'_i \cap A') = (\bigcup X'_i) \cap A'$ , gilt auch (45).

Die übrigen Behauptungen sind weniger trivial. Wir unterteilen den Beweis in fünf weitere Lemmata.

**Lemma 28:** (G[11], S.39) *Unter den Voraussetzungen von Satz 25 existieren Basen  $B = (e_\iota \mid \iota < \kappa)$  bzw.  $B' = (e'_\iota \mid \iota < \kappa)$  von  $E$  bzw.  $E'$ , so dass für alle (44), (44') erfüllenden linearen Bijektionen  $\varphi : X \rightarrow X'$  mit  $\aleph_0 \leq \dim(X) < \kappa$  und für alle  $w \in E, w' \in E'$  gilt:*

$$(51) \quad \langle e_\iota \mid \iota < \dim(X) \rangle \subseteq X, D := D(w, X) \text{ irred.} \implies \dim(D/\widehat{D}) > \dim(X),$$

$$(51') \quad \langle e'_\iota \mid \iota < \dim(X') \rangle \subseteq X', D' := D'(w', X') \text{ irred.} \implies \dim(D'/\widehat{D}') > \dim(X').$$

**Beweis:** Für  $\kappa \leq \aleph_0$  ist nichts zu beweisen. Sei nun  $\kappa = \aleph_\alpha > \aleph_0$ . Für  $\gamma < \alpha$  betrachten wir die auf Seite 52 definierte Menge  $\mathbf{D}(\gamma, \mathbf{V})$ :

$$(52) \exists \text{Basis } (e_\iota \mid \iota < \omega_\alpha) \subseteq E \text{ mit } (\forall \gamma < \alpha) D \in \mathbf{D}(\gamma, \mathbf{V}) \implies D \subseteq \langle e_\iota \mid \iota < \gamma \rangle + \hat{D}.$$

Beweis von (52). Gemäss (43) ist  $|\mathbf{D}(0, \mathbf{V})| \leq \aleph_0$ . Für alle  $D \in \mathbf{D}(0, \mathbf{V})$  sei  $D = \hat{D} \oplus \langle e_{D,\iota} \mid \iota < \omega \rangle$  und  $(e_\iota \mid \iota < \omega)$  sei eine Umnummerierung von  $(e_{D,\iota} \mid D \in \mathbf{D}(0, \mathbf{V}), \iota < \omega)$ . Ebenso ist  $|\mathbf{D}(1, \mathbf{V})| \leq \aleph_1$  und für  $D \in \mathbf{D}(1, \mathbf{V})$  sei  $D = \hat{D} \oplus \langle e_{D,\iota} \mid \iota < \omega_1 \rangle$ . Es sei  $(e_\iota \mid \omega \leq \iota < \omega_1)$  eine Umnummerierung von  $(e_{D,\iota} \mid D \in \mathbf{D}(1, \mathbf{V}), \iota < \omega_1)$ . So fortfahrend erhält man ein linear unabhängiges System  $\bigcup_{\gamma < \alpha} \langle e_\iota \mid \iota < \gamma \rangle$  mit (52). Ist  $\alpha$  eine Limeszahl, so ist es eine Basis von  $E$ . Andernfalls sind noch (beliebige) unabhängige Vektoren  $e_\iota$  ( $\omega_\alpha - 1 \leq \iota \leq \omega_\alpha$ ) hinzuzufügen.

Sei nun  $X \subseteq E$  mit  $\aleph_0 \leq \dim(X) < \aleph_\alpha$  und  $\langle e_\iota \mid \iota < \dim(X) \rangle \subseteq X$  vorgegeben. Ferner sei  $D := D(w, X)$  irreduzibel (wegen (44) und "V artinsch" ist  $D(w, X)$  wohldefiniert; vgl. S.38). Für  $\dim(D/\hat{D}) = \aleph_\alpha$  ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist  $D \in \mathbf{D}(\gamma, \mathbf{V})$  für ein  $\gamma < \alpha$ . Angenommen  $\dim(D/\hat{D}) = \aleph_\gamma \leq \dim(X)$ . Dann folgte  $w \in X + D \stackrel{(52)}{\subseteq} X + \langle e_\iota \mid \iota < \gamma \rangle + \hat{D} = X + \hat{D}$ , im Widerspruch zur Definition von  $D(w, X)$ . Also ist  $\dim(D/\hat{D}) > \dim(X)$ . Ebenso findet man eine Basis  $(e'_\iota \mid \iota < \kappa)$  von  $E^\gamma$  mit (51').  $\square$

Es sei  $E$  ein regulärer Sesquilinearraum der Dimension  $\aleph_\alpha$  und  $E = \bigoplus \mathbf{S}_{\gamma,*}$  sei eine orthogonale Zerlegung mit  $(\forall F \in \mathbf{S}_{\gamma,*}) \dim(F) \leq \aleph_\gamma$ . Wird  $A \subseteq E$  diesbezüglich zerlegt, d.h.  $A = \bigoplus \{A \cap F \mid F \in \mathbf{S}_{\gamma,*}\}$ , so ist  $A$   $\tau_\gamma$ -abgeschlossen, denn ist  $x = \sum \{x_F \mid F \in \mathbf{S}_{\gamma,*}\} \in E \setminus A$ , so ist für ein  $G \in \mathbf{S}_{\gamma,*}$  mit  $x_G \notin A \cap G$   $\{x + y \mid y \in G^\perp\}$  eine  $\tau_\gamma$ -Umgebung von  $x$ , welche zu  $A$  disjunkt ist.

Bemerkenswerterweise wird auch umgekehrt jedes  $\tau_\gamma$ -abgeschlossene  $A \subseteq E$  zerlegt; genauer gilt:

(<sup>n</sup>Gattersäge-Lemma?; Bă[3], S.1570) Sei  $E = \bigoplus \mathbf{S}_{\gamma,*}$  wie oben.

(53) Dann ist  $A \subseteq E$  genau dann  $\tau_\gamma$ -abgeschlossen, wenn eine gröbere Zerlegung  $E = \bigoplus \mathbf{S}_{\gamma,0}$  mit  $(\forall G \in \mathbf{S}_{\gamma,0}) \dim(G) \leq \aleph_\gamma$  existiert, so dass  $A = \bigoplus \{A \cap G \mid G \in \mathbf{S}_{\gamma,0}\}$ .

Wir verzichten auf den nichttrivialen Beweis und notieren gleich eine wichtige Konsequenz aus (53):

**Lemma 29:** (G[11],S.33) *Sei  $E$  ein regulärer, diagonaler Sesquilinearraum der Dimension  $\aleph_\alpha > \aleph_0$  und  $\mathbf{V} \subseteq L(E)$  sei ein bezüglich  $\perp$  und  $\tau_\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) abgeschlossener Unterverband mit*

$$(42) \quad (\forall \gamma < \alpha) \quad |\tau_\gamma(\mathbf{V})| \leq \aleph_\gamma.$$

*Dann existiert eine orthogonale Partitionierung  $\mathbf{S} = \bigcup \{\mathbf{S}_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$  von  $E$ , derart dass*

$$(54) \quad (\forall \gamma < \alpha)(\forall A \in \tau_\gamma(\mathbf{V})) \quad A = \bigoplus \{A \cap F \mid F \in \mathbf{S}_\gamma\}.$$

Beweis: Weil  $E$  diagonal ist, existiert eine orthogonale Zerlegung  $E = \bigoplus \mathbf{S}_{0,*}$  mit  $(\forall F \in \mathbf{S}_{0,*}) \dim(F) \leq \aleph_0$ . Wegen (42) können wir  $\tau_0(\mathbf{V}) = \{A_\iota \mid \iota < \omega\}$  schreiben. Gemäss (53) existiert eine gröbere Zerlegung  $\mathbf{S}_{0,0} \geq \mathbf{S}_{0,*}$ , welche  $A_0$  zerlegt. Dito existiert eine Zerlegung  $\mathbf{S}_{0,1} \geq \mathbf{S}_{0,0}$ , welche  $A_1$  zerlegt (und erst recht  $A_0$ ). So fortfahrend findet man Zerlegungen  $\mathbf{S}_{0,\iota} (\iota < \omega)$ , derart dass  $\mathbf{S}_{0,\iota}$  alle  $A_j$  ( $j \leq \iota$ ) zerlegt. Dann ist  $\mathbf{S}_0 := \lim\{\mathbf{S}_{0,\iota} \mid \iota < \omega\}$  eine aus  $\aleph_0$ -dimensionalen Räumen bestehende Zerlegung, die alle  $A_\iota (\iota < \omega)$  zerlegt (zur Definition von  $\mathbf{S}_0$ : Jedes  $F_0 \in \mathbf{S}_{0,0}$  bestimmt eindeutig eine aufsteigende Kette  $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$  ( $F_\iota \in \mathbf{S}_{0,\iota}$ ); es ist  $\mathbf{S}_0 = \{\bigcup \{F_\iota \mid \iota < \omega\} \mid F_0 \in \mathbf{S}_{0,0}\}$ ). Weiter ist wegen (42)  $\tau_1(\mathbf{V}) = \{B_\iota \mid \iota < \omega_1\}$ .  $\mathbf{S}_{1,0} \geq \mathbf{S}_0$  zerlege  $B_0$ . Wie vorhin bilde man  $\mathbf{S}_{1,0} \leq \mathbf{S}_{1,1} \leq \dots$ . Für Limeszahlen  $\iota < \omega_1$  sei  $\mathbf{S}_{1,\iota} := \lim\{\mathbf{S}_{1,j} \mid j < \iota\}$  und schliesslich sei  $\mathbf{S}_1 := \lim\{\mathbf{S}_{1,\iota} \mid \iota < \omega_1\}$ . Ebenso konstruiere man  $\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \dots$ . Ist  $\lambda < \alpha$  eine Limeszahl und sind alle  $\mathbf{S}_\gamma$  ( $\gamma < \lambda$ ) schon definiert, so sei  $\mathbf{S}_{\{\lambda\}} := \lim\{\mathbf{S}_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ .  $\mathbf{S}_{\{\lambda\}}$  zerlegt alle  $\tau_\gamma(A)$  ( $A \in \mathbf{V}, \gamma < \lambda$ ) und jedes  $F \in \mathbf{S}_{\{\lambda\}}$  hat Dimension  $\leq \aleph_\lambda$ . (53) liefert daher wieder ein  $\mathbf{S}_{\lambda,0} \geq \mathbf{S}_{\{\lambda\}}$ , welches das erste Element von  $\tau_\lambda(\mathbf{V})$  zerlegt. Man bilde wiederum  $\mathbf{S}_{\lambda,\iota} (\iota < \omega_\lambda)$  und setze  $\mathbf{S}_\lambda := \lim\{\mathbf{S}_{\lambda,\iota} \mid \iota < \omega_\lambda\}$ . So erhält man mit vollständiger Induktion eine

orthogonale Partitionierung  $S = \bigcup\{S_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$  mit (54) (vgl. Bemerkungen auf S.72).  $\square$

*Sei  $E$  regulärer, diagonalen Sesquilinearraum. Dann gilt*

$$(55) \quad (\forall M \subseteq L(E))(\forall \gamma \geq 0) \quad |M| \leq \aleph_\gamma \implies \tau_\gamma(\sum M) = \sum \tau_\gamma M,$$

*insbesondere*  $(\forall A \subseteq E) \quad \dim(A) \leq \aleph_\gamma \implies A = \tau_\gamma A.$

Beweis von (55). Es ist zu zeigen, dass  $\sum \tau_\gamma M$   $\tau_\gamma$ -abgeschlossen ist. Gemäss Lemma 29 existiert eine Zerlegung  $E = \bigoplus R$ ,  $(\forall F \in R) \dim(F) \leq \aleph_\gamma$ , welche alle  $\tau_\gamma A$  ( $A \in M$ ) zerlegt. Dann wird auch  $\sum\{\tau_\gamma A \mid A \in M\}$  zerlegt und ist deshalb  $\tau_\gamma$ -abgeschlossen (triviale Richtung von (53)).

Im allgemeinen ist  $\sigma_0(A+B) \neq \sigma_0 A + \sigma_0 B$ . In folgendem Spezialfall hat man jedoch Gleichheit.

$$(56) \quad \text{Ist } E \text{ regulär, diagonal und } E = \bigoplus R \text{ mit } |R| \leq \aleph_0, \text{ so gilt für } A \subseteq E$$

$$(\forall \gamma \geq 0) \quad A = \bigoplus\{A \cap F \mid F \in R\} \implies \sigma_\gamma A = \bigoplus\{\sigma_\gamma(A \cap F) \mid F \in R\}.$$

Beweis von (56). Wegen  $|\{A \cap F \mid F \in R\}| \leq \aleph_\gamma$ , folgt die Behauptung für  $\gamma \geq 1$  aus (55). Weil  $\sigma_0 A = A^{\perp\perp}$  und weil sich der Orthogonalraum von  $A$  komponentenweise berechnet, ist die Aussage für  $\sigma_0$  trivial.

Wir versehen nun  $E$ ,  $E'$  von Satz 25 mit Basen  $B$ ,  $B'$  aus Lemma 28 und mit orthogonalen Partitionierungen  $S$  bzw.  $S'$  aus Lemma 29. Sei  $\varphi : X_h \oplus U \rightarrow X'_h \oplus U'$  eine partitionierte Isometrie mit (44),(44'),(45),(50). Gemäss Lemma 27 müssen wir (PP) für  $\varphi$  zeigen, d.h. zu vorgegebenem  $w' \in E'$  eine (44),(44'),(45) erfüllende partitionierte Isometrie  $(\tilde{\varphi} : X_h \oplus Z \rightarrow X'_h \oplus Z') \supseteq \varphi$  mit  $w' \in \text{im } \tilde{\varphi}$  konstruieren! (Die Adjungierbarkeit eines  $w \in E$  beweist man analog.)

$$(57) \quad \text{Falls jedes } w' \in E' \text{ mit irreduziblem } D'(w', X') \text{ zu } \varphi \text{ adjungierbar ist,}$$

*so ist jedes } w' \in E' \text{ zu } \varphi \text{ adjungierbar.}*

Beweis von (57). Es sei  $w' \in E'$  und  $D'(w', X')$  sei o.B.d.A. reduzibel. Gemäss dem Muster von (32) beweist man problemlos, dass  $w' \in E'$  sogar oberhalb  $\varphi$  adjungierbar ist, d.h. zu jeder part. Isometrie  $(\tilde{\varphi} : X_h \oplus Z \rightarrow X'_h \oplus Z') \supseteq \varphi$  mit (44),(44'),(45) adjungierbar ist (hier braucht man, dass  $V, V'$  artinsch sind).

Damit haben wir das Problem auf irreduzible  $D'(w', X')$  zurückgeführt. Für  $w' \in X'$ , d.h. für  $D'(w', X') = \langle 0 \rangle$  setze man  $\tilde{\varphi} := \varphi$ . Andernfalls ist o.B.d.A.  $w' \in P'_0 \setminus X' + \widehat{P'_0}$ , wo  $P_0 \in J^\theta(V)$ ,  $P'_0 := (\sigma_\theta p_0)'$  (vgl. S.30). Falls  $V_\theta \not\cong D_2$ , so zerlege man  $w'(p_0) := w'$  entlang einer  $J^\theta(V)$ -Aufzählung  $(P'_0, Q'_1, P'_1, \dots, Q'_t, P'_t)$ . Dies liefert Vektoren  $w'(r) \in R' \setminus X' + \widehat{R'}$ . Wir können nun annehmen, unsere  $J^\theta(V)$ -Aufzählung sei gerade die in  $(\Delta 6)$  geforderte. Dies bedeutet bloss, dass unser  $w' = w'(p_0)$  zu einem  $\pm w'(r)$  wird. Es sei

$$(58) \quad W' := \langle w'(p_0), w'(p_1), \dots, w'(p_t) \rangle \quad (\text{für } V_\theta \simeq D_2 \text{ ist } t = 0)$$

Auf der linken Seite sei  $w(p_0) \in P_0 \setminus (X + \widehat{P_0})$ . Man bilde analog  $W := \langle w(p_0) \rangle$  bzw.  $W := \langle w(p_0), \dots, w(p_t) \rangle$  und setze  $\tilde{\varphi}|_X := \varphi$ ,  $\tilde{\varphi}w(p_i) := w'(p_i)$  für  $0 \leq i \leq t$ . Dadurch wird eine lineare Bijektion  $\tilde{\varphi} : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  definiert, welche gemäss Lemma 12 wieder (44),(44') erfüllt. Ausserdem ist  $(\forall A \in V) \tilde{\varphi}((X \oplus W) \cap A) = \tilde{\varphi}((X \cap A) \oplus (W \cap A)) \stackrel{(45)(27)}{=} (X' \cap A') \oplus \tilde{\varphi}(\langle wJ^\theta(a) \rangle) = (X' \cap A') \oplus \langle w'J^\theta(a) \rangle = (X' \cap A') \oplus (W' \cap A') = (X' \oplus W') \cap A'$ , d.h.  $\tilde{\varphi}$  erfüllt auch (45).

Im folgenden werden wir zeigen, wie das  $W \subseteq E$  zu wählen ist, so dass  $\tilde{\varphi}$  auch partitioniert und isometrisch wird! Das nächste Lemma zeigt dies für den primen Fall  $V_\theta \simeq D_2$  (womit Satz 24 erneut bewiesen ist) und bildet gleichzeitig die "Induktionsvoraussetzung" für den nichtprimen Fall.

**Lemma 30:** (G[11],S.35ff) *Sei  $P' \in V'$  kompakt und irreduzibel. Dann existiert zu jeder partitionierten Isometrie  $\varphi : X \rightarrow X'$  und zu jedem  $w' \in P' \setminus (X' + \widehat{P'})$  ein  $w \in P \setminus (X + \widehat{P})$ , derart dass  $\tilde{\varphi} : X \oplus \langle w \rangle \rightarrow X' \oplus \langle w' \rangle$ ,  $\tilde{\varphi}|_X := \varphi$ ,  $\tilde{\varphi}w := w'$ , eine partitionierte Isometrie ist.*

**Beweis:**  $\varphi$  ist von der Form  $\varphi : X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U \rightarrow X'_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X'_{\gamma_1} \oplus U'$ .

Wir betrachten die Zerlegungen

$$(59) \quad E = X_h \oplus X_h^\perp = X_h \oplus (A(U, \gamma_1) \oplus A(X, \gamma_1)^\perp),$$

$$(59') \quad E' = X'_h \oplus X_h'^\perp = X'_h \oplus (A(U', \gamma_1) \oplus A(X', \gamma_1)^\perp).$$

$w' = \underline{w}' + (w'_0 + y')$  sei die Zerlegung von  $w'$  bezüglich (59') (den Fall  $\varphi : U \rightarrow U'$  behandeln wir nebenbei). Wir werden in drei Schritten (61),(64),(65) ein Pendant  $w = \underline{w} + (w_0 + y)$  konstruieren mit  $w \in P \setminus (X + \hat{P})$ . Dabei ist  $\underline{w} := \varphi^{-1} \underline{w}'$  und für  $w_0$  wird gelten

$$(60) \quad (\forall x_0 \in U) \quad (w_0, x_0) = (w'_0, \varphi x_0).$$

Dann ist für alle  $x = \underline{x} + x_0$  aus  $X_h \oplus U$   $(w, x) = (\underline{w}, \underline{x}) + (w_0, x_0) = (\underline{w}', \varphi \underline{x}) + (w'_0, \varphi x_0) = (w', \varphi x)$  und wegen  $(w, w) = (w', w') = 0$  ( $E, E'$  sind alternierend!) ist  $\tilde{\varphi} : X \oplus \langle w \rangle \rightarrow X' \oplus \langle w' \rangle$ ,  $\tilde{\varphi}|_X := \varphi$ ,  $\tilde{\varphi}w := w'$ , dann eine partitionierte Isometrie (beachte (49)).

$$(61) \quad \underline{w} := \varphi^{-1} \underline{w}' \in (\tau_{\gamma_1} P) \cap X_h \text{ und } \exists w_0 \in (\tau_{\gamma_1} P) \cap A(U, \gamma_1) \text{ mit (60).}$$

Beweis von (61): Gemäss (54) werden  $\tau_{\gamma_1} P$  bzw.  $\tau_{\gamma_1} P'$  von (59) bzw. (59') zerlegt, insbesondere ist  $\underline{w}' \in (\tau_{\gamma_1} P') \cap X'_h$  und  $w'_0 \in (\tau_{\gamma_1} P') \cap A(U', \gamma_1)$ . Wegen (45) und weil  $\varphi$  partitionierter Isomorphismus ist, gilt  $\varphi((\tau_{\gamma_1} P) \cap X_h) = (\tau_{\gamma_1} P') \cap X'_h$ , woraus die erste Behauptung folgt. Zur Konstruktion von  $w_0$  benötigen wir das sogenannte "Kaplansky-Lemma":

(G[11], S.25) Sei  $F$  das Erzeugnis der linear unabhängigen Vektoren  $f_1, \dots, f_n$  im regulären Sesquilinearraum  $E$  und  $A \subseteq E$  ein Teilraum.

(62) Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$  beliebig, so ist für die Existenz eines  $x \in A$  mit  $(\forall 1 \leq i \leq n) (x, f_i) = \alpha_i$  notwendig und hinreichend, dass  $A^\perp \cap F = (0)$ .

Sei nun  $U' = (U' \cap (\tau_{\gamma_1} P')^\perp) \oplus \langle f'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle f'_n \rangle$ . Aus  $\varphi U = U'$  und (45) folgt  $\varphi(U \cap (\tau_{\gamma_1} P)^\perp) = U' \cap \tau_{\gamma_1} P'$ . Somit ist  $U = (U \cap (\tau_{\gamma_1} P)^\perp) \oplus \langle f_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle f_n \rangle$  ( $f_i := \varphi^{-1} f'_i$ ). Wegen  $(\tau_{\gamma_1} P)^\perp \cap \langle f_1, \dots, f_n \rangle = \langle 0 \rangle$  existiert gemäss (62) ein  $w_0 \in \tau_{\gamma_1} P$  mit  $(w_0, f_i) = (w'_0, f'_i)$ . Indem wir zur zweiten Komponente von  $w_0$  bezüglich (59) übergehen, können wir  $w_0 \in (\tau_{\gamma_1} P) \cap A(U, \gamma_1)$  annehmen. Da  $w'_0 \in (\tau_{\gamma_1} P') \cap A(U', \gamma_1)$ , können wir statt der  $f_i$  in obiger Gleichung beliebige  $x_0 \in U$  zulassen. (Für  $\varphi : U \rightarrow U'$  betrachten wir  $(U' \cap P'^\perp) \oplus \langle f'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle f'_n \rangle$  und finden mit (62) sogar ein  $w_0 \in P$  mit (60); Fortsetzung in (65)).

Als nächstes suchen wir ein  $y \in A(X, \gamma_1)^\perp$ , das unser  $\underline{w} + w_0$  von  $\tau_{\gamma_1} P$  nach  $P$  bringt. Dazu zerlege man  $\underline{w}' = w'_m + \dots + w'_1 \in X_{\gamma_m}^\perp \oplus \dots \oplus X_{\gamma_1}^\perp$  bzw.  $\underline{w} = w_m + \dots + w_1 \in X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_1}$ . Da  $\varphi$  partitioniert ist, ist  $(\forall 1 \leq i \leq m) w_i = \varphi^{-1} w'_i$ . Betrachtet man für  $1 \leq i \leq m$  die Zerlegung  $(X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_{i+1}}) \oplus X_{\gamma_i} \oplus (X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_i})^\perp$  (und das Analogon in  $E'$ ), so erhält man ähnlich wie im Beweis von (61) eine verfeinerte Aussage über  $\underline{w}$ :

$$(63) \quad (\forall 1 \leq i \leq m) \quad w_i \in (\tau_{\gamma_i} P) \cap X_{\gamma_i}.$$

Sei  $X := X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U \subseteq E$  partitionierter Unterraum und

$w_m + \dots + w_1 + w_0 \in X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_1} \oplus A(U, \gamma_1)$  mit

$$(64) \quad w_0 \in (\tau_{\gamma_1} P) \cap A(U, \gamma_1) \text{ und } (\forall 1 \leq i \leq m) w_i \in (\tau_{\gamma_i} P) \cap X_{\gamma_i}.$$

Dann  $\exists y^* \in A(X, \gamma_m) \cap A(X, \gamma_m)^\perp$  mit  $\sum_{i=0}^m w_i + y^* \in \tau_{\gamma_m} P$

und  $\exists y \in A(X, \gamma_1)^\perp$  mit  $\sum_{i=0}^m w_i + y \in P$ .

Beweis von (64). Wir zeigen induktiv, dass es für alle  $1 \leq i \leq m$  Vektoren  $y_j \in A(X_{\gamma_j} \oplus \dots \oplus U, \gamma_j) \cap A(X, \gamma_1)^\perp$  ( $1 \leq j \leq i$ ) gibt mit  $v(i) := \sum_{j=0}^i w_j + \sum_{j=1}^i y_j \in (\tau_{\gamma_i} P) \cap A(X_{\gamma_i} \oplus \dots \oplus U, \gamma_i)$ . Für  $i = 1$  setze man  $y_1 := 0$ . Die Behauptung gelte nun für ein festes  $i$ .  $\tau_{\gamma_{i+1}} P$  und  $\tau_{\gamma_i} P$  werden von

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 := (X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_{i+1}}) \oplus A(X_{\gamma_i} \oplus \dots \oplus U, \gamma_{i+1}) \oplus A(X, \gamma_{i+1})^\perp$$

zerlegt und wegen  $(\tau_{\gamma_i} P) \cap E_2 = \tau_{\gamma_i}((\tau_{\gamma_{i+1}} P) \cap E_2)$  (vgl. (56)) ist  $v(i)$  ein  $\tau_{\gamma_i}$ -Berührungspunkt von  $(\tau_{\gamma_{i+1}} P) \cap E_2$ ; mithin gibt es ein  $v(i) + y_{i+1} \in (v(i) + A(X_{\gamma_i} \oplus \cdots \oplus U, \gamma_i)^\perp) \cap ((\tau_{\gamma_{i+1}} P) \cap E_2)$ . Aus  $y_{i+1} \in A(X_{\gamma_i} \oplus \cdots \oplus U, \gamma_{i+1})$  und  $y_{i+1} \in A(X_{\gamma_i} \oplus \cdots \oplus U, \gamma_i)^\perp$  folgt unschwer, dass  $y_{i+1} \perp A(X, \gamma_1)$ . Somit ist  $v(i+1) := w_{i+1} + (v(i) + y_{i+1}) \in (\tau_{\gamma_{i+1}} P) \cap A(X_{\gamma_{i+1}} \oplus \cdots \oplus U, \gamma_{i+1})$ , d.h. die Behauptung gilt für  $i+1$ . Also ist  $y^* := \sum_{i=1}^m y_i \in A(X, \gamma_m) \cap A(X, \gamma_1)^\perp$  und  $\sum_{i=0}^m w_i + y^* = v(m) \in \tau_{\gamma_m} P$ . Sei  $v(m) + y_{m+1} \in (v(m) + A(X, \gamma_1)^\perp) \cap P$ . Man setze  $y := y^* + y_{m+1}$ . Damit ist (64) bewiesen.

Für ein  $y$  aus (64) ist also  $w := \underline{w} + w_0 + y \in P$ . Ist  $w \notin X + \hat{P}$ , so haben wir Glück gehabt und Lemma 30 ist bewiesen. Andernfalls wählen wir ein  $t \notin P \cap X^\perp \setminus (X + \hat{P}) \stackrel{(65)}{\neq} \emptyset$  und ersetzen  $w$  durch  $w + t = \underline{w} + w_0 + y + t = \underline{w} + \tilde{w}_0 + \tilde{y} \in P \setminus (X + \hat{P})$  (dabei ist  $t = t_{01} + t_{02} \in A(U, \gamma_1) \oplus A(U, \gamma_1)^\perp$ ,  $\tilde{w}_0 := w_0 + t_{01}$ ,  $\tilde{y} := y + t_{02}$ ; wegen  $t \in X^\perp$  bleibt  $w + t$  winkeltreu zu  $w'$ ). Zu zeigen bleibt

$$(65) \quad P \cap X^\perp \setminus (X + \hat{P}) \neq \emptyset.$$

Beweis von (65).

1.Fall:  $\dim(P/\hat{P}) \geq \aleph_0$ . Wegen (51) ist  $\delta := \dim(X) < \dim(P/\hat{P})$  und gemäss (68) ist  $\dim(E/X^\perp) \leq \delta$ . Somit ist  $\dim(P/P \cap X^\perp), \dim((\hat{P} + (X \cap P)) \cap X^\perp / \hat{P} \cap X^\perp) \leq \delta$ . Da andererseits  $\dim(P/\hat{P} \cap X) \geq \max\{\delta, \aleph_0\}$ , folgt  $P \cap X^\perp \supset (\hat{P} + (X \cap P)) \cap X^\perp \stackrel{(1)}{=} (\hat{P} + X) \cap P \cap X^\perp$ . Um einiges schwieriger ist der

2.Fall:  $\dim(P/\hat{P}) < \aleph_0$  (G[10],S.117,118). Wegen (51) muss dann auch  $\dim(X) < \aleph_0$  sein. Wir unterteilen den Beweis von (65) in (66) und (67).

$$(66) \quad w \in X + \hat{P} \implies P' \cap X'^\perp \setminus (X' + \hat{P}') \neq \emptyset,$$

$$(67) \quad P \cap X^\perp / ((P \cap X^\perp) \cap (X + \hat{P})) \simeq P' \cap X'^\perp / ((P' \cap X'^\perp) \cap (X' + \hat{P}')).$$

Beweis von (66). Man zerlege  $w \in (X + \hat{P}) \cap P = \hat{P} + (X \cap P)$  in  $w = p + y \in \hat{P} + (X \cap P)$ . Sei  $X = (X \cap \hat{P}^\perp) \oplus \langle f_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle f_n \rangle$ . Gemäss (45) ist  $X' = (X' \cap \hat{P}'^\perp) \oplus \langle f'_1 \rangle \oplus \cdots \oplus$

$\langle f'_n \rangle$  ( $f'_i := \varphi f_i$ ). Wegen (62) existiert ein  $p' \in \widehat{P}^i$  mit  $(\forall 1 \leq i \leq n) (p', f'_i) = (p, f_i)$ . Somit ist auch  $(\forall x \in X) (p', \varphi x) = (p, x)$ . Nun ist  $t' := -w' + d' + \varphi y \in P' \cap X'^{\perp}$ , denn für alle  $\varphi x \in X'$  ist  $(t', \varphi x) = -(w, x) + (p, x) + (y, x) = -(w, x) + (w, x) = 0$ . Da  $w' \notin \widehat{P}^i + X'$ , aber  $p' + \varphi y \in \widehat{P}^i + X'$ , ist  $t' \notin \widehat{P}^i + X'$ .

Den Beweis von (67) unterteilen wir in (68) bis (71). Für jeden regulären, diagonalen Sesquilinearraum  $E$  und für alle Unterräume  $X \subseteq Y \subseteq E$  gilt zunächst

$$\dim(E/X^{\perp}) = \dim(X), \quad \dim(X^{\perp}/Y^{\perp}) \leq \dim(Y/X),$$

$$(68) \quad \dim(Y) < \aleph_0 \implies Y = Y^{\perp\perp},$$

$$X = X^{\perp\perp} \text{ und } \dim(Y/X) < \aleph_0 \implies \dim(X^{\perp}/Y^{\perp}) = \dim(Y/X).$$

Beweis von (68): Sei vorerst  $K \subseteq E$ ,  $\dim(K) < \aleph_0$ . Nach G[10], S.22 ist  $\dim(E/K^{\perp}) = \dim(K)$ . Ist  $\dim(K) \geq \aleph_0$ , so existiert ein orthogonaler Summand  $K_0 \subseteq K$  mit  $\dim(K_0) = \dim(K)$ , woraus wieder  $\dim(E/K^{\perp}) = \dim(K)$  folgt. Sei nun  $Y \supseteq X$ ,  $Y = X \oplus K$ . Dann ist  $\dim(X^{\perp}/Y^{\perp}) = \dim(X^{\perp}/X^{\perp} \cap K^{\perp}) = \dim(X^{\perp} + K^{\perp}/K^{\perp}) \leq \dim(E/K^{\perp}) = \dim(K) = \dim(Y/X)$ . Die restlichen Behauptungen ergeben sich aus  $\dim(Y^{\perp\perp}/X^{\perp\perp}) \leq \dim(X^{\perp}/Y^{\perp}) \leq \dim(Y/X)$ .

$$(69) \quad P/P \cap X^{\perp} \simeq X^{\perp} + P/X^{\perp} \stackrel{(68)}{\simeq} X/X \cap P^{\perp} \stackrel{(45)}{\simeq} X'/X' \cap P'^{\perp} \simeq P'/P' \cap X'^{\perp}.$$

$$\widehat{P} + (X \cap P)/(\widehat{P} + (X \cap P)) \cap X^{\perp} \simeq \widehat{P} + (X \cap P) + X^{\perp}/X^{\perp} \stackrel{(68)}{\simeq}$$

$$(70) \quad X/\widehat{P}^{\perp} \cap (X \cap P)^{\perp} \cap X \stackrel{*}{\simeq} X'/\widehat{P}^i{}^{\perp} \cap (X' \cap P')^{\perp} \cap X' \simeq \dots$$

$$\simeq \widehat{P}^i + (X' \cap P')/(\widehat{P}^i + (X' \cap P')) \cap X'^{\perp}.$$

Hierbei folgt \* in (70) aus  $(\widehat{P}^{\perp} \cap X) \cap (X \cap (X \cap P)^{\perp}) \rightarrow (\widehat{P}^i{}^{\perp} \cap X') \cap (X' \cap (X' \cap P')^{\perp})$ , welches gilt, da  $\varphi: X \rightarrow X'$  isometrisch ist und (45) erfüllt.

Weiter folgt aus  $(\widehat{P} + X) \cap P/\widehat{P} = \widehat{P} + (X \cap P)/\widehat{P} \simeq X \cap P/X \cap \widehat{P} \stackrel{(45)}{\simeq} X' \cap P'/X' \cap \widehat{P}^i \simeq \dots \simeq (\widehat{P}^i + X') \cap P'/\widehat{P}^i$  und  $P/\widehat{P} \simeq P'/\widehat{P}^i$  ( $\eta$  indextreu) durch Subtraktion

$$(71) \quad P/(\widehat{P} + X) \cap P \simeq P'/(\widehat{P}^i + X') \cap P'.$$

Da alle in (69),(70),(71) betrachteten Quotientenräume endlichdimensional sind, erhalten wir (67) wieder durch Addition und Subtraktion ((67) = (70) + (71) - (69)). Damit ist Lemma 30 vollständig bewiesen.  $\square$

Die Grundidee des Beweises von Satz 25 tritt deutlich hervor im einfacheren

Beweis von Korollar 26: (Voraussetzungen von S.60,61)  $\varphi : U \rightarrow U'$  ( $\dim(U) < \infty$ ) sei eine Isometrie und  $w' \in E \setminus U'$  mit  $D(w', U') = P'_0$ , wo  $\{P'_0, Q'_1, P'_1\} = J^\theta(V')$  und  $V_\theta \simeq M_3$ . Setze  $w'(p_0) := w'$ . Gemäss Lemma 30 kann der (44),(44'),(45) erfüllende Isomorphismus  $\tilde{\varphi} : Z := U \oplus \langle w(p_0), w(p_1) \rangle \rightarrow Z' := U' \oplus \langle w'(p_0), w'(p_1) \rangle$  auf  $U \oplus \langle w(p_0) \rangle$  isometrisch gewählt werden. Es genügt,  $w(p_1) \in P_1 \setminus U + \widehat{P}_1$  und  $w(q_1) \in Q_1 \setminus U + \widehat{Q}_1$  durch Vektoren  $\tilde{w}(p_1) := w(p_1) + t_0 \in P_1 \setminus U + \widehat{P}_1$  und  $\tilde{w}(q_1) := w(q_1) - t_0 \in Q_1 \setminus U + \widehat{Q}_1$  zu ersetzen, welche zu  $w'(p_1)$  bzw.  $w'(q_1)$  winkeltreu sind (dann gilt wieder  $w(p_0) = \tilde{w}(p_1) + \tilde{w}(q_1)$ ). Dazu muss notwendigerweise  $t_0 \in \widehat{P}_1 \cap \widehat{Q}_1 = P_1 \cap Q_1$  sein! Wegen  $\tilde{\varphi}(Z \cap P_1^\perp) = Z' \cap P_1'^\perp$  findet man mit (62) wie auf S.63 zunächst ein  $t_0 \in P_1$  mit  $(\forall x_0 \in Z) (x_0, w(p_1) + t_0) = (\tilde{\varphi}x_0, w'(p_1))$  (damit ist auch  $\tilde{w}(q_1)$  zu  $w'(q_1)$  winkeltreu). Nach Voraussetzung ( $\Delta 6$ ) ist nun  $P_1 \subseteq (P_1 \cap Q_1)^{\perp\perp}$ , d.h.  $t_0$  ist ein  $\sigma_0$ -Berührungspunkt von  $P_1 \cap Q_1$  (vgl. (37)). Ersetzt man  $t_0$  durch ein  $t_0 + y \in (t_0 + Z^\perp) \cap (P_1 \cap Q_1)$ , so ist  $t_0$  von der gewünschten Sorte.  $\square$

Den etwas technischeren Beweis von Satz 25 unterteilen wir in Lemma 31 und Lemma 32.

**Lemma 31:** *Es sei  $\varphi : X \rightarrow X'$  wie auf S.60 und  $W' = \langle w'(p_0), \dots, w'(p_t) \rangle$  wie in (58). Dann existiert ein  $W = \langle w(p_0), \dot{w}(p_1), \dots, \dot{w}(p_t) \rangle$ , derart dass  $\psi : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  ( $\psi|_X := \varphi$ ,  $w(p_0) \mapsto w'(p_0)$ ,  $\dot{w}(p_i) \mapsto w'(p_i)$ ) ein (44), (44'), (45) erfüllender, auf  $X \oplus \langle w(p_0) \rangle$  isometrischer, partitionierter Isomorphismus ist.*

Beweis: Wir wählen ein zu  $w'(p_0) \in P'_0 \setminus (X' + \widehat{P}'_0)$  winkeltreues  $w(p_0) \in P_0 \setminus (X + \widehat{P}_0)$  mit  $\varphi w(p_0) = w'(p_0)$  gemäss Lemma 30. Es genügt zu zeigen (Induktion), dass es eine Zerlegung  $w(p_0) = \dot{w}(p_1) + \dot{w}(q_1) \in P_1 + Q_1$  mit  $\varphi \dot{w}(p_1) = w'(p_1)$ ,  $\varphi \dot{w}(q_1) = w'(q_1)$  gibt (vgl.(49)). Dazu schreiben wir  $\varphi : X \rightarrow X'$  ausführlicher

als  $\varphi : X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U \rightarrow X'_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X'_{\gamma_1} \oplus U'$ . Es ist o.B.d.A.  $X_h \neq \{0\}$  (sonst ist Lemma 31 trivial). Für das  $\epsilon := \epsilon_1$  aus ( $\Delta 6$ ) gilt dann  $\gamma_n \geq \epsilon > \gamma_{n-1}$  oder  $\epsilon > \gamma_m$ , oder  $\gamma_1 \geq \epsilon$ . Wir betrachten die Zerlegungen

$$(72) \quad E_2 \oplus E_1 := (X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_n}) \oplus A(X_{\gamma_{n-1}} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U, \epsilon),$$

$$(72') \quad E'_2 \oplus E'_1 := (X'_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X'_{\gamma_n}) \oplus A(X'_{\gamma_{n-1}} \oplus \cdots \oplus X'_{\gamma_1} \oplus U', \epsilon),$$

(welche ausarten zu  $A(X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U, \epsilon)$  für  $\epsilon > \gamma_m$ , bzw.  $(X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1}) \oplus A(U, \epsilon)$  für  $\gamma_1 \geq \epsilon$ ). Nach Definition von  $\epsilon$  sind  $P'_0, P'_1, Q'_1$   $\tau_\epsilon$ -abgeschlossen; somit folgt für die durch (72') zerlegten Vektoren  $w'(p_0) = a'_n + a'$ ,  $w'(p_1) = b'_n + b'$ ,  $w'(q_1) = c'_n + c'$ , dass  $a'_n, a' \in P'_0$ ,  $b'_n, b' \in P'_1$ ,  $c'_n, c' \in Q'_1$  (vgl.(54)). Nach Voraussetzung wird  $w(p_0)$  bezüglich (72) zerlegt in

$$w(p_0) = \varphi^{-1}a'_n + a \text{ mit } \varphi^{-1}a'_n \in P_0 \cap E_2, a \in P_0 \cap E_1.$$

Wir zerlegen  $a$  weiter in  $a = \bar{b} + \bar{c} \in (P_1 \cap E_1) + (Q_1 \cap E_1)$  und definieren als erste Näherung

$$(73) \quad \begin{aligned} \check{w}(p_1) &:= \varphi^{-1}(b'_n) + \bar{b} \in (P_1 \cap E_2) + (P_1 \cap E_1), \\ \check{w}(q_1) &:= \varphi^{-1}(c'_n) + \bar{c} \in (Q_1 \cap E_2) + (Q_1 \cap E_1). \end{aligned}$$

Es sei  $\bar{b} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i$ ,  $\bar{c} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{c}_i \in E_1 = X_{\gamma_{n-1}} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1} \oplus R$  und  $b' = \sum_{i=0}^{n-1} b'_i$ ,  $c' = \sum_{i=0}^{n-1} c'_i \in E'_1 = X'_{\gamma_{n-1}} \oplus \cdots \oplus X'_{\gamma_1} \oplus R'$ , wobei  $R := \bigoplus \{F \in S_{\gamma_1} \mid F \subseteq E_1, F \cap (X_{\gamma_{n-1}} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1}) = \{0\}\}$  und  $R'$  analog definiert ist.

Wir wollen  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  durch geeignete Vektoren  $\check{b} := \sum_{i=0}^{n-1} \check{b}_i \in P_1 \cap E_1$  bzw.  $\check{c} := \sum_{i=0}^{n-1} \check{c}_i \in Q_1 \cap E_1$  ersetzen, derart dass die Beziehung  $a = \check{b} + \check{c}$  erhalten bleibt und  $(\forall i \neq 0) \varphi \check{b}_i = b'_i$  gilt. Dann ist automatisch  $(\forall i \neq 0) \varphi \check{c}_i = \varphi a_i - \varphi \check{b}_i = a'_i - b'_i = c'_i$  und die Vektoren  $\check{w}(p_1) := \varphi^{-1}(b'_n) + \check{b}$ ,  $\check{w}(q_1) := \varphi^{-1}(c'_n) + \check{c}$  sind von der gewünschten Sorte. Machen wir den Ansatz  $\check{b} := \bar{b} + \check{t}$  und  $\check{c} := \bar{c} - \check{t}$ , so haben wir das Problem reduziert auf den Nachweis von

$$(74) \quad \exists \check{t} = \sum_{i=0}^{n-1} \check{t}_i \in (P_1 \cap Q_1) \cap E_1 \text{ mit } (\forall 1 \leq i \leq n-1) \varphi(\bar{b}_i + \check{t}_i) = b'_i.$$

Beweis von (74). Für  $\gamma_1 \geq \epsilon$  ist  $\ddot{b} = \dot{b}$  und  $\ddot{c} = \dot{c}$ . Sei jetzt  $\epsilon > \gamma_{n-1}$  ( $n-1 \leq m$ ). Setzt man  $T := P_1 \cap Q_1$ , so ist  $\ddot{b} \in \sigma_\epsilon T \subseteq \tau_{\gamma_{n-1}} T$  gemäss ( $\Delta 6$ ). Aus  $\ddot{b} = \ddot{b}_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \ddot{b}_i \in E_1 = X_{\gamma_{n-1}} \oplus (X_{\gamma_{n-2}} \oplus \dots \oplus R)$  folgt mit (54), dass  $\ddot{b}_{n-1}, \sum_{i=0}^{n-2} \ddot{b}_i \in \tau_{\gamma_{n-1}} T$ .  $\tau_{\gamma_{n-2}} T \ni \ddot{b}_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} \ddot{b}_i \in X_{\gamma_{n-2}} \oplus (X_{\gamma_{n-3}} \oplus \dots \oplus R)$  impliziert wiederum  $\ddot{b}_{n-2}, \sum_{i=0}^{n-3} \ddot{b}_i \in \tau_{\gamma_{n-2}} T$ . So fortfahrend erhält man induktiv

$$(75) \quad (\forall 1 \leq i \leq n-1) \quad \ddot{b}_i \in \tau_{\gamma_i} T, \quad b'_i \in \tau_{\gamma_i} T'.$$

Da  $\varphi$  partitionierter Isomorphismus ist und wegen (45) ist  $\varphi(X_{\gamma_i} \cap \tau_{\gamma_i} T) = X_{\gamma_i} \cap \tau_{\gamma_i} T'$ .

Aus (75) folgt daher

$$(76) \quad (\forall 1 \leq i \leq n-1) \quad \dot{t}_i := \varphi^{-1}(b'_i - \varphi \ddot{b}_i) \in X_{\gamma_i} \cap \tau_{\gamma_i} T.$$

Man bestätigt sofort, dass die  $\dot{t}_i$  den zweiten Teil von (74) erfüllen. Die Gültigkeit des ersten Teils hängt nun an der Definition von  $\dot{t}_0$ ! Wegen (76) und (64) existiert ein  $y^* \in A(X_{\gamma_{n-1}} \oplus \dots \oplus U, \gamma_{n-1}) \cap A(X_{\gamma_{n-1}} \oplus \dots \oplus U, \gamma_1)^\perp \subseteq R$ , derart dass  $v := \sum_{i=1}^{n-1} \dot{t}_i + y^* \in (\tau_{\gamma_{n-1}} T) \cap E_1$  und wegen  $(\tau_{\gamma_{n-1}} T) \cap E_1 = \tau_{\gamma_{n-1}} ((\tau_\epsilon T) \cap E_1)$  (vgl. (56)) existiert ein  $v + y_n \in (v + A(X_{\gamma_{n-1}} \oplus \dots \oplus U, \gamma_{n-1})^\perp) \cap (\tau_\epsilon T \cap E_1) \subseteq \tau_\epsilon T = T$ . Also ist  $\dot{t}_0 := y^* + y_n \in R$  und  $\dot{t} := \sum_{i=0}^{n-1} \dot{t}_i \in T$ . Dies beweist (74) und somit Lemma 31.  $\square$

Es sei  $W'$  aus (58) fixiert. Wir betrachten Räume  $W := \langle w(p_0), \dots, w(p_i), \dot{w}(p_{i+1}), \dots, \dot{w}(p_t) \rangle$ , sodass  $\psi : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  ( $\psi|_X := \varphi, w(p_j) \mapsto w'(p_j), \dot{w}(p_j) \mapsto w'(p_j)$ ) ein (44), (44'), (45) erfüllender partitionierter Isomorphismus ist. Ein solches  $\psi$  heisse  $p_i$ -isometrisch, falls  $\psi|_X \oplus \langle w(p_0), \dots, w(p_i) \rangle$  isometrisch ist. Lemma 31 liefert ein  $p_0$ -isometrisches  $\psi : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$ . Mit dem nächsten Lemma ergibt sich daher der Beweis für die Adjungierbarkeit von  $w'$  bei nichtprimem, irreduziblem  $D'(w', X')$ .

**Lemma 32:** *Sei  $W := \langle w(p_0), \dots, w(p_{i-1}), \dot{w}(p_i), \dots, \dot{w}(p_t) \rangle$  und  $\psi : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  sei  $p_{i-1}$ -isometrisch. Dann existiert ein  $p_i$ -isometrisches  $\tilde{\psi} : X \oplus \tilde{W} \rightarrow X' \oplus W'$ .*

**Beweis:** Wir schreiben unser  $p_{i-1}$ -isometrisches  $\psi : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  gemäss (49) in der partitionierten Form

$$(77) \quad \psi : (X_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_1}) \oplus Z \rightarrow (X'_{\gamma_m} \oplus \cdots \oplus X'_{\gamma_1}) \oplus Z' \quad (\text{ev. } X_h = X'_h = \{0\}).$$

Gemäss Definition einer  $J(\mathbf{V}_\theta)$ -Aufzählung existiert ein  $r_i \in \{p_0, p_1, q_1, \dots, p_{i-1}, q_{i-1}\}$  mit  $w(r_i) = \dot{w}(p_i) + \dot{w}(q_i) \in P_i + Q_i$  und  $w'(r_i) = w'(p_i) + w'(q_i) \in P'_i + Q'_i$ . Diese Vektoren seien bezüglich  $X_h \oplus Z$  bzw.  $X'_h \oplus Z'$  zerlegt in

$$w(r_i) = \underline{a} + a_0 \quad w'(r_i) = \underline{a}' + a'_0$$

$$\dot{w}(p_i) = \underline{b} + \dot{b}_0 \quad w'(p_i) = \underline{b}' + b'_0$$

$$\dot{w}(q_i) = \underline{c} + \dot{c}_0 \quad w'(q_i) = \underline{c}' + c'_0.$$

Nach (61) ist  $\underline{a}, a_0 \in \tau_{\gamma_1} R_i$ ,  $\underline{b}, \dot{b}_0 \in \tau_{\gamma_1} P_i$ ,  $\underline{c}, \dot{c}_0 \in \tau_{\gamma_1} Q_i$  und die analogen Beziehungen gelten auch in  $E'$ .

$a_0$  ist bereits winkeltreu zu  $a'_0$ , aber  $\dot{b}_0$  nicht zu  $b'_0$  und  $\dot{c}_0$  nicht zu  $c'_0$ ! Wir wollen  $\dot{b}_0$  bzw.  $\dot{c}_0$  durch winkeltreue  $b_0 := \dot{b}_0 + t_0 \in P_i \cap X_h^\perp$  bzw.  $c_0 := \dot{c}_0 - t_0 \in Q_i \cap X_h^\perp$  ersetzen. Dazu muss  $t_0$  offenbar aus  $T \cap X_h^\perp := (P_i \cap Q_i) \cap X_h^\perp$  gewählt werden. Aus der Gültigkeit von  $(\Delta 6)$  für  $\epsilon_i$  folgt zunächst

$$(78) \quad \dot{b}_0 \in \tau_{\gamma_1} P_i \subseteq \sigma_0 T, \quad b'_0 \in \tau_{\gamma_1} P'_i \subseteq \sigma_0 T'.$$

Da  $\psi$  (45) erfüllt und partitioniert ist (Lemma 31!), gilt  $\psi(Z \cap (\sigma_0 T)^\perp) = Z' \cap (\sigma_0 T')^\perp$ . Setzen wir  $Z = (Z \cap (\sigma_0 T)^\perp) \oplus \langle f_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle f_k \rangle$ , so folgt  $Z' = (Z' \cap (\sigma_0 T')^\perp) \oplus \langle \psi f_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \psi f_k \rangle$ . Gemäss (62) existiert ein  $t_0 \in \sigma_0 T$  mit  $(\forall 1 \leq i \leq k) (f_i, t_0) = (\psi f_i, b'_0) - (f_i, \dot{b}_0)$ . Wegen (78) gilt die Gleichung dann auch für beliebige  $x_0 \in Z$  (statt bloss  $f_i$ ). Ersetzen wir  $t_0$  durch seine erste Komponente bezüglich  $A(Z, \gamma_1) \oplus A(Z, \gamma_1)^\perp$ , so ergibt sich

$$(79) \quad \exists t_0 \in (\sigma_0 T) \cap A(Z, \gamma_1) \text{ mit } (\forall x_0 \in Z) (x_0, \dot{b}_0 + t_0) = (\psi x_0, b'_0).$$

Da  $\sigma_0 T$ ,  $\tau_{\gamma_1} T$  bezüglich  $A(Z, \gamma_1) \oplus A(Z, \gamma_1)^\perp$  zerlegt werden, ist nach (56)  $(\sigma_0 T) \cap A(Z, \gamma_1) = \sigma_0((\tau_{\gamma_1} T) \cap A(Z, \gamma_1))$ . Ersetzen wir  $t_0$  durch ein  $t_0 + y \in (t_0 + Z^\perp) \cap ((\tau_{\gamma_1} T) \cap A(Z, \gamma_1))$ , so können wir (79) verschärfen zu

$$(80) \quad \exists t_0 \in (\tau_{\gamma_1} T) \cap A(Z, \gamma_1) \text{ mit } (\forall x_0 \in Z) (x_0, \dot{b}_0 + t_0) = (\psi x_0, b'_0).$$

Zu  $t_0$  aus (80) existiert gemäss (64) ein  $y \in X_h^\perp$  mit  $t_0 + y \in T$ . Ersetzt man  $t_0$  wieder durch  $t_0 + y$ , so ist  $\tilde{w}(p_i) := \dot{w}(p_i) + t_0 \in P_i$ ,  $\tilde{w}(q_i) := \dot{w}(q_i) - t_0 \in Q_i$  und  $w(r_i) = \tilde{w}(p_i) + \tilde{w}(q_i)$ . Setzt man noch  $\tilde{w}(p_j) := w(p_j)$  für  $0 \leq j \leq i-1$ , so ist  $\tilde{\psi} : X \oplus \langle \tilde{w}(p_0), \dots, \tilde{w}(p_i) \rangle \rightarrow X' \oplus \langle w'(p_0), \dots, w'(p_i) \rangle$ ,  $\tilde{\psi}|_X := \varphi$ ,  $\tilde{w}(p_j) \mapsto w'(p_j)$  ( $0 \leq j \leq i$ ), klarerweise eine partitionierte Isometrie. Wie in Lemma 31 findet man eine Zerlegung  $\tilde{w}(r_{i+1}) = \dot{w}(p_{i+1}) + \dot{w}(q_{i+1}) \in P_{i+1} + Q_{i+1}$  mit  $\varphi \dot{w}(p_{i+1}) = \underline{w}'(p_{i+1})$ ,  $\varphi \dot{w}(q_{i+1}) = \underline{w}'(q_{i+1})$ . So fortfahrend bilde man  $\dot{w}(p_j)$ ,  $\dot{w}(q_j)$  für  $i+1 \leq j \leq t$  und setze  $\tilde{W} := \langle \tilde{w}(p_0), \dots, \tilde{w}(p_i), \dot{w}(p_{i+1}), \dots, \dot{w}(p_t) \rangle$ . Die Abbildung  $\tilde{\psi} : X \oplus \tilde{W} \rightarrow X' \oplus W'$ ,  $\tilde{\psi}|_X := \varphi$ ,  $\tilde{w}(p_j) \mapsto w'(p_j)$  ( $0 \leq j \leq i$ ),  $\dot{w}(p_j) \mapsto w'(p_j)$  ( $i+1 \leq j \leq t$ ), ist dann  $p_i$ -isometrisch.  $\square$

**Bemerkung:** Sei  $\psi : X \oplus \langle w(p_0), \dots, w(p_{i-1}) \rangle \rightarrow X' \oplus \langle w'(p_0), \dots, w'(p_{i-1}) \rangle$  eine partitionierte Isometrie. Es liegt nahe, direkt eine Zerlegung  $w(r_i) = w(p_i) + w(q_i) \in P_i + Q_i$  mit  $w(p_i)$  bzw.  $w(q_i)$  winkeltreu zu  $w'(p_i)$  bzw.  $w'(q_i)$  zu konstruieren, um so  $\psi$  zu einer partitionierten Isometrie  $\tilde{\psi} : X \oplus \langle w(p_0), \dots, w(p_i) \rangle \rightarrow X' \oplus \langle w'(p_0), \dots, w'(p_i) \rangle$  auszuweiten. Schreibt man  $\psi$  in der partitionierten Form  $\psi : X \oplus Z \rightarrow X' \oplus Z'$ , so ist zwar für  $A \in \mathbf{V}$  stets  $\psi(X_h \cap A) = \varphi(X_h \cap A) = X' \cap A'$  (wovon wir in Lemma 31 Gebrauch machten), aber i.a. ist  $\psi(Z \cap A) \neq Z' \cap A'$ , da  $\psi$  (noch) nicht (45) erfüllt! Dies erklärt die Aufteilung des Beweises in Lemma 31 und Lemma 32.

Ist in Satz 25 ( $\Delta 6$ ) für ein  $\theta \in sp(\mathbf{V})$  nicht erfüllt – z.B. falls  $\mathbf{V}_\theta \simeq M_3$  und die Elemente  $P, Q, R \in J^\theta(\mathbf{V})$   $\perp\perp$ -abgeschlossen sind – so besteht u. U. dennoch Hoffnung für eine induzierende Isometrie, sofern die Quotienten  $P/\hat{P}, Q/\hat{Q}, R/\hat{R}$  endlichdimensional sind.

Genauer: Sind  $X_0, X'_0 \subseteq E$  endlichdimensionale Teilräume mit (44), (44)' und ist  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0$  eine (45) erfüllende Isometrie, so heisst  $(X_0, \varphi_0, X'_0)$  ein initiales Tripel ([10],[14],[16]).  $(X_0, \varphi_0, X'_0)$  entschärft ein  $P \in J(\mathbf{V})$ , falls  $K \subseteq X_0, K' \subseteq X'_0$  existieren mit  $P = \hat{P} + K, P' = \hat{P}' + K'$ .

Angenommen, es existiert nun ein initiales Tripel  $(X_0, \varphi_0, X'_0)$ , welches alle  $P \in \bigcup \{J^\theta(\mathbf{V}) \mid \theta \text{ verletzt } (\Delta 6)\}$  entschärft. Dann kann man die rekursive Definition der Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  mit  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0$  (statt  $(0) \rightarrow (0)$ ) starten und erhält nur noch reduzible oder  $(\Delta 6)$  erfüllende irreduzible Elemente  $D(w, X) \in \mathbf{V}$ , womit das Problem auf Satz 25 zurückgeführt ist. Falls man alle nichtprimen  $P \in J(\mathbf{V}), P' \in J(\mathbf{V}')$  in ein initiales Tripel packen kann, so genügt es, Satz 24 zu zitieren. Dies ist das Vorgehen von Gross[10], Kap.16, Gross-Keller[14] und Haapasalo[16]. Die dort untersuchten Verbände sind alle endlich und aus  $\{M_{3,3}\}^e$ . In einigen Fällen gilt auch  $(\Delta 6)$ , jedoch lässt sich Satz 25 nicht direkt anwenden, denn die Verbände in [16] sind nicht orthostabil und in [10],[14] ist der Raum  $E$  nichtalternierend. In allen Fällen liesse sich aber der Nachweis von (44), (44)' für  $X_0, X'_0$  mit den Ergebnissen aus Kapitel 1 verkürzen (wie im Beweis von Satz 38).

Gibt es nichtprime  $P \in J(\mathbf{V})$  mit  $\dim(P/\hat{P}) = \infty$  (wie in 2.4), so müsste man bei der Konstruktion des unendlichdimensionalen Tripels  $(X_0, \varphi_0, X'_0)$  zusätzlich darauf achten, dass  $X_0, X'_0$  partitionierte Räume werden! Diese kaum zu bewältigende Aufgabe war es gerade, die den Autor zur Bedingung  $(\Delta 6)$  führte.

In nichtalternierenden Räumen  $[E, (,)]$  muss bei der Adjunktion eines Vektors  $x$  zu einem partitionierten Isomorphismus  $\varphi : X \rightarrow X'$  neben der "Winkeltreue" darauf geachtet werden, dass  $x$  diesselbe "Länge" wie die Vorgabe  $x'$  besitzt (d.h.  $(x, x) = (x', x')$ ). Es erweist sich, dass Elemente  $P \in J(\mathbf{V})$  mit  $\dim(P/P \cap P^\perp) < \infty$  diesbezüglich Probleme bereiten. Initiale Tripel können auch hier einspringen, um solche  $P$ 's zu entschärfen. Im Beweis von Satz 38 werden wir dieses Verfahren zusammen mit  $(\Delta 6)$  auf einen 957-elementigen Verband anwenden.

## 2.3 Mengentheoretischer Teil des Beweises

Jeder endlich dimensionale Teilraum  $U \subseteq E$  ist ein partitionierter Unterraum, aber der Limes  $\bigcup\{U_n \mid n < \omega_0\}$  einer aufsteigenden Kette  $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots$  endlich dimensionaler Räume braucht natürlich kein partitionierter Unterraum mehr zu sein. Auch der Limes einer aufsteigenden Kette  $\{X_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$  von  $\gamma$ -Räumen braucht kein  $\lambda$ -Raum zu sein, falls  $S_{\{\lambda\}} \neq S_\lambda$  (vgl.S.59)! Diese Probleme behandelt der schon auf S.56 formulierte Satz 33, den wir in diesem Abschnitt beweisen wollen. (Das Verständnis des recht langen, technischen Beweises ist für die Anwendungen von Satz 25 in 2.4 nicht nötig, d.h. 2.3 kann übersprungen werden.)

**Satz 33:** (G[11],S.26,Wild) *Es seien  $(E, S)$  und  $(E', S')$  part. Räume der Dimension  $\kappa(E) < \mathfrak{m}_0$  und  $B := (e_\iota \mid \iota < \kappa)$  bzw.  $B' := (e'_\iota \mid \iota < \kappa)$  seien Folgen in  $E$  bzw.  $E'$ . Ferner sei  $\mathbf{F}$  eine (CC) erfüllende Familie, derart dass gewisse  $(\varphi : X \rightarrow X') \in \mathbf{F}$  (PP) erfüllen:*

$$(50) \quad \begin{aligned} \dim(X) < \aleph_0 &\implies \varphi \text{ erfüllt (PP),} \\ (\dim(X) \geq \aleph_0 \text{ und } (e_\iota \mid \iota < \dim(X)) \subseteq X \text{ und} \\ (e'_\iota \mid \iota < \dim(X')) \subseteq X') &\implies \varphi \text{ erfüllt (PP).} \end{aligned}$$

Dann besitzt jedes  $(\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0) \in \mathbf{F}$  eine Erweiterung  $(\Phi : E \rightarrow E') \in \mathbf{F}$ .

**Korollar 34:** *Es seien  $(E, S)$  und  $(E', S')$  part. Räume der Dimension  $\kappa(E) < \mathfrak{m}_0$  und  $\mathbf{F}$  sei eine (CC) erfüllende Familie partitionierter Isomorphismen, welche alle (PP) erfüllen. Dann besitzt jedes  $(\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0) \in \mathbf{F}$  eine Erweiterung  $(\Phi : E \rightarrow E') \in \mathbf{F}$ .*

Die hier nicht erklärten mengentheoretischen Grundbegriffe wie Ordinalzahl, Kardinalzahl (=Anfangszahl), Kofinalität, regulär, findet man in Kunen[20] oder Lévy[21]. Für Ordinalzahlen verwenden wir griechische Buchstaben, wobei  $\lambda$  stets eine Limeszahl und  $\kappa$  stets eine Kardinalzahl bezeichnet.

In diesem Abschnitt ist es bequemer, die auf S.54 eingeführten Begriffe etwas anders zu definieren: Sei  $\xi$  eine beliebige Ordinalzahl und  $X \subseteq E$  ein Teilraum.  $X$  heisse  $\xi$ -Raum, falls  $\dim(X) = \xi < \aleph_0$  oder falls  $\dim(X) = |\xi| = \aleph_\gamma$  und  $X$  ein  $\gamma$ -Raum im Sinne von S.54 ist. Für einen Teilraum  $X \subseteq E$  mit  $\dim(X) \leq |\xi|$  sei  $A(X, \xi)$  der von  $X$  erzeugte  $\xi$ -Raum. Partitionierte Unterräume schreiben wir jetzt in der Form

$$X = X_{\kappa_m} \oplus X_{\kappa_{m-1}} \oplus \cdots \oplus X_{\kappa_1} \oplus U,$$

wo  $\kappa_m > \kappa_{m-1} > \cdots > \kappa_1$  unendliche Kardinalzahlen sind und  $X_{\kappa_i}$  ein  $\kappa_i$ -Raum ist.

Sei  $\mathbf{F}$  unsre Familie von partitionierten Isomorphismen und sei  $(\varphi_0 : S \oplus Z_0 \rightarrow S' \oplus Z') \in \mathbf{F}$ . Dabei sei  $S := X_{\kappa_m} \oplus \cdots \oplus X_{\kappa_n}$ ,  $Z_0 := X_{\kappa_{n-1}} \oplus \cdots \oplus U$  und  $S' := X'_{\kappa_m} \oplus \cdots \oplus X'_{\kappa_n}$ ,  $Z'_0 := X'_{\kappa_{n-1}} \oplus \cdots \oplus U'$ .

Ein Teilraum  $T \subseteq E$  (bzw.  $T' \subseteq E'$ ) mit  $\dim(T) = \kappa \leq \kappa_n$  ( $\kappa_n$  minimal) heisst zu  $\varphi_0$  adjungierbar, falls ein  $(\varphi : S \oplus Z \rightarrow S' \oplus Z') \supseteq \varphi_0$  aus  $\mathbf{F}$  existiert mit  $T \subseteq \text{dom} \varphi$  (bzw.  $T' \subseteq \text{im} \varphi$ ), wo  $Z \supseteq Z_0$ ,  $Z' \supseteq Z'_0$  part. Unterräume der Dimension  $\leq \dim(Z_0) + \kappa$  sind (für  $\kappa > \kappa_m$  haben wir  $\varphi : Z \rightarrow Z'$ ).

Wir benötigen noch einige weitere Definitionen:

$\mathbf{F}(\text{PP}) := \{(\varphi : X \rightarrow X') \in \mathbf{F} \mid \dim(X) < \aleph_0 \text{ oder}$

$(\dim(X) \geq \aleph_0 \text{ und } \{e_\iota \mid \iota < \dim(X)\} \subseteq X, \{e'_\iota \mid \iota < \dim(X')\} \subseteq X')\}$

$\mathbf{F}^* := \mathbf{F} \cup \{\varphi \mid \varphi : E \rightarrow E' \text{ Vektorraumisomorphismus}\}$

$A(\kappa) : \iff (\forall \varphi_0 \in \mathbf{F}(\text{PP}))$

$((\forall T \subseteq E)(\dim(T) \leq \kappa \Rightarrow \exists \varphi \in \mathbf{F}^*, \text{ das } T \text{ adjungiert}) \text{ und}$

$(\forall T' \subseteq E')(\dim(T') \leq \kappa \Rightarrow \exists \varphi \in \mathbf{F}^*, \text{ das } T' \text{ adjungiert}))$

Man beachte, dass gemäss (50) alle  $\varphi \in \mathbf{F}(\text{PP})$  die Pingpong-Eigenschaft (PP) besitzen.

Die Aussage  $A(\kappa)$  ist für alle  $\kappa \leq \kappa(E) := \dim(E)$  definiert. Da man durch endlich oft Anwenden von (PP) jeden endlichdimensionalen Raum  $T \subseteq E$  adjungieren kann, gilt  $A(\kappa)$  für alle endlichen  $\kappa \leq \kappa(E)$ ; insbesondere folgt Satz 33 für endliches  $\kappa(E)$

(man adjungiere  $E$  zu  $\varphi_0$ ).

Sei ab jetzt  $\kappa(E)$  unendlich. Unser Ziel ist es,

$$(81) \quad (\forall \kappa \leq \kappa(E)) \quad A(\kappa)$$

zu zeigen; dann können wir wiederum  $E$  zum vorgegebenen  $\varphi_0$  adjungieren und erhalten eine Erweiterung  $\Phi : E \rightarrow E'$ .

Eine Funktion  $f : \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$  heisst Normalfunktion (L[21]), falls  $f$  streng monoton wachsend, stetig und unbeschränkt ist, d.h.  $\xi < \eta \Rightarrow f\xi < f\eta$ ,  $(\forall \lambda < \lambda_1) f\lambda = \sup\{f\xi \mid \xi < \lambda\}$ ,  $\bigcup f(\lambda_1) = \lambda_2$ .

Es sei  $\dot{\lambda} := \text{cf}\lambda$  die Kofinalität von  $\lambda$  und  $\text{Reg}(\lambda_1) := \{\lambda < \lambda_1 \mid \dot{\lambda} = \lambda\}$  die Menge aller regulären Limeszahlen (Kardinalzahlen) unterhalb  $\lambda_1$ .

**Lemma 35:** Sei  $\kappa(E)$  unendlich. Falls für alle  $\aleph_0 \leq \kappa \leq \kappa(E)$  eine Normalfunktion  $f : \dot{\kappa} \rightarrow \kappa$  mit

$$(82) \quad (\forall \lambda \in \text{Reg}(\dot{\kappa})) \quad \exists \lambda^*(\lambda^* < \lambda \text{ und } \lambda < f\lambda^*)$$

existiert, so gilt  $(\forall \kappa \leq \kappa(E)) \quad A(\kappa)$ .

(82) bedeutet also, dass  $f$  alle regulären Limeszahlen  $\lambda < \dot{\kappa}$  "überspringt".

Beweis: Wir beweisen  $(\forall \kappa \leq \kappa(E)) \quad A(\kappa)$  mit transfiniten Induktion nach  $\kappa$ . Wie gesehen, gilt  $A(\kappa)$  für alle endlichen  $\kappa < \kappa(E)$ . Sei jetzt  $\kappa \leq \kappa(E)$  unendlich, und es gelte

$$(83) \quad (\forall \kappa' < \kappa) \quad A(\kappa').$$

Wir haben  $A(\kappa)$  zu zeigen. Seien dazu ein  $(\varphi_0 : S \oplus Z_0 \rightarrow S' \oplus Z'_0) \in \mathbf{F}(\text{PP})$  und ein  $T \subseteq E$  mit  $\dim(T) = \kappa$  vorgegeben; die geforderte Erweiterung  $\varphi : S \oplus Z \rightarrow S' \oplus Z'$  werden wir als Limes einer aufsteigenden Kette  $\{\varphi_\xi : S \oplus Z_\xi \rightarrow S' \oplus Z'_\xi \mid \xi < \kappa\} \subseteq \mathbf{F}(\text{PP})$  konstruieren. Durch Übergang von  $\xi \mapsto f\xi$  zu  $\xi \mapsto \kappa_{n-1} + f\xi$  kann man

$$(84) \quad \dim(Z_0) = \dim(Z'_0) \leq |f0|$$

annehmen. Für spätere Zwecke schicken wir folgende triviale Bemerkung voraus:

$$(85) \quad \begin{aligned} & \text{Sei } S \oplus Z := (X_{\kappa_m} \oplus \cdots \oplus X_{\kappa_n}) \oplus (X_{\kappa_{n-1}} \oplus \cdots \oplus X_{\kappa_1} \oplus U) \\ & \text{ein part. Unterraum. Ist } y \in S \oplus Z, y = \sum y_F \in \bigoplus \{F \mid F \in \mathbf{S}_0\}, \\ & (\forall F \in \mathbf{S}_0) (F \subseteq S \Rightarrow y_F = 0), \text{ so ist } y \in Z. \end{aligned}$$

Stellt man einen Vektorraum  $Y$  als Vereinigung einer aufsteigenden Kette von Unterräumen dar, so spricht man von einer Filtrierung von  $Y$ . Wir fixieren nun für alle  $\kappa$ -Räume und alle  $f\lambda$ -Räume ( $\lambda < \kappa$ ) Filtrierungen der Form

$$(86) \quad \begin{aligned} Y &= \bigcup_{\xi < \kappa} Y[f\xi], \quad (\forall \xi < \kappa) \dim(Y[f\xi]) = |f\xi|, \\ Y &= \bigcup_{\xi < \lambda} Y[f\xi], \quad (\forall \xi < \lambda) \dim(Y[f\xi]) = |f\xi|. \end{aligned}$$

Analoge Filtrierungen seien für alle  $\kappa$ -Räume und  $f\lambda$ -Räume  $Y' \subseteq E'$  fixiert. Die Existenz solcher Filtrierungen ist klar. Ausserdem fixiere man für alle  $\lambda < \kappa$  kofinale Folgen  $\lambda_\beta \rightarrow \lambda$  ( $\beta < \dot{\lambda}$ ) mit  $(\forall \beta < \dot{\lambda}) \beta \leq \lambda_\beta$ .

Wir definieren unsere aufsteigende Kette  $(\varphi_\xi \mid \xi < \kappa)$  rekursiv: Sei  $\xi < \kappa$  fest und für  $\eta < \xi$  seien die  $(\varphi_\eta : S \oplus Z_\eta \rightarrow S' \oplus Z'_\eta) \in \mathbf{F}(\text{PP})$  mit  $\dim(Z_\eta) \leq |f\eta|$  bereits definiert (vgl.(84)). Ferner sei für  $\eta_1 < \eta_2 < \xi$  auch  $Z_{\eta_1} \subseteq Z_{\eta_2}$ ,  $Z'_{\eta_1} \subseteq Z'_{\eta_2}$ . Zur Definition von  $\varphi_\xi$  machen wir eine Fallunterscheidung. (Interessant ist  $\dot{\kappa} = \kappa$ , vgl. S.77.)

1.Fall:  $\xi$  ist Nachfolgerzahl. Wir setzen

$$(87) \quad \begin{aligned} T_\xi &:= (e_\xi) + A(T, \kappa)[f\xi] + \sum \{A(Z_\eta, \kappa)[f\xi] \mid \eta < \xi\} \\ &\quad + \sum \{A(Z_{\lambda_\beta}, f\lambda)[f\xi] \mid \xi < \lambda < \kappa \text{ mit } \dot{\lambda} < f\xi; \lambda_\beta < \xi\}, \end{aligned}$$

$$(87') \quad \begin{aligned} T'_\xi &:= (e'_\xi) + \sum \{A(Z'_\eta, \kappa)[f\xi] \mid \eta < \xi\} \\ &\quad + \sum \{A(Z'_{\lambda_\beta}, f\lambda)[f\xi] \mid \xi < \lambda < \kappa \text{ mit } \dot{\lambda} < f\xi; \lambda_\beta < \xi\}. \end{aligned}$$

Es ist  $\dim(T_\xi) = 1 + |f\xi| + |\xi| \cdot |f\xi| + |\xi| \cdot |f\xi| \cdot |f\xi| = |f\xi|$  und analog  $\dim(T'_\xi) = |f\xi|$ .

Wegen  $|f\xi| < \kappa$  können wir gemäss (83) zweimal  $A(|f\xi|)$  anwenden und erhalten ein

$(\varphi_\xi : S \oplus Z_\xi \rightarrow S' \oplus Z'_\xi) \supseteq \varphi_{\xi-1}$  aus  $\mathbf{F}$  mit  $Z_{\xi-1} \subseteq Z_\xi$ ,  $Z'_{\xi-1} \subseteq Z'_\xi$ ,  $\dim(Z_\xi) \leq |f\xi|$  und  $T_\xi \subseteq S \oplus Z_\xi$ ,  $T'_\xi \subseteq S' \oplus Z'_\xi$ . Klarerweise ist mit  $\varphi_{\xi-1}$  auch  $\varphi_\xi$  aus  $\mathbf{F}(\text{PP})$ .

2. Fall:  $\xi$  ist Limeszahl. Wir setzen  $\lambda := \xi$ . Es liegt nahe,  $Z_\lambda := \bigcup \{Z_\eta \mid \eta < \lambda\}$ ,  $Z'_\lambda := \bigcup \{Z'_\eta \mid \eta < \lambda\}$  und  $\varphi_\lambda := \bigcup_{\eta < \lambda} \varphi_\eta : S \oplus Z_\lambda \rightarrow S' \oplus Z'_\lambda$  zu setzen. Klarerweise ist  $\varphi_\lambda$  ein Vektorraumisomorphismus mit  $\varphi_\lambda(Z_\lambda) = Z'_\lambda$  und  $T_\lambda := \bigcup_{\eta < \lambda} T_\eta \subseteq S \oplus Z_\lambda$ ,  $T'_\lambda := \bigcup_{\eta < \lambda} T'_\eta \subseteq S' \oplus Z'_\lambda$ . Weniger klar ist, ob  $\varphi_\lambda$  ein partitionierter Isomorphismus ist, d.h. ob  $Z_\lambda$  und  $Z'_\lambda$  überhaupt  $f\lambda$ -Räume sind! Dazu genügt es offenbar,  $\dim(Z_\lambda) \leq |f\lambda|$  und  $A(Z_\lambda, f\lambda) \subseteq Z_\lambda$  zu zeigen (sowie das Analogon für  $Z'_\lambda$ ). Es ist  $\dim(Z_\lambda) = \sup\{\dim(Z_\eta) \mid \eta < \lambda\} \leq \sup\{|f\eta| \mid \eta < \lambda\} = |f\lambda|$ . Die zweite Aussage ist weniger trivial:

$$A(Z_\lambda, f\lambda) = \bigcup_{\beta < \lambda} A(Z_{\lambda_\beta}, f\lambda) \stackrel{(86)}{=} \bigcup_{\lambda^* < \beta < \lambda} \left( \bigcup_{\lambda_\beta < \eta < \lambda} A(Z_{\lambda_\beta}, f\lambda)[f\eta] \right) \stackrel{*}{\subseteq} \bigcup_{\eta < \lambda} Z_\eta = Z_\lambda.$$

Erläuterung von  $*$ : Da  $\lambda^* < \lambda_\beta < \eta$ , ist wegen (82)  $\lambda < f\lambda^* < f\eta$ , d.h. es ist  $A(Z_{\lambda_\beta}, f\lambda)[f\eta] \stackrel{(87)}{\subseteq} T_\eta \subseteq S \oplus Z_\eta$ . Gemäss (85) ist daher  $A(Z_{\lambda_\beta}, f\lambda)[f\eta] \subseteq Z_\eta$ .

$\varphi_\lambda$  ist also eine partitionierte Isometrie. Wegen (CC) ist  $\varphi_\lambda \in \mathbf{F}$  und damit auch  $\varphi_\lambda \in \mathbf{F}(\text{PP})$  (für  $S \neq \{0\}$  trivial; für  $\varphi_\lambda : Z_\lambda \rightarrow Z'_\lambda$  ist gemäss (87), (87')  $\langle e_i \mid i < \dim(Z_\lambda) \rangle \subseteq Z_\lambda$ ,  $\langle e'_i \mid i < \dim(Z'_\lambda) \rangle \subseteq Z'_\lambda$ ).

Somit haben wir eine Kette  $\{\varphi_\xi \mid \xi < \kappa\} \subseteq \mathbf{F}(\text{PP})$  definiert. Sei  $Z := \bigcup_{\xi < \kappa} Z_\xi$  und  $Z' := \bigcup_{\xi < \kappa} Z'_\xi$ . Dann ist  $\varphi := \bigcup_{\xi < \kappa} \varphi_\xi : S \oplus Z \rightarrow S' \oplus Z'$  ein Isomorphismus mit  $\varphi(Z) = Z'$ . Aus  $\dim(Z) = \sup\{\dim(Z_\xi) \mid \xi < \kappa\} \leq \sup\{|f\xi| \mid \xi < \kappa\} = \kappa$  und

$$A(Z, \kappa) \subseteq \bigcup_{\eta < \kappa} A(Z_\eta, \kappa) = \bigcup_{\eta < \kappa} \left( \bigcup_{\eta < \xi < \kappa} A(Z_\eta, \kappa)[f\xi] \right) \subseteq \bigcup_{\xi < \kappa} Z_\xi = Z$$

folgt wie oben, dass  $Z$  und analog  $Z'$   $\kappa$ -Räume sind; also ist  $\varphi : X_{\kappa_m} \oplus \rightarrow \oplus X_{\kappa_n} \oplus Z \rightarrow X_{\kappa_m} \oplus \dots \oplus X_{\kappa_n} \oplus Z'$  ein partitionierter Isomorphismus (für  $\kappa = \kappa_n$  verschmelzen  $X_{\kappa_n}$  und  $Z$  zum  $\kappa_n$ -Raum  $X_{\kappa_n} \oplus Z$ ). Wie oben schliesst man  $\varphi \in \mathbf{F}(\text{PP})$ . Schliesslich

ist

$$T \subseteq A(T, \kappa) \subseteq \bigcup_{\xi < \dot{\kappa}} A(T, \kappa)[f\xi] \stackrel{(87)}{\subseteq} \bigcup_{\xi < \dot{\kappa}} T_\xi \subseteq \bigcup_{\xi < \dot{\kappa}} S \oplus Z_\xi = S \oplus Z,$$

d.h.  $\varphi$  adjungiert das vorgegebene  $T$ . Damit ist  $A(\kappa)$  bewiesen.  $\square$

**Bemerkung:** Es ist nötig, sich in (82) auf reguläre  $\lambda < \dot{\kappa}$  einzuschränken, denn für  $\kappa = \dot{\kappa} \geq \aleph_1$  kann es keine Normalfunktion  $f : \kappa \rightarrow \kappa$  geben, welche alle Limeszahlen  $\lambda < \kappa$  überspringt: Sei  $\lambda_0 < \kappa$  beliebig; definiere  $\lambda_{n+1} := f\lambda_n$  ( $n < \omega$ ) und  $\lambda := \sup\{\lambda_n \mid n < \omega\} < \kappa$ . Dann ist  $(\forall \lambda^* < \lambda) f\lambda^* < f\lambda = \lambda$ .

Wir wollen nun sehen, welche Kardinalzahlen  $\kappa$  eine Normalfunktion  $f : \dot{\kappa} \rightarrow \kappa$  mit (82) zulassen.

Hat  $\kappa$  die Kofinalität  $\dot{\kappa} = \aleph_0$ , so gibt es keine Limeszahlen  $\lambda < \dot{\kappa}$ , d.h. wir können eine beliebige Normalfunktion  $f : \dot{\kappa} \rightarrow \kappa$  wählen.

Ist  $\kappa = \aleph_{\gamma+1}$  eine Nachfolgerkardinalzahl, so ist  $\dot{\kappa} = \kappa$  und  $\text{Reg}(\kappa) \subseteq \{\aleph_\beta \mid \beta \leq \gamma\}$ . Setzt man  $f\xi := \omega_\gamma + \xi$  (Ordinalzahlsumme), so ist (82) trivialerweise erfüllt.

(Beachtet man, dass für  $\kappa = \aleph_{\gamma+1}$  die Vereinigung jeder aufsteigenden Kette von  $\aleph_\gamma$ -Räumen "automatisch" wieder ein  $\aleph_\gamma$ -Raum ist, so lässt sich  $A(\aleph_{\gamma+1})$  wie im Fall  $\dot{\kappa} = \aleph_0$  ohne eine Limeszahlen überspringende Hilfsfunktion  $f$  beweisen. Alle  $\kappa < \aleph_{\omega_1}$  sind von dieser Sorte, woraus sich die Schranke  $\aleph_{\omega_1}$  in Satz 24 erklärt.)

Ist  $\kappa = \aleph_\mu$  eine Limeskardinalzahl mit  $\dot{\kappa} < \kappa$  (d.h.  $\kappa$  ist singulär), so erfüllt  $f\xi := \dot{\kappa} + \xi$  wieder trivialerweise (82).

Ist  $\kappa = \aleph_\mu$  Limeskardinalzahl mit  $\dot{\kappa} = \kappa$ , so heisst  $\kappa$  schwach unerreichbar. Ist  $\mathfrak{u}_0$  die kleinste schwach unerreichbare Kardinalzahl, so gibt es also nach obigen Ausführungen für alle  $\kappa < \mathfrak{u}_0$  eine (82) erfüllende Normalfunktion  $f : \dot{\kappa} \rightarrow \kappa$ . H. Läuchli verdanke ich den Hinweis, dass auch viele schwach unerreichbare  $\mathfrak{u}$  noch solche Normalfunktionen zulassen:

**Lemma 36:** (Läuchli) Sei  $\mathfrak{m}_0$  die erste schwache Mahlo-Zahl (Def. unten). Dann gibt es für alle  $\kappa < \mathfrak{m}_0$  Normalfunktionen  $f : \dot{\kappa} \rightarrow \kappa$  mit (82), jedoch nicht für  $\kappa = \mathfrak{m}_0$ .

Lemma 35 und Lemma 36 ergeben somit den Beweis von Satz 33. Zum Beweis von Lemma 36 benötigen wir noch einige Begriffe. Sei  $\kappa$  eine reguläre Kardinalzahl, d.h.  $\dot{\kappa} = \kappa$ . Eine Teilmenge  $C \subseteq \kappa$  heisst Cub (closed unbounded), falls  $C$  in  $\kappa$  unbeschränkt ist und abgeschlossen unter Limesbildung, d.h. für alle Limeszahlen  $\lambda < \kappa$  und alle monotonen Folgen  $\{\gamma_\xi \mid \xi < \lambda\} \subseteq C$  ist  $\sup\{\gamma_\xi \mid \xi < \lambda\} \in C$ .

Ist  $f : \kappa \rightarrow \kappa$  eine Normalfunktion, so ist  $f(\kappa) \subseteq \kappa$  offenbar ein Cub. Ist umgekehrt  $C \subseteq \kappa$  ein Cub, so ist der Ordnungstyp von  $(C, <)$  gleich  $\kappa$ , d.h.  $C = \{\gamma_\xi \mid \xi < \kappa\}$  ist das Bild der Normalfunktion  $f : \kappa \rightarrow \kappa$  mit  $f\xi := \gamma_\xi$ . Eine Teilmenge  $R \subseteq \kappa$  heisst stationär, falls  $R \cap C \neq \emptyset$  für alle Cub's  $C \subseteq \kappa$ . Andernfalls heisst  $R$  dünn (beispielsweise sind alle beschränkten  $R \subseteq \kappa$  dünn). Ein reguläres  $\kappa$  heisst nun schwache Mahlo-Zahl, falls  $\text{Reg}(\kappa) \subseteq \kappa$  stationär ist;  $\kappa$  ist dann notwendigerweise schwach unerreichbar.

Beweis von Lemma 36 (Wild): Sei  $\kappa < \mathfrak{m}_0$  regulär. Weil  $R := \text{Reg}(\kappa) \subseteq \kappa$  dünn ist, existiert ein Cub  $C \subseteq \kappa$  mit  $R \cap C = \emptyset$ .  $f : \kappa \rightarrow \kappa$  sei die zugehörige Normalfunktion (siehe oben). Gäbe es ein  $\lambda \in R$  mit  $(\forall \lambda^* < \lambda) f\lambda^* \leq \lambda$ , so wäre  $\lambda = f\lambda \in R \cap C$ , im Widerspruch zu  $R \cap C = \emptyset$ . Also erfüllt  $f$  (82).

Sei jetzt  $f : \mathfrak{m}_0 \rightarrow \mathfrak{m}_0$  eine beliebige Normalfunktion. Man sieht leicht, dass  $C := \{\lambda < \mathfrak{m}_0 \mid f\lambda = \lambda\}$  ein Cub ist (die Unbeschränktheit folgt wie in Bem.S.77). Ist  $\lambda \in \text{Reg}(\mathfrak{m}_0) \cap C \neq \emptyset$ , so ist  $(\forall \lambda^* < \lambda) f\lambda^* < f\lambda = \lambda$ , d.h. (82) ist verletzt.  $\square$

Zum Schluss noch einige Bemerkungen über schwach unerreichbare Zahlen und schwache Mahlo-Zahlen.

Sei  $\mathfrak{m}$  eine schwache Mahlo-Zahl und sei  $U := \{u < \mathfrak{m} \mid u \text{ schwach unerreichbar}\}$ . Offenbar ist  $U = \text{Reg}(\mathfrak{m}) \cap C$ , wo  $C$  der Cub aller Limeskardinalzahlen  $\kappa < \mathfrak{m}$  ist. Da zwei Cub's  $C, C'$  immer nichtleeren Schnitt haben (Ku[20],S.78), ist auch  $U \subseteq \mathfrak{m}$  stationär, d.h.  $\mathfrak{m} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{m}}$  ist die  $\mathfrak{m}$ -te schwach unerreichbare Zahl! Man kann sogar zeigen, dass  $\mathfrak{m}$  die  $\mathfrak{m}$ -te unter den schwach unerreichbaren Zahlen  $u$  mit der Eigenschaft  $u = \mathfrak{u}_u$  ist (L[21],S.347). Daraus ist ersichtlich, dass  $\mathfrak{m}_0$  "viel" grösser als  $\mathfrak{u}_0$

ist.

Es gibt Modelle  $(V, \epsilon)$  der Zermelo–Fraenkel–Mengenlehre ohne schwach unerreichbare Zahlen (Ku[20], S.34,133); insofern bedeutet also  $\dim(E) < \mathfrak{m}_0$  in Satz 25 keine Beschränkung.

2.4 Ist  $\mathbf{V}(V, E) \simeq \mathbf{V}(V', E)$  für diagonales  $E$   
eine hinreichende Kongruenzbedingung ?

Um diese Frage zu diskutieren, verwenden wir einen in GLS[15] eingeführten Begriff: Sei  $0 \leq m < \omega$  fest. Eine Struktur  $(\mathbf{V}, \wedge, \vee, \perp, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$  (bzw.  $(\mathbf{V}, \wedge, \vee, \perp)$  für  $m = 0$ ) heisst quadratischer Verband, falls gilt:

(Q1)  $(\mathbf{V}, \wedge, \vee)$  ist modularer Verband mit 0, 1.

(Q2)  $\perp: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  ist Galois-Verbindung mit  $1^\perp = 0$ , d.h.

$$(\forall x, y \in \mathbf{V}) \quad x \leq x^{\perp\perp}, \quad x \leq y \implies y^\perp \leq x^\perp.$$

(Q3)  $\sigma_\gamma: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  ist Abschlussoperator, d.h.  $(\forall 1 \leq \gamma \leq m)$

$$(\forall x, y \in \mathbf{V}) \quad x \leq \sigma_\gamma x, \quad \sigma_\gamma x = \sigma_\gamma(\sigma_\gamma x), \quad x \leq y \implies \sigma_\gamma x \leq \sigma_\gamma y.$$

(Q4)  $(\forall 1 \leq \gamma \leq \beta \leq m)(\forall x \in \mathbf{V}) \quad \sigma_\gamma x \geq \sigma_\beta x.$

(Q5)  $(\forall 1 \leq \gamma \leq m)(\forall x \in \mathbf{V}) \quad \sigma_\gamma(x^\perp) = (\sigma_\gamma x)^\perp.$

(Q6)  $(\forall 1 \leq \gamma \leq m)(\forall x, y \in \mathbf{V}) \quad \sigma_\gamma(x \vee y) = \sigma_\gamma x \vee \sigma_\gamma y.$

Für festes  $m$  bildet die Klasse aller quadratischen Verbände  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_m$  eine Varietät  $\mathbf{IK}_m$  (alle Axiome können auch als Gleichungen geschrieben werden) und man bestätigt in der üblichen Weise (z.B. Grä[9]) die Existenz freier Objekte. Im folgenden sei  $\mathbf{V}_m[a]$  der von einem Element  $a$  in  $\mathbf{IK}_m$  frei erzeugte quadratische Verband; ist  $\mathbf{V}_m$  quadratischer Verband und  $a \in \mathbf{V}_m$ , so sei  $\mathbf{V}_m(a)$  (runde Klammern) der von  $a$  erzeugte quadratische Unterverband.

Für  $m \leq 2$  ist  $V_m[a]$  distributiv und es ist  $|V_0[a]| = 14$  (Kaplansky, vgl.S.19),  $|V_1[a]| = 30$  (Băni),  $|V_2[a]| = 88$  (Gross). Hasse-Diagramme von  $V_m$  ( $m \leq 2$ ) findet man in Sch[24].

$V_3[a]$  ist nicht mehr distributiv und zählt 957 Elemente (Gross,Lomecky,Schuppli)! Im folgenden werden wir intensiven Gebrauch von seinem Hasse-Diagramm auf Faltblatt Fig.18 machen. Um das Diagramm übersichtlich zu halten, sind die folgenden Nachbarschaftsrelationen nicht eingezeichnet:  $x < a + x$  ( $ra < x < ra^{\perp\perp}$ ),  $a + x < \sigma_3 a + x$  ( $r\sigma_3 a < x < ra^{\perp\perp}$ ),  $\sigma_3 a + x < \sigma_2 a + x$  ( $r\sigma_2 a < x < ra^{\perp\perp}$ ),  $\sigma_2 a + x < \sigma_1 a + x$  ( $r\sigma_1 a < x < ra^{\perp\perp}$ ). Damit die "Querverbindungen" die richtige Nordwestrichtung erhalten, verschiebe man die linke Seite des Plans etwas nach oben. Die Gültigkeit des Diagramms, sowie alle weiteren hier nicht gezeigten Aussagen über  $V_3[a]$  sind in GLS[15] bewiesen.

Die durch (Q1) bis (Q6) definierten "abstrakten" quadratischen Verbände stellen natürlich eine Axiomatisierung der folgenden Situation dar: Ist  $V$  Teilraum eines Sesquilinearraumes  $[E, (, )]$ , so bestätigt man leicht, dass  $V(V, E)$  (Def. S.49) zusammen mit der Orthogonalitätsrelation  $\perp$  und den in 2.1 eingeführten Topologien  $\sigma_\gamma$  ein "konkreter" quadratischer Verband  $(V(V, E), \cap, +, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$  ist (für  $\aleph_\gamma > \dim(E)$  ist  $\sigma_\gamma$  diskret).

In Verallgemeinerung der Definition in GLS[15] werden wir auch für unendliches  $m = \alpha$  Sesquilinearräume  $E$  der Dimension  $\aleph_\alpha$  und deren quadratische Verbände  $V(V, E)$  betrachten. Statt von zulässigen Verbandisomorphismen (S.49), kann man auch von indextreu isomorphen quadratischen Verbänden sprechen.

**Satz 37:** *Es sei  $E$  ein regulärer, alternierender Raum mit  $\dim(E) < \mathfrak{m}_0$ . Die Teilräume  $V, V' \subseteq E$  seien  $\sigma_4$ -abgeschlossen und die zugehörigen quadratischen Verbände  $V(V, E)$  und  $V(V', E)$  seien indextreu isomorph. Dann sind  $V$  und  $V'$  kongruent in  $E$ . (Man beachte, dass bei  $\dim(E) \leq \aleph_3$  alle Teilräume  $\sigma_4$ -abgeschlossen sind).*

Beweis: Aus  $\sigma_4 V = V$  folgt mit (Q6) und Induktion über den Termaufbau leicht, dass  $(\forall A \in \mathbf{V}(V, E)) \sigma_4 A = A$ . Daher ist  $\mathbf{V}(V, E)$  ein homomorphes Bild des freien quadratischen Verbandes  $\mathbf{V}_3[a]$ . Wir nehmen zunächst an, es sei  $\mathbf{V}(V, E) \simeq \mathbf{V}_3[a]$ .

(88) *Als modularer Verband ist  $\mathbf{V}_3[a]$  Dreieckverband mit*  

$$J(\mathbf{V}_3[a], D) \simeq \Delta \Delta \text{ // // // // } \dots \text{ // } \quad (57 \text{ Striche})$$

Beweis von (88). Fig. 18 entnimmt man, dass die Elemente 31,22,32 bzw. 35,23,36 je ein Dreieck bilden. Jedes der restlichen 57 irreduziblen Elemente (ungleich  $1 = (0)$ ) möge eine weitere Zusammenhangskomponente bilden. Dies liefert ein  $\Delta$ -Matroid vom Rang 61. Da auch  $\delta(\mathbf{V}(V, E)) = 61$  (vgl. Fig. 18), ergibt sich die Behauptung. (Gemäss Satz 10 (i) sind die restlichen 57 Irreduziblen alle prim.)

Setzen wir  $rx := x \wedge x^\perp$ , so ist gemäss GLS[15] und Tab. 18

$$\begin{aligned} 31 &= (33 \vee 25) \wedge 37 = (\sigma_1((ra)^{\perp\perp} \wedge r\sigma_2 a) \vee r\sigma_2 a) \wedge \sigma_1(r\sigma_3 a) \\ 22 &= (37 \vee 33) \wedge 25 \\ 32 &= (37 \vee 25) \wedge 33 \\ (89) \quad 35 &= (48 \vee 25) \wedge 37 = ((ra)^{\perp\perp} \vee r\sigma_2 a) \wedge \sigma_1(r\sigma_3 a) \\ 23 &= (48 \vee 37) \wedge 25 \\ 36 &= (37 \vee 25) \wedge 37 \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass alle Elemente von  $(P_0, Q_1, P_1) := (32, 22, 31)$   $\sigma_2$ -abgeschlossen sind, aber nicht alle  $\sigma_1$ -abgeschlossen. Aus Fig. 18 liest man  $\sigma_1(P_1 \wedge Q_1) \geq \sigma_1 15 = 37 \geq P_1$  ab. Dies bedeutet, dass die Zusammenhangskomponente  $(P_0, Q_1, P_1)$  ( $\Delta 6$ ) erfüllt.

Die Elemente von  $(P_0, Q_1, P_1) := (36, 23, 35)$  sind ebenfalls  $\sigma_2$ -abgeschlossen, aber nicht  $\sigma_1$ -abgeschlossen, und es ist  $\sigma_1(P_1 \wedge Q_1) \geq \sigma_1 15 = 37 \geq P_1$ , d.h. es gilt wieder ( $\Delta 6$ ). Gemäss Satz 25 ist also die Verbandsisomorphie  $\mathbf{V}(V, E) \rightarrow \mathbf{V}(V', E)$  von einer Isometrie  $E \rightarrow E$  induziert.

Es bleibt noch zu zeigen, dass sich (40) unter jedem Epimorphismus  $\pi : \mathbf{V}_3[a] \rightarrow \mathbf{V}(V)$ ,  $a \mapsto V$ , von quadratischen Verbänden vererbt. Dies ergibt sich, weil aus  $P_0 =$

$\sigma_2 P_0$ ,  $Q_1 = \sigma_2 Q_1$ ,  $P_1 = \sigma_2 P_1$ ,  $\sigma_1(P_1 \wedge Q_1) \geq P_1$  folgt, dass  $\pi P_0 = \pi(\sigma_2 P_0) = \sigma_2(\pi P_0)$ ,  $\pi Q_1 = \sigma_2(\pi Q_1)$ ,  $\pi P_1 = \sigma_2(\pi P_1)$  und  $\sigma_1(\pi P_1 \wedge \pi Q_1) = \sigma_1(\pi(P_1 \wedge Q_1)) = \pi(\sigma_1(P_1 \wedge Q_1)) \geq \pi P_1$ .  $\square$

Als nächstes wollen wir Satz 37 auf nichtalternierende Räume ausdehnen, die noch "genügend viele" isotrope Vektoren enthalten. Dabei werden wir von den in 2.2 definierten initialen Tripeln Gebrauch machen. Zuvor seien einige Definitionen aus G[10] vorweggenommen.

Nach G[10],S.7 ist jeder (orthosymmetrische)  $(k, \nu)$ -Raum  $[E, (,)]$  mit  $\dim(E/E^\perp) > 1$   $\epsilon$ -hermitisch, d.h. es existiert ein  $\epsilon \in k$ , derart dass

$$(90i) \quad \epsilon^\nu \epsilon = \epsilon \epsilon^\nu = 1 \text{ und } (\forall \lambda \in k) \quad \lambda^{\nu^2} = \epsilon^{-1} \lambda \epsilon,$$

$$(90ii) \quad (\forall x, y \in E) \quad (y, x) = \epsilon(x, y)^\nu.$$

$\{(y, y) \mid y \in E\}$  ist also Teilmenge von  $S := \{\xi \in k \mid \xi = \epsilon \xi^\nu\}$ , der Menge der symmetrischen Elemente von  $k$ . Die Sesquilinearform  $(,)$  heisst spurwertig, falls ihre Werte  $(y, y)$  in der Untergruppe der Spuren (traces)  $T := \{\xi + \epsilon \xi^\nu \mid \xi \in k\} \subseteq S$  liegen. Man sieht leicht, dass für Körper  $k$  mit  $\text{char}(k) \neq 2$  alle  $\epsilon$ -hermiteschen Formen spurwertig sind.

Sei  $E$  Sesquilinearraum. Für  $y \in E$  bzw.  $Y \subseteq E$  setze man  $\|y\| := (y, y)$  ("Länge von  $y$ ") bzw.  $\|Y\| := \{\|y\| \mid y \in Y\}$ .  $y$  heisst isotrop, falls  $\|y\| = 0$  und  $Y$  heisst isotrop, falls ein isotroper Vektor  $0 \neq y \in Y$  existiert. Ein Teilraum  $Y \subseteq E$  heisst totalisotrop, falls  $(\forall x, y \in Y)(x, y) = 0$ . Gemäss G[10],S.14 gilt:

(91)  *$Y$  sei ein regulärer, spurwertiger, isotroper Sesquilinearraum. Dann ist  $\|Y\| = T$  und es existiert eine Basis aus isotropen Vektoren.*

**Satz 38:** *Sei  $E$  regulärer, spurwertiger, diagonalen Raum mit  $\dim(E) < \mathfrak{m}_0$  und der Eigenschaft*

$$(92) \quad (\forall Y \subseteq E) \quad \dim(Y) = \infty \implies Y \text{ isotrop.}$$

Ferner seien  $V, V' \subseteq E$   $\sigma_4$ -abgeschlossene Teilräume mit indextreu isomorphen quadratischen Verbänden  $\mathbf{V}(V), \mathbf{V}(V')$  und es gelte

$$(93) \quad \dim(V/rV) < \infty \implies V \cong V' \quad \text{und} \quad \dim(V^\perp/rV^\perp) < \infty \implies V^\perp \cong V'^\perp.$$

Dann sind  $V$  und  $V'$  kongruent in  $E$ .

Beweis: Wie in Satz 37 ist  $\mathbf{V}(V)$  ein homomorphes Bild von  $\mathbf{V}_3[a]$ . Ein Blick in den Beweis von Satz 25 bestätigt, dass es genügt, für eine vorgegebene partitionierte Isometrie  $\varphi : X \rightarrow X'$  mit (44),(44'),(45),(50) die Ping-Pong-Eigenschaft (PP) zu verifizieren. Sei dazu  $w' \in E$  gegeben. Wir können o.B.d.A.  $P' := D'(w', X')$  als irreduzibel und  $w' \in P' \setminus (X' + \widehat{P}')$  annehmen. Ist  $P' \in (rV'^\perp/(0)) \subseteq \mathbf{V}(V')$ , so konstruiere man  $\tilde{\varphi} : X \oplus W \rightarrow X' \oplus W'$  wie in Lemma 30, 31, 32 (hier ist stets  $\dim(W) \leq 2$ ). Da  $W \subseteq rV^\perp$  und  $W' \subseteq rV'^\perp$  totalisotrop sind, ist  $\tilde{\varphi}|_W$  trivialerweise isometrisch, d.h.  $\tilde{\varphi}$  ist eine (44),(44'),(45) erfüllende, partitionierte Isometrie mit  $w' \in \text{im } \tilde{\varphi}$ .

Gemäss Fig. 18 bleiben noch die irreduziblen Elemente  $P$  aus

$$(94) \quad \mathbf{M} := \{\sigma_\gamma \mid 0 \leq \gamma \leq 4\} \cup \{(r\sigma_\gamma V)^\perp \mid 0 \leq \gamma \leq 4\} \cup \{V^\perp, E\}$$

zu behandeln. Dazu machen wir eine vierfache Fallunterscheidung.

1. Fall:  $(\forall P \in \mathbf{M}) \dim(P/\widehat{P}) = \infty$  (ähnlich wie G[10],S.123). Nach Lemma 30 existiert ein  $w$  mit (i)  $w \in P \setminus (X + \widehat{P})$ , (ii)  $\varphi w = w'$ , (iii)  $(\forall x \in X) (x, w) = (\varphi x, w')$ . Es genügt, ein  $y$  zu konstruieren, derart dass  $w + y$  (i), (ii), (iii) und  $\|w + y\| = \|w'\|$  erfüllt.

Sei  $rP \oplus Y = P$ ; dann ist  $\dim(Y) \geq \dim(P/\widehat{P}) \stackrel{(51)}{>} \dim(X \oplus \langle w \rangle) =: \kappa$ . Setzt man  $Y_1 := Y \cap (X \oplus \langle w \rangle)^\perp$ , so folgt aus  $\dim(Y/Y_1) \leq \dim(E/(X \oplus \langle w \rangle)^\perp) \stackrel{(68)}{\leq} \kappa$ , dass  $\dim(Y_1) = \dim(Y)$ . Da  $Y$  regulär ist, ist  $\dim(rY_1) \leq \dim(Y_1^\perp/Y^\perp) \leq \kappa$ . Aus  $rY_1 \neq Y_1$  folgt mit (91)  $|Y_1| = T$  (betrachte ein Supplement von  $rY_1$  in  $Y_1$ ), d.h. es existiert ein  $y_1 \in Y_1$  mit  $\|y_1\| = \|w'\| - \|w\|$ ,  $\|w + y_1\| = \|w'\|$  (da  $y_1 \perp w$ ). Sollte  $w + y_1 \in X + \widehat{P}$  sein, so setze man  $\widehat{P} \oplus Y = P$  und  $Y_2 := Y \cap (X \oplus \langle w + y_1 \rangle)^\perp$ . Da  $Y$

regulär ist, schliesst man wie oben  $\dim(Y_2) = \dim(\hat{Y}) > \kappa$  und  $\dim(rY_2) \leq \kappa$ . Gemäss (91) existiert eine Zerlegung  $rY_2 \oplus \langle y_i \mid i < \dim(Y_2) \rangle = Y_2$  mit isotropen Vektoren  $y_i$  und wegen  $\dim(X \oplus \langle w + y_1 \rangle + \hat{P}/\hat{P}) \leq \kappa$  existiert ein  $y_i \in X \oplus \langle w + y_1 \rangle + \hat{P}$ . Für  $y := y_1 + y_i$  ist  $\|w + y\| = \|w'\|$  und  $w + y$  erfüllt (i), (ii), (iii) ( $\underline{w + y} = \underline{w} \mapsto \underline{w}'$ ).

2. Fall:  $a_{49} := \dim(V/rV) = \infty$  und  $a_{48} := \dim(V^\perp/rV^\perp) = \infty$ . Für  $P' = V'$ ,  $V'^\perp$  folgt (PP) aus dem 1. Fall. Andernfalls gilt zunächst

$$(95) \quad (\forall P \in \mathbf{M} \setminus \{V, V^\perp\}) \quad \dim(\hat{P}/r\hat{P}) = \infty.$$

Beweis von (95). Für  $P \in \{E\} \cup \{(r\sigma_\gamma V)^\perp \mid 0 \leq \gamma \leq 4\}$  ist  $r\hat{P} \subseteq rV^\perp$ , also  $\dim(\hat{P}/r\hat{P}) \geq \dim(V + V^\perp/V^\perp) = a_{49} = \infty$  (Fig. 18). Für  $P \in \{\sigma_\gamma V \mid 0 \leq \gamma \leq 3\}$  ist  $\hat{P} = \sigma_{\gamma+1}V + r\sigma_\gamma V$  und  $r\hat{P} = (\sigma_{\gamma+1}V + r\sigma_\gamma V) \cap (\sigma_{\gamma+1}V)^\perp \cap (r\sigma_\gamma V)^\perp = r\sigma_\gamma V$ , also auch  $\dim(\hat{P}/r\hat{P}) \geq a_{49} = \infty$ .

Sei nun  $P \in \mathbf{M} \setminus \{V, V^\perp\}$ . Für  $\dim(P/\hat{P}) = \infty$  korrigiere man das  $w \in P \setminus (X + \hat{P})$  wie im 1. Fall. Andernfalls folgt aus (51) und (95)  $\dim(\hat{P}/r\hat{P}) = \infty > \dim(X \oplus \langle w \rangle)$ . Setzen wir somit  $r\hat{P} \oplus Y = \hat{P}$  und  $Y_1 := Y \cap (X \oplus \langle w \rangle)^\perp$ , so ist wegen  $\dim(Y_1) = \infty$  und  $\dim(rY_1) \leq \dim(Y_1^\perp/Y^\perp) \leq \dim(Y/Y_1) < \infty$  wieder  $rY_1 \neq Y_1$  und nach (91) existiert ein  $y_1 \in Y_1$  mit  $\|y_1\| = \|w'\| - \|w\|$ . Mithin ist  $w + y_1 \in P \setminus (X + \hat{P})$  (da  $y_1 \in \hat{P}$ ) und  $\|w + y_1\| = \|w'\|$ .

3. Fall:  $a_{49} = \infty$  und  $a_{48} < \infty$ . Gemäss (93) existiert eine Isometrie  $\psi : V^\perp \rightarrow V'^\perp$  und klarerweise ist  $\psi(rV^\perp) = rV'^\perp$ . Setzt man  $V^\perp = rV^\perp \oplus X_0$ , so ist  $V'^\perp = rV'^\perp \oplus X'_0$  mit  $X'_0 := \psi(X_0)$ . Da  $V^\perp \in \mathbf{V}(V)$  prim ist, ist  $\varphi_0 := \psi|_{X_0} : X_0 \rightarrow X'_0$  eine (44), (44'), (45) erfüllende Isometrie. Startet man den Aufbau von  $\Phi : E \rightarrow E$  mit dem initialen Tripel  $(X_0, \varphi_0, X'_0)$  (vgl. S.70), so tritt der Fall  $D(w, X) = V^\perp$  bzw.  $D'(w', X') = V'^\perp$  nicht mehr auf; die Räume  $P \in \mathbf{M} \setminus \{V^\perp\}$  behandelt man wie im 2. Fall.

4. Fall:  $a_{49} < \infty$ . Aus  $\sum_{i=49}^{58} a_i = \dim((rV)^\perp/V^\perp) \stackrel{(68)}{=} a_{49}$  folgt ( $\forall 50 \leq i \leq 58$ )  $a_i = 0$  (Fig./Tab.18). In  $\mathbf{V}(V)$  sind also  $V$ ,  $V^\perp$  und  $E$  die einzigen Irreduziblen aus  $\mathbf{M}$ :

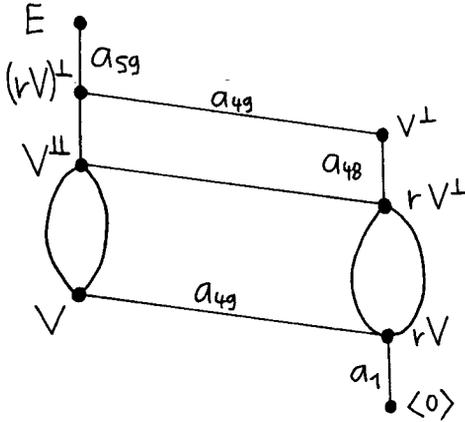


Fig. 19

Unterfall (a):  $a_{48} = \infty$  und  $a_1 := \dim(rV) < \infty$ . Gemäss (93) existiert eine Isometrie  $\psi : V \rightarrow V'$ ; analog zum 3. Fall ist  $\psi(rV) = rV'$ ,  $V = rV \oplus X_0$ ,  $V' = rV' \oplus X'_0$  ( $X'_0 := \psi(X_0)$ ) und  $\varphi_0 := \psi|_{X_0} : X_0 \rightarrow X'_0$  ist eine (44),(44'),(45) erfüllende Isometrie. Beim Aufbau von  $\Phi : E \rightarrow E$  ist der Fall  $D(w, X) = V^\perp$  wegen  $a_{48} = \infty$  problemlos (1. Fall) und der Fall  $D(w, X) = E$  kommt nur "solange" vor, wie  $\dim(X) < \infty$  ist (da  $\dim(E/\hat{E}) < \infty$ ). Wegen  $\dim(\hat{E}/r\hat{E}) = \dim((rV)^\perp/(rV)^\perp) \geq a_{48} > \dim(X)$ , kann man deshalb wie im 2. Fall vorgehen.

Unterfall (b):  $a_{48} < \infty$  und  $a_1 = \infty$ . Gemäss (93) ist  $V \cong V'$  und  $V^\perp \cong V'^\perp$ . Daher können wir  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0$  wie in (a) definieren und finden ferner Zerlegungen  $V^\perp = rV^\perp \oplus \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n \rangle$  und  $V'^\perp = rV'^\perp \oplus \langle x'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x'_n \rangle$  mit  $(\forall 1 \leq i, j \leq n) (x_i, x_j) = \langle x'_i, x'_j \rangle$ . Für  $0 \leq i \leq n$  betrachte man die Abbildung

$$\varphi_i : X_0 \oplus \langle x_1, \dots, x_i \rangle \rightarrow X'_0 \oplus \langle x'_1, \dots, x'_i \rangle, \quad \varphi_i|_{X_0} := \varphi_0, \quad \varphi_i x_j := x'_j.$$

Nach Konstruktion ist  $\varphi_0$  eine (44),(44'),(45) erfüllende Isometrie. Angenommen  $\varphi_{i-1}$  habe die gleichen Eigenschaften. Wegen  $x_i \notin (X_0 \oplus \langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle) + rV^\perp$  ist  $D(X_0 \oplus \langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle, x_i) = V^\perp$  und analog  $D'(X'_0 \oplus \langle x'_1, \dots, x'_{i-1} \rangle, x'_i) = V'^\perp$ ; die Primtheit von  $V^\perp$ ,  $V'^\perp$  garantiert daher, dass  $\varphi_i$  wieder (44),(44'),(45) erfüllt. Weil  $x_i \perp X_0$ ,  $x'_i \perp X'_0$  und  $(\forall 1 \leq j \leq i) (x_i, x_j) = \langle x'_i, x'_j \rangle$ , ist  $\varphi_i$  auch isometrisch. Per Induktion ist somit

$(X_0 \oplus (x_1, \dots, x_n), \varphi_n, X'_0 \oplus (x'_1, \dots, x'_n))$  ein initiales Tripel, das die Irreduziblen  $V$  und  $V^\perp$  entschärft. Der Fall  $D(w, X) = E$  ist wegen  $\dim(E/\hat{E}) = a_1 = \infty$  problemlos (1. Fall).

Unterfall (c):  $a_{48} < \infty$  und  $a_1 < \infty$ . Dann ist  $\dim(V) = a_1 + a_{49} < \infty$ , woraus mit (68)  $V = V^{\perp\perp}$  und somit  $\dim(E) = a_1 + a_{48} + a_{49} + a_{59} < \infty$  folgt. Da nach Voraussetzung (93)  $V$  und  $V'$  isometrisch sind, existiert nach dem Witt'schen Fortsetzungssatz G[10], S.376 eine Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  mit  $\Phi(V) = V'$ .  $\square$

Aus dem Beweis von Satz 38 (1./2. Fall) folgt sofort, dass sich Satz 25 verallgemeinern lässt:

**Scholion 39:** Sei  $E$  ein regulärer, diagonalen spurwertiger Raum mit  $\dim(E) < m_0$  und der Eigenschaft (92). Weiter sei  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  ein zulässiger Verbandisomorphismus zwischen abzählbaren, artinschen  $\Delta$ -Verbänden  $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \subseteq L(E)$  und  $(X_0, \varphi_0, X'_0)$  sei ein initiales Tripel.

Falls jedes  $\theta \in \text{sp}(\mathbf{V})$  (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist  $\eta$  von einer Isometrie  $\Phi : E \rightarrow E$  induziert.

- (i)  $\theta$  erfüllt  $(\Delta 6)$  und  $\sum\{P \mid P \in J^\theta(\mathbf{V})\}$  ist totalisotrop,
- (ii)  $(X_0, \varphi_0, X'_0)$  entschärft alle  $P \in J^\theta(\mathbf{V})$ ,
- (iii)  $\mathbf{V}_\theta \simeq D_2$  und  $\dim(P/rP) = \infty$  ( $\{P\} := J^\theta(\mathbf{V})$ ).

Für viele Körper  $k$  ist (92) automatisch erfüllt; so besitzt z.B. jeder  $\infty$ -dimensionale, symmetrische Raum  $E$  über einem Kneser-Körper einen isotropen Vektor. Dabei heisst  $k$  Kneser-Körper, falls  $k$  nicht formal reell,  $\text{char}(k) \neq 2$ , und der Index der Gruppe der Quadrate in  $k \setminus \{0\}$  endlich ist. Beispiele sind die algebraisch (oder quadratisch) abgeschlossenen Körper, die endlichen Körper und Körper von  $p$ -adischen Zahlen. In G[10], S.84 ff sind weitere Körper mit der Eigenschaft (92) aufgeführt.

Für später ist es nützlich, die Situation wie folgt zu präzisieren: Ein Tripel  $(k, \nu, \epsilon)$  mit (90i) heisse isotrop (par abus de langage), falls für jeden  $(k, \nu, \epsilon)$ -hermiteschen Raum  $E$  (92) zutrifft.

Ist  $E$  ein Vektorraum und  $V \subseteq L(E)$  ein Verband, so induziert jede  $V$ -Zerlegung  $E = \bigoplus \{E_i \mid i \in I\}$  auch eine subdirekte Zerlegung von  $V$  (Bem. S.7).

Ist nun  $E$  ein  $\epsilon$ -hermitischer Raum und  $V \subseteq L(E)$  ein quadratischer Verband, so induziert jede orthogonale  $V$ -Zerlegung  $E = \bigoplus \{E_i \mid i \in I\}$  auch eine subdirekte Zerlegung des quadratischen Verbandes  $V$ , denn die subdirekten Faktoren  $V_i := \{A \cap E_i \mid A \in V\}$  sind wegen (56) bezüglich  $\sigma_\gamma$  und  $\perp$  abgeschlossen, mithin selbst quadratische Verbände.

In Satz 19 verwendeten wir die Zerlegbarkeit zweier isomorpher Verbände  $V, V' \subseteq L(E)$  zur Konstruktion eines induzierenden linearen Isomorphismuses  $\Phi : E \rightarrow E$ .

Wir wollen nun umgekehrt sehen, wie man die Induziertheitsaussage von Satz 38 zur Konstruktion orthogonaler Zerlegungen für gewisse quadratische Verbände  $V$  verwenden kann!

Sei  $E$  ein regulärer, diagonalen,  $\epsilon$ -hermitischer Raum und  $V \subseteq E$  ein  $\sigma_4$ -abgeschlossener Teilraum. Dann ist der quadratische Verband  $(V(V), \cap, +, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ein homomorphes Bild von  $V_3[a]$  ( $a \mapsto V$ ). Als modularer Verband besitzt  $V_3[a]$  59 Äquivalenzklassen projektiver Primquotienten (vgl.(7),(88)); demnach können wir auch in  $V(V)$  59 Indices (= Kodimensionen benachbarter Elemente)  $a_i = a_i(V(V))$  betrachten. Einige der  $a_i$ 's kreuzten schon in Satz 38 unsern Weg; die allgemeine Zuordnung der  $a_i$ 's zu den Klassen projektiver Primquotienten ist aus Tab.18 ersichtlich (in Schuppli[25] heissen die Indices  $a_{49}$  bis  $a_{59}$  anders:  $b_1 = a_{49}, \dots, b_5 = a_{53}, c_1 = a_{54}, \dots, c_6 = a_{59}$ ). Da  $V(V)$  quadratischer Verband ist, bestehen, anders als in (7), gewisse Relationen zwischen den Indices, z.B. ist gemäss (68)  $a_{55} = a_{47}, a_{56} = a_{42}, a_{57} = a_{24}, a_{58} = a_6, a_{59} = a_1$ . Auch die übrigen 54 Indices sind von einander abhängig:

**Satz 40** (Sch[25]): Sei  $E$  regulärer, diagonalen  $(k, \nu, \epsilon)$ -Raum und  $V \subseteq E$  ein  $\sigma_4$ -abgeschlossener Teilraum. Dann bestehen die folgenden Relationen zwischen den Indices  $a_i = a_i(V(V, E))$ :

$$(R1) \quad a_1 = a_{59} = a_1 + a_2N_3 + a_3N_2 + a_4N_1 + a_5N_0 + a_7N_2$$

$$\begin{aligned}
& + a_8 N_2 + a_9 N_2 + a_{10} N_2 + a_{11} N_1 + a_{12} N_1 \\
& + a_{13} N_0 + a_{15} N_1 + a_{16} N_1 + a_{17} N_1 + a_{18} N_0 \\
& + a_{19} N_0 + a_{21} N_1 + a_{22} N_0 + a_{25} N_1 + a_{26} N_1 \\
& + a_{27} N_1 + a_{28} N_1 + a_{29} N_1 + a_{30} N_1 + a_{31} N_0 \\
& + a_{33} N_1 + a_{34} N_0 + a_{36} N_0 + a_{39} N_0 + a_{43} N_0
\end{aligned}$$

$$(R4) \quad a_4 = a_4 + a_8 N_2$$

$$(R5) \quad a_5 = a_5 + a_9 N_2 + a_{10} N_2 + a_{12} N_1 + a_{16} N_1 + a_{26} N_1$$

$$\begin{aligned}
(R6) \quad a_6 = a_{58} = a_6 & + a_{11} N_2 + a_{12} N_2 + a_{13} N_2 + a_{14} N_2 \\
& + a_{17} N_2 + a_{18} N_1 + a_{20} N_1 + a_{21} N_1 + a_{22} N_1 \\
& + a_{23} N_0 + a_{27} N_2 + a_{28} N_1 + a_{29} N_1 + a_{31} N_1 \\
& + a_{32} N_1 + a_{33} N_1 + a_{34} N_1 + a_{35} N_1 + a_{37} N_0 \\
& + a_{40} N_0 + a_{44} N_0
\end{aligned}$$

$$(R13) \quad a_{13} = a_{13} + a_{17} N_1 + a_{27} N_1$$

$$(R18) \quad a_{18} = a_{18} + a_{28} N_1$$

$$(R19) \quad a_{19} = a_{19} + a_{21} N_1 + a_{29} N_1 + a_{30} N_1$$

$$(R22) \quad a_{22} = a_{22} + a_{33} N_1$$

$$(R23) \quad a_{23} = a_{23} + a_{34} N_1 + a_{35} N_1$$

$$(R24) \quad a_{24} = a_{57} = a_{24} + a_{36} N_1 + a_{37} N_1 + a_{38} N_1 + a_{41} N_0 + a_{45} N_0$$

$$(R42) \quad a_{42} = a_{56} = a_{42} + a_{46} N_0$$

$$(R47) \quad a_{47} = a_{55}$$

$$(R48) \quad a_{48} = a_{48} + a_{54} N_0$$

$$\begin{aligned}
(R49) \quad a_{49} = a_{49} & + a_3 N_3 + a_4 N_3 + a_5 N_3 + a_6 N_3 + a_8 N_3 + a_9 N_3 \\
& + a_{10} N_3 + a_{11} N_3 + a_{12} N_3 + a_{13} N_3 + a_{14} N_3 + a_{15} N_3 \\
& + a_{16} N_3 + a_{17} N_3 + a_{18} N_3 + a_{19} N_2 + a_{20} N_3 + a_{21} N_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{22}N_3 + a_{23}N_3 + a_{24}N_2 + a_{26}N_3 + a_{27}N_3 + a_{28}N_3 \\
& + a_{29}N_3 + a_{30}N_2 + a_{31}N_3 + a_{32}N_3 + a_{33}N_3 + a_{34}N_3 \\
& + a_{35}N_3 + a_{36}N_2 + a_{37}N_3 + a_{38}N_2 + a_{39}N_1 + a_{40}N_3 \\
& + a_{41}N_2 + a_{42}N_1 + a_{44}N_3 + a_{45}N_2 + a_{46}N_1 + a_{47}N_0 \\
& + a_{50}N_3 + a_{51}N_2 + a_{52}N_1 + a_{53}N_0 + a_{54}N_0 + a_{55}N_0 \\
& + a_{56}N_1 + a_{57}N_2 + a_{58}N_3
\end{aligned}$$

(Schuppli setzt in [25]  $\dim(E) \leq N_3$  voraus, eine Durchsicht des Beweises ergibt jedoch, dass nur  $\sigma_4 V = V$  gebraucht wird.) Obige Liste von Relationen ist vollständig im folgenden Sinne: Ist  $(\alpha_i \mid 1 \leq i \leq 54)$  eine Familie von Kardinalzahlen, welche den Relationen (R1) bis (R49) genügt, so existiert stets ein Raum  $E$  und ein geeigneter Unterraum  $V \subseteq E$ , derart dass  $(\forall 1 \leq i \leq 54) a_i(\mathbf{V}(V, E)) = \alpha_i$ . Wir formulieren dies genauer in

**Satz 41** (Sch[25]): Sei  $(k, \nu, \epsilon) \neq (k, \text{id}, -1)$  fest. Für alle  $1 \leq i \leq 54$  existiert ein regulärer, diagonalen  $(k, \nu, \epsilon)$ -Raum  $E^i$  mit  $\dim(E^i) \leq N_3$  und ein Unterraum  $V^i \subseteq E^i$ , derart dass  $a_i(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = 1$  ist, und die  $a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i))$  kleinstmöglich ausfallen:

$$I_0 := \{1, 4, 5, 6, 13, 18, 19, 22, 23, 24, 42, 47, 48, 49\};$$

$$(96) \quad j \notin I_0 \implies (\forall 1 \leq i \leq 54) a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = \delta_{i,j}$$

$$j \in I_0 \implies (\forall 1 \leq i \leq 54) a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = \text{Koeffizient von } a_i \text{ in } (R_j)$$

**Satz 42:** Sei  $(k, \nu, \epsilon) \neq (k, \text{id}, -1)$  ein festes isotropes Tripel. Ist  $E$  ein regulärer, spurwertiger, diagonalen  $(k, \nu, \epsilon)$ -Raum mit  $N_0 \leq \dim(E) < m_0$  und  $V \subseteq E$  ein  $\sigma_4$ -abgeschlossener Teilraum, so existiert eine orthogonale  $\mathbf{V}(V, E)$ -Zerlegung der Art

$$E = \bigoplus_{i \in I} H_i = \bigoplus_{i \in I} \left( \bigoplus_{j < \alpha_i} H_{i,j} \right), \quad (\alpha_i := a_i(\mathbf{V}(V, E)), \quad I := \{i \mid \alpha_i \neq 0\}),$$

welche eine Zerlegung von  $\mathbf{V}(V, E)$  in seine quadratisch subdirekt irreduziblen Faktoren induziert.

**Beweis:** Zu jedem  $i \in I$  wählen wir nach Satz 41 ein "Schuppli'sches Elementarbeispiel"  $(E^i, V^i)$ , von dem wir isomorphe Kopien  $(V^{ij}, E^{ij})$  ( $0 \leq j < \alpha_i$ ) anfertigen. Wir setzen

$$E^y := \bigoplus_{i \in I} \left( \bigoplus_{j < \alpha_i} E^{ij} \right), \quad V^y := \bigoplus_{i \in I} \left( \bigoplus_{j < \alpha_i} V^{ij} \right)$$

und behaupten

$$(97) \quad \mathbf{V}(V^y, E^y) \text{ ist indextreu isomorph zu } \mathbf{V}(V, E).$$

Beweis von (97). Wegen (55) ist  $\sigma_4 V^y = V^y$  und  $\mathbf{V}(V^y, E^y)$  ist jedenfalls homomorphes Bild von  $\mathbf{V}_3[a]$ . Es bleibt ( $\forall 1 \leq j \leq 54$ )  $a_j(\mathbf{V}(V^y, E^y)) = \alpha_j$  zu zeigen. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall:  $j \notin I$ , d.h.  $\alpha_j = 0$ . Ist zunächst  $j \in I_0$ , so verschwinden auch alle  $\alpha_k$  auf der rechten Seite von  $(R_j)$ , d.h. gemäss (96) ist  $(\forall i \in I) a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = 0$ . Also ist  $a_j(\mathbf{V}(V^y, E^y)) = \sum_{i \in I} \alpha_i a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = 0 = \alpha_j$ . Ist  $j \notin I_0$ , so ist  $a_j(\mathbf{V}(V^y, E^y)) = \sum_{i \in I} \alpha_i a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) \stackrel{(96)}{=} \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_{i,j} = 0 = \alpha_j$ .

2. Fall:  $j \in I$ . Ist  $j \in I_0$ , so ist gemäss (96) und Gleichung  $(R_j)$   $a_j(\mathbf{V}(V^y, E^y)) = \alpha_j a_j(\mathbf{V}(V^j, E^j)) + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \alpha_i a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = \alpha_j$ . Ist  $j \notin I_0$ , so wird obige Gleichung zu  $a_j(\mathbf{V}(V^y, E^y)) = \alpha_j a_j(\mathbf{V}(V^j, E^j)) + 0 = \alpha_j$ .

Wegen (97) ist insbesondere  $\dim(E^y) = \dim(E)$  und weil es für ein isotropes  $(k, \nu, \epsilon)$  nur eine Isometrieklasse von regulären, spurwertigen,  $\aleph_0$ -dimensionalen Räumen gibt ( $|E| = |E^y| \stackrel{(91)}{=} T$  und G[10], S.70), ist  $E \simeq E^y$  und wir erhalten mit Satz 38 eine Isometrie  $\Phi: E^y \rightarrow E$ , welche den Verbandsisomorphismus  $\mathbf{V}(V^y, E^y) \rightarrow \mathbf{V}(V, E)$  induziert. Wir setzen  $(\forall i \in I)(\forall j < \alpha_i) H^{ij} := \Phi(E^{ij})$ . Weil  $(\forall A \in \mathbf{V}(V, E)) \bigoplus_{i,j} (H^{ij} \cap A) \subseteq A = \Phi(\bigoplus_{i,j} (E^{ij} \cap A')) \subseteq \bigoplus_{i,j} (H^{ij} \cap A)$  gilt, ist  $E = \bigoplus_{i,j} H^{ij}$  eine  $\mathbf{V}(V, E)$ -Zerlegung. In Satz 46 werden wir zeigen, dass alle Schuppli'schen Elementarbeispiele  $\mathbf{V}(V^i, E^i) \simeq \mathbf{V}(V \cap H^{ij}, H^{ij})$  als quadratische Verbände subdirekt irreduzibel sind.  $\square$

**Bemerkung 1:** Mit der Bedingung  $(k, \nu, \epsilon) \neq (k, \text{id}, -1)$  haben wir alternierende Räume  $E$  ausgeschlossen. Für solche ist nämlich  $\{(R_j) \mid j \in I_0\}$  keine vollständige Liste von Relationen mehr; z.B. existiert kein alternierender Raum  $E$  mit Unterraum  $V \subseteq E$ , der die  $(R_j)$ 's befriedigenden Bedingungen  $a_{48}(\mathbf{V}(V, E)) = 1$  und  $(\forall i \neq 48) a_i(\mathbf{V}(V, E)) = 0$  erfüllt (siehe Fig. 22(ii)). Man kann aber bei allen Elementarbeispielen  $\mathbf{V}(V^i, E^i)$  in der Definition von  $E^i$  die anisotropen Geraden  $\langle a \rangle$  durch hyperbolische Ebenen  $\langle a, a' \rangle$  ersetzen und  $V^i$  so abändern, dass stets  $a_i(\mathbf{V}(V^i, E^i)) \leq 2$  sowie (96) gilt. Dies lässt Hoffnung, dass Satz 42 dennoch für alternierende Räume gilt.

**Bemerkung 2:** Die Bedingung  $\dim(E) \geq \aleph_0$  in Satz 42 ist wesentlich, denn für  $\dim(E) < \aleph_0$  braucht der Vergleichsraum  $E'$  nicht mehr zu  $E$  isometrisch zu sein!

Satz 38 besagt, dass für viele Körper  $k$  in jedem regulären, diagonalen  $k$ -Raum  $E$  die Kongruenzklasse eines  $\sigma_4$ -abgeschlossenen Teilraums  $V \subseteq E$  schon durch  $\mathbf{V}(V, E)$  bestimmt ist.

Gilt dies auch, falls  $V$  bloss  $\sigma_5$ -abgeschlossen ist? In diesem Fall ist  $\mathbf{V}(V, E)$  ein homomorphes Bild von  $\mathbf{V}_4[a]$ . In Satz 47 werden wir sehen, dass es sogar distributive quadratische Verbände  $\mathbf{V}_4(a)$  mit unendlich absteigenden Ketten gibt! Es ist anzunehmen, dass auch konkrete  $\mathbf{V}(V, E)$  mit  $\sigma_5$ -abgeschlossenem  $V$  unendlich absteigende Ketten besitzen können (ein Beispiel steht allerdings noch aus). Da die absteigende Kettenbedingung schon für affine Konstruktionen wesentlich war (S.40), dürfte sich Satz 38 wohl nicht auf  $\sigma_5$ -abgeschlossene Teilräume  $V$  verallgemeinern lassen.

Es liegt nahe, sich deshalb auf endliche Verbände  $\mathbf{V}(V, E)$  zu beschränken. Leider gilt Satz 38 auch unter dieser Prämisse nicht mehr:

**Satz 43:** *Es existiert ein regulärer, diagonal, alternierender Raum  $E$  der Dimension  $\aleph_5$  mit Teilräumen  $V, V' \subseteq E$ , derart dass  $\mathbf{V}(V, E)$  und  $\mathbf{V}(V', E')$  indextreu isomorph von Kardinalität 32 sind, aber  $V$  und  $V'$  nicht kongruent in  $E$  sind.*

**Beweis:** Wir benützen die Methode von GLS[15],II.2. Sei  $k$  ein Körper mit  $|k| \geq 4$  und seien  $\beta_1 \neq \beta_2$  aus  $k \setminus \{0, 1\}$ . Unterräume der Form  $\langle a, a' \rangle$  bezeichnen im folgenden alternierende hyperbolische Ebenen, d.h. es ist  $(a, a) = (a', a') = 0$ ,  $(a, a') = 1$ ,  $(a', a) = -1$ . Wir setzen

$$(98) \quad \begin{aligned} E := & \langle a, a' \rangle \oplus \langle b, b' \rangle \oplus \left( \bigoplus_{\iota} \langle \omega_0 (r_{\iota}, r'_{\iota}) \rangle \right) \oplus \left( \bigoplus_{\iota} \langle \omega_1 (s_{\iota}, s'_{\iota}) \rangle \right) \\ & \oplus \left( \bigoplus_{\iota} \langle \omega_2 (t_{\iota}, t'_{\iota}) \rangle \right) \oplus \left( \bigoplus_{\kappa}^{\iota} \langle \omega_5^1 (g_{\iota\kappa}, g'_{\iota\kappa}) \rangle \right) \\ & \oplus \left( \bigoplus_{\kappa}^{\iota} \langle \omega_4^2 (h_{\iota\kappa}, h'_{\iota\kappa}) \rangle \right) \oplus \left( \bigoplus_{\kappa} \langle \omega_3 (l_{\kappa}, l'_{\kappa}) \rangle \right) \end{aligned}$$

und

$$(99) \quad \begin{aligned} V = & V_0 + V_1 + V_2 + V_3 := \bigoplus_{\iota} \langle \omega_0 (a + r_{\iota}) \rangle \\ & \oplus \left( \bigoplus_{\kappa}^{\iota} \langle \omega_5^1 ((b + s_{\iota} + g_{\iota\kappa}) \oplus (b + s_{\iota} + g'_{\iota\kappa})) \rangle \right) \\ & \oplus \left( \bigoplus_{\kappa}^{\iota} \langle \omega_4^2 ((a + b + t_{\iota} + h_{\iota\kappa}) \oplus (a + b + t_{\iota} + h'_{\iota\kappa})) \rangle \right) \\ & \oplus \left( \bigoplus_{\kappa} \langle \omega_3 ((a + \beta_1 b + l_{\kappa}) \oplus (a + \beta_1 b + l'_{\kappa})) \rangle \right). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$(100) \quad V^{\perp} = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle r_{\iota} \rangle_{\omega_0} + \langle t_{\iota} \rangle_{\omega_2} + \langle s_{\iota} \rangle_{\omega_1},$$

$$\begin{aligned} \sigma_5 V = & \underline{\langle a + r_{\iota} \rangle_{\omega_0}} + \langle b + s_{\iota} \rangle_{\omega_1} + \langle g_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} + \langle g'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} \\ & + \langle a + b + t_{\iota} + h_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} + \langle a + b + t_{\iota} + h'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} \\ & + \langle a + \beta_1 b + l_{\kappa} \rangle_{\omega_3} + \langle a + \beta_1 b + l'_{\kappa} \rangle_{\omega_3} \end{aligned}$$

$$(101) \quad \begin{aligned} \sigma_4 V = & \underline{\langle a + r_{\iota} \rangle_{\omega_0}} + \langle b + s_{\iota} \rangle_{\omega_1} + \langle g_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} + \langle g'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} \\ & + \underline{\langle a + b + t_{\iota} \rangle_{\omega_2}} + \langle h_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} + \langle h'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} \\ & + \langle a + \beta_1 b + l_{\kappa} \rangle_{\omega_3} + \langle a + \beta_1 b + l'_{\kappa} \rangle_{\omega_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 V = & \underline{\langle a + r_{\iota} \rangle_{\omega_0}} + \langle b + s_{\iota} \rangle_{\omega_1} + \langle g_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} + \langle g'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} \\ & + \underline{\langle a + b + t_{\iota} \rangle_{\omega_2}} + \langle h_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} + \langle h'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} \\ & + \underline{\langle a + \beta_1 \rangle} + \langle l_{\kappa} \rangle_{\omega_3} + \langle l'_{\kappa} \rangle_{\omega_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 V = & \sigma_1 V = \sigma_0 V = \underline{\langle a \rangle} + \underline{\langle r_{\iota} \rangle_{\omega_0}} + \underline{\langle b \rangle} + \underline{\langle s_{\iota} \rangle_{\omega_1}} + \underline{\langle t_{\iota} \rangle_{\omega_2}} + \langle g_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} \\ & + \langle g'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_1 \omega_5} + \langle h_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} + \langle h'_{\iota\kappa} \rangle_{\omega_2 \omega_4} + \langle l_{\kappa} \rangle_{\omega_3} + \langle l'_{\kappa} \rangle_{\omega_3} \end{aligned}$$

Zunächst sei festgehalten, dass z.B.  $(g_{i\kappa})_{\omega_1\omega_5}$  eine Abkürzung für  $\langle g_{i\kappa} \mid i < \omega_1, \kappa < \omega_5 \rangle$  ist; die andern Ausdrücke sind entsprechend zu verstehen.

Beweis von (100). Die Inklusion  $\supseteq$  ist klar. Sei umgekehrt  $x = \alpha a + \alpha' a' + \beta b + \beta' b' + \sum \rho_i r_i + \sum \rho'_i r'_i + \sum \sigma_i s_i + \sum \sigma'_i s'_i + \sum \tau_i t_i + \sum \tau'_i t'_i + \sum \gamma_{i\kappa} g_{i\kappa} + \sum \gamma'_{i\kappa} g'_{i\kappa} + \sum \xi_{i\kappa} h_{i\kappa} + \sum \xi'_{i\kappa} h'_{i\kappa} + \sum \lambda_{i\kappa} l_{i\kappa} + \sum \lambda'_{i\kappa} l'_{i\kappa} \perp V$  (fast alle Koeffizienten = 0). Fixiert man ein  $i < \omega_0$  mit  $\rho'_i = 0$ , so folgt  $\alpha' = (x, a + r_i) = 0$ . Wählt man  $i, \kappa$  mit  $\sigma'_i = \gamma'_{i\kappa} = 0$ , so folgt  $\beta' = (x, b + s_i + g_{i\kappa}) = 0$ . Nun ist  $(\forall i < \omega_0) \rho'_i = (x, a + r_i) = 0$  (beachte  $\alpha' = 0$ ). Ebenso schliesst man leicht  $(\forall i, \kappa) \sigma'_i = \tau'_i = \gamma'_{i\kappa} = \xi'_{i\kappa} = \lambda'_{i\kappa} = 0$ .

Beweis von (101). Gemäss (55) ist  $\sigma_5 V = \sigma_5 V_0 + \sigma_5 V_1 + \sigma_5 V_2 + \sigma_5 V_3 = V_0 + \sigma_5 V_1 + V_2 + V_3$ . Somit genügt es zu zeigen, dass  $b + s_i$  ( $i < \omega_1$ ) ein  $\sigma_5$ -Berührungspunkt von  $V_1$  ist. Sei dazu  $Y \subseteq E$  mit  $\dim(Y) < \aleph_5$  gegeben. Dann ist  $(b + s_i + Y^\perp) \cap V_1 \neq \emptyset$ , denn es existiert ein  $\kappa < \omega_5$  mit  $g_{i\kappa} \perp Y$  (man betrachte die Komponenten der Vektoren einer Basis von  $Y$  bezüglich der Zerlegung (98)). Auf analoge Weise berechnet man  $\sigma_4 V$  und  $\sigma_3 V$ . Zur Berechnung von  $\sigma_2 V$  sei bemerkt, dass  $a + b$  ein  $\sigma_2$ -Berührungspunkt von  $\langle a + b + t_i \rangle_{\omega_2}$  ist; mit  $a + b, a + \beta_1 b \in \sigma_2 V$  ist auch  $a, b \in \sigma_2 V$ . Klarerweise ist  $\sigma_2 V$  sogar  $\sigma_0 (= \perp\perp)$ -abgeschlossen, da sich der  $\sigma_0$ -Abschluss "pro hyperbolische Ebene" berechnet.

Wie man leicht verifiziert, geben die unterstrichenen Terme in (101) jeweils  $r\sigma_\gamma V := \sigma_\gamma V \cap (\sigma_\gamma V)^\perp = \sigma_\gamma V \cap V^\perp$  an ( $0 \leq \gamma \leq 6, \sigma_6 = \text{id}$ ). Wir berechnen einige weitere Elemente von  $\mathbf{V}(V, E)$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_0(rV) &= \langle a \rangle + \langle r_i \rangle_{\omega_0} \\
 \sigma_1(r\sigma_5 V) &= \langle a + r_i \rangle_{\omega_0} + \langle b \rangle + \langle s_i \rangle_{\omega_1} = \underline{r\sigma_5 V} \oplus \langle b \rangle \\
 \sigma_2(r\sigma_4 V) &= \langle a + r_i \rangle_{\omega_0} + \langle b + s_i \rangle_{\omega_1} + \langle a + b \rangle + \langle t_i \rangle_{\omega_2} \\
 (102) \quad A_1 &:= \sigma_0(rV) + \sigma_1(r\sigma_5 V) = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle r_i \rangle_{\omega_0} + \langle s_i \rangle_{\omega_1} \\
 A_2 &:= \sigma_0(rV) + r\sigma_5 V = \langle a \rangle + \langle r_i \rangle_{\omega_0} + \langle b + s_i \rangle_{\omega_1} = \underline{r\sigma_5 V} \oplus \langle a \rangle \\
 A_3 &:= \sigma_0(rV) + r\sigma_4 V = \langle a \rangle + \langle r_i \rangle_{\omega_0} + \langle b + s_i \rangle_{\omega_1} + \langle a + b + t_i \rangle_{\omega_2} \\
 A_4 &:= \sigma_1(r\sigma_5 V) + r\sigma_4 V = \langle a + r_i \rangle_{\omega_0} + \langle b \rangle + \langle s_i \rangle_{\omega_1} + \langle a + b + t_i \rangle_{\omega_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (102) \quad A_5 &:= A_1 \cap r\sigma_3 V = \langle a + r_i \rangle \omega_0 + \langle b + s_i \rangle \omega_1 \\
 &\quad + \langle a + \beta_1 b \rangle = \underline{r\sigma_5 V \oplus \langle a + \beta_1 b \rangle} \\
 A_6 &:= A_1 \cap \sigma_2(r\sigma_4 V) = \langle a + r_i \rangle \omega_0 + \langle b + s_i \rangle \omega_1 + \langle a + b \rangle \\
 &\quad = \underline{r\sigma_5 V \oplus \langle a + b \rangle}
 \end{aligned}$$

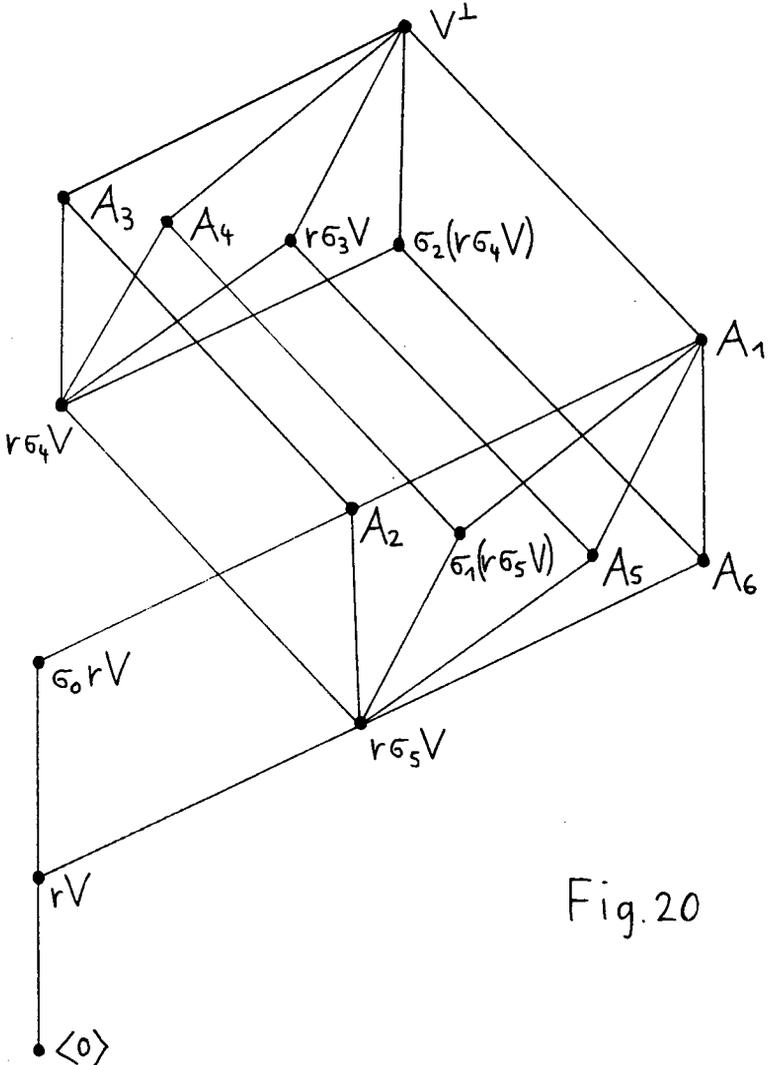


Fig.20

Beweis von (102). Die ersten drei Zeilen verifiziert man analog zu (101). Der Rest ist einfache lineare Algebra.

Die Unterräume  $\{0\}$ ,  $rV$ ,  $r\sigma_5V$ ,  $r\sigma_4V$ ,  $r\sigma_3V$ ,  $r\sigma_2V = r\sigma_1V = r\sigma_0V = V^\perp$ , sowie die in (102) aufgeführten Räume bilden einen  $+$ ,  $\cap$ -Unterverband  $\mathbf{S}(V, E)$  von  $\mathbf{V}(V, E)$ , wie man anhand von Fig. 20 leicht verifiziert.

$$(103) \quad \mathbf{S}(V, E) \text{ ist der von } \mathbf{R}(V, E) := \{\{0\}\} \cup \{\sigma_\gamma V \mid 0 \leq \gamma \leq 6\}$$

$$\sigma_\gamma\text{-stabil erzeugte Verband } (0 \leq \gamma \leq 5).$$

Beweis von (103). Zu zeigen bleibt, dass  $\mathbf{S}(V, E)$   $\sigma_\gamma$ -stabil ist für  $0 \leq \gamma \leq 5$ :  $\sigma_1(rV) = rV$ ,  $\sigma_0(rV) \in \mathbf{S}(V, E)$ ;  $\sigma_2(r\sigma_5V) = r\sigma_5V$ ,  $\sigma_1(r\sigma_5V) \in \mathbf{S}(V, E)$ ,  $\sigma_0(r\sigma_5V) = A_1$ ;  $\sigma_3(r\sigma_4V) = r\sigma_4V$ ,  $\sigma_2(r\sigma_4V) \in \mathbf{S}(V, E)$ ,  $\sigma_1(r\sigma_4V) = V^\perp$ ;  $\sigma_3(r\sigma_3V) = r\sigma_3V$ ,  $\sigma_2(r\sigma_3V) = V^\perp$ . Für  $B = A_1, A_2, A_5, A_6$  ist  $\sigma_2B = B$  und  $\sigma_1B = \sigma_0B = A_1$ . Für  $B = A_3, A_4$  ist  $\sigma_3B = B$  und  $\sigma_2B = V^\perp$ .

In Sch[24],S.25, sowie in GLS[15],S.272 bezeichnet  $\mathbf{S}(V, E)$  allgemein den durch (103) definierten Unterverband von  $\mathbf{V}(V, E)$  (genauer sind  $\mathbf{S}(V, E)$ ,  $\mathbf{V}(V, E)$  dieendants zu  $\mathbf{S}(a)$ ,  $\mathbf{V}(a)$  in GLS[15]). Weitere Bausteine von  $\mathbf{V}(V, E) = \mathbf{V}_m(V, E)$  sind

$$\mathbf{S}^\gamma(V, E) := \sigma_\gamma V + \mathbf{S}(V, E) = \{\sigma_\gamma V + B \mid B \in \mathbf{S}(V, E)\} \quad (0 \leq \gamma \leq m+1)$$

$$\mathbf{A}(V, E) := \mathbf{R}(V, E)^\perp = \{(\sigma_\gamma V)^\perp \mid 0 \leq \gamma \leq m+1\} \cup \{E\}$$

$$\mathbf{B}(V, E) := \{V^\perp\} \cup \{\sigma_\gamma V + V^\perp \mid 0 \leq \gamma \leq m+1\}$$

Gemäss Theorem 1 in GLS[15] ist stets

$$\mathbf{V}_m(V, E) = \mathbf{S}(V, E) \cup \mathbf{S}^{m+1}(V, E) \cup \dots \cup \mathbf{S}^0(V, E) \cup \mathbf{B}(V, E) \cup \mathbf{A}(V, E).$$

In unserem Fall ist  $m = 5$  und  $\sigma_6V + V^\perp = \sigma_0V + V^\perp = \sigma_0V$ . Nach [15],I.4,Lemma 4 ist dann  $\mathbf{V}(V, E) = \mathbf{S}(V, E) \cup \mathbf{S}^6(V, E) \cup \mathbf{A}(V, E)$  und  $\mathbf{S}(V, E) \cap \mathbf{S}^6(V, E) = \emptyset$ . Weiter ist nach [15],I.4,Cor.3  $|\mathbf{S}^6(V, E)| = |r\sigma_0V/r\sigma_6V|$ . Man rechnet leicht nach, dass  $\mathbf{A}(V, E)$  aus den vier verschiedenen Elementen  $\sigma_0V$ ,  $(r\sigma_5V)^\perp$ ,  $(r\sigma_6V)^\perp$ ,  $E$  besteht. Somit ergibt sich

$$(104) \quad \mathbf{V}(V, E) = \mathbf{S}(V, E) \cup \mathbf{S}^6(V, E) \cup (\mathbf{A}(V, E) \setminus \{\sigma_0V\}),$$

$$|\mathbf{V}(V, E)| = 15 + 14 + 3 = 32.$$

Nun definieren wir einen zweiten Unterraum  $V' \subseteq E$  durch  $V' := V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus (\oplus \kappa < \omega_3 ((a + \beta_2 b + l_\kappa) \oplus (a + \beta_2 b + l'_\kappa)))$ . Klarerweise ist  $\mathbf{V}(V', E)$  indextreu isomorph zu  $\mathbf{V}(V, E)$ ; die entsprechenden Räume in  $\mathbf{V}(V', E)$  erhält man, indem man jeden Term  $\beta_1 b$  durch  $\beta_2 b$  ersetzt.

Wir behaupten, dass es keinen linearen (geschweige denn isometrischen) Isomorphismus  $\Phi : E \rightarrow E$  gibt, der den Verbandsisomorphismus  $\mathbf{V}(V, E) \rightarrow \mathbf{V}(V', E)$  induziert. Angenommen  $\Phi$  sei ein induzierender Isomorphismus. Dann ist  $\Phi(A_2) = A'_2$ , d.h.  $\Phi a = y(a) + \alpha a \in r\sigma_5 V' \oplus \langle a \rangle$  (vgl.(102)). Ferner  $\Phi b = y(b) + \beta b \in r\sigma_5 V' \oplus \langle b \rangle$ ,  $\Phi(a+b) = y(a+b) + \gamma(a+b) = \Phi a + \Phi b = (y(a) + y(b)) + \alpha a + \beta b \in r\sigma_5 V' \oplus \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ , also  $y(a+b) = y(a) + y(b)$  und  $\beta = \gamma = \alpha$ . Schliesslich ist  $\Phi(a + \beta_1 b) = y(a + \beta_1 b) + \delta(a + \beta_2 b) = \Phi a + \beta_1 \Phi b = (y(a) + \beta_1 y(b)) + (\alpha a + \beta_1 \alpha b) \in r\sigma_5 V' \oplus \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ . Aus  $\delta(a + \beta_2 b) = \alpha(a + \beta_1 b)$  folgt  $\delta = \alpha = 0$ , was zum Widerspruch  $\Phi(A_2) \subseteq r\sigma_5 V' \neq A'_2$  führt.  $\square$

Ein quadratischer Verband  $\mathbf{V}(V, E)$  kann also schon bei kleiner endlicher Kardinalität so stark nichtdistributiv ausfallen (mit Unterverband  $M_4$ ), dass eine indextreue Verbandsisomorphie nicht einmal linear induzierbar ist.

Eine interessante, bis anhin nicht untersuchte Frage ist, ob wenigstens " $\mathbf{V}(V, E) \rightarrow \mathbf{V}(V', E)$  linear induzierbar" schon " $\mathbf{V}(V, E) \rightarrow \mathbf{V}(V', E)$  isometrisch induzierbar" impliziert. (Auf S.50 haben wir gesehen, dass aus " $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  linear induzierbar" i.a. nicht " $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  isometrisch induzierbar" folgt. Dieses  $\mathbf{V}$  war aber nicht von der Form  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(V, E)$ , d.h. nicht von einem Element erzeugt!)

2.5 Die subdirekt irreduziblen Faktoren von  $\mathbf{V}_3[a]$  und Konstruktion  
eines nichtartinschen, distributiven  $\mathbf{V}_4(a)$

Für konkrete quadratische Verbände  $\mathbf{V}(V, E)$ , welche homomorphe Bilder von  $\mathbf{V}_3[a]$  sind, definierten wir in 2.4 gewisse Indices  $a_i(\mathbf{V}(V, E))$  ( $1 \leq i \leq 54$ ). Für abstrakte quadratische Verbände  $\mathbf{V}_3(b)$  macht es keinen Sinn mehr, von Kodimensionen zu sprechen; wir setzen aber  $a_i(\mathbf{V}_3(b))$  gleich 1 bzw. 0, je nach dem, ob der zu  $a_i$  gehörige Primquotient von  $\mathbf{V}_3[a]$  im homomorphen Bild  $\mathbf{V}_3(b)$  getrennt wird oder nicht.

In Satz 40 war beispielsweise (R13) die Relation  $a_{13} = a_{13} + a_{17}\aleph_1 + a_{27}\aleph_1$ . Wir definieren (R13)' als die Relation  $a_{13} \geq a_{17}, a_{27}$ . In analoger Weise gehe (Rj)' für alle  $j \in I_0$  aus (Rj) hervor.

(105) *Sei  $\mathbf{V}_3(b)$  ein quadratischer Verband. Dann gelten  
für alle  $a_i := a_i(\mathbf{V}(b))$  die Relationen (Rj)' ( $j \in I_0$ ).*

Der Beweis von (105) ist eine triviale (aber zeitaufwendige) Anwendung der Axiome (Q1) bis (Q6). Als Beispiel verifizieren wir (R2)'  $a_4 \geq a_8$ . Für  $a_4 = 1$  ist nichts zu zeigen. Bei  $a_4 = 0$  ist  $r\sigma_3b \wedge \sigma_1(rb) = r\sigma_3b \wedge \sigma_2(rb)$  (vgl. Tab. 18). Es ist  $a_8 = 0$ , d.h.  $\sigma_2(r\sigma_3b \wedge \sigma_1(rb)) = \sigma_2(rb) \vee (\sigma_1(rb) \wedge r\sigma_3b)$  zu zeigen. Nach Voraussetzung ist die rechte Seite gleich  $\sigma_2(rb)$  und es folgt  $\sigma_2(r\sigma_3b \wedge \sigma_1(rb)) = \sigma_2(r\sigma_3b \wedge \sigma_2(rb)) \leq \sigma_2(\sigma_2(rb)) = \sigma_2(rb)$ . Um  $\geq$  einzusehen, beachte man  $rb = b \wedge b^\perp \leq \sigma_3b \wedge \sigma_3(b^\perp) \stackrel{(Q5)}{=} \sigma_3b \wedge (\sigma_3b)^\perp = r\sigma_3b$ . Daraus folgt  $rb \leq r\sigma_3b \wedge \sigma_2(rb)$  und  $\sigma_2(rb) \leq \sigma_2(r\sigma_3b \wedge \sigma_2(rb))$ .

(106) *Sei  $\mathbf{V}_3(b)$  quadratischer Verband. Setzt man  
( $\forall 1 \leq i \leq 54$ )  $\alpha_i := a_i(\mathbf{V}_3(b))$  und  $I := \{i \mid \alpha_i = 1\}$ ,  
so ist  $\mathbf{V}_3(b)$  isomorph zu  $\mathbf{V}(V^I, E^I) := \mathbf{V}(\bigoplus_I V^i, \bigoplus_I E^i)$*

Beweis von (106). Wie in 2.4 bezeichnet  $(V^i, E^i)$  das  $i$ -te Schuppli'sche Elementarbeispiel (über festem  $(k, \nu, \epsilon) \neq (k, \text{id}, -1)$ ). Wir zeigen ähnlich wie in Satz 42, dass

$(\forall 1 \leq j \leq 54) a_j(\mathbf{V}(V^j, E^j)) = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0$ , woraus die Behauptung folgt.

1. Fall:  $j \notin I$ , d.h.  $\alpha_j = 0$ . Ist  $j \in I_0$ , so verschwinden wegen (105) auch alle  $\alpha_k$  auf der rechten Seite von  $(R_j)'$  und nach (96) ist  $(\forall i \in I) a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = 0$ . Somit ist  $a_j(\mathbf{V}(V^j, E^j)) = \sum_{i \in I} a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = 0 = \alpha_j$ . Ist  $j \notin I_0$ , so folgt noch leichter  $a_j(\mathbf{V}(V^j, E^j)) = \sum_{i \in I} a_j(\mathbf{V}(V^i, E^i)) = \sum_{i \in I} \delta_{i,j} = 0 = \alpha_j$ .
2. Fall:  $j \in I$ , d.h.  $\alpha_j = 1$ . Dann ist auch  $a_j(\mathbf{V}(V^j, E^j)) \geq a_j(\mathbf{V}(V^j, E^j)) \stackrel{(96)}{=} 1$ .

**Lemma 44:** Sei  $\mathbf{V}_m(b)$  ein quadratischer Verband. Falls  $b \neq b^{\perp\perp}$ , so lässt sich  $\mathbf{V}_m(b)$  nicht "fremd" erzeugen:

$$(\forall x \in \mathbf{V}_m(b)) \quad x \neq b \implies \langle x \rangle := \mathbf{V}_m(x) \subset \mathbf{V}_m(b).$$

Beweis: Es sei  $x \neq b$ . Wir zeigen, dass  $b \notin \langle x \rangle$ .

1. Fall:  $b$  und  $b^{\perp}$  sind vergleichbar. Dann ist  $\mathbf{V}_m(b)$  von der Form  $\mathbf{V}_m(b) = \{0 \leq b \leq \sigma_m b \leq \dots \leq \sigma_1 b \leq b^{\perp\perp} \leq b^{\perp} \leq 1\}$  oder  $\mathbf{V}_m(b) = \{0 \leq b^{\perp} < b \leq \sigma_m b \leq \dots \leq \sigma_1 b \leq b^{\perp\perp} \leq 1\}$ , woraus die Behauptung sofort folgt.

Gemäss GLS[15],S.275 ist  $\mathbf{V}_m(b) = (1/b^{\perp}) \cup (b^{\perp\perp}/0)$ . Wir untersuchen die beiden Fälle  $x \in 1/b^{\perp}$  und  $x \in b^{\perp\perp}/0$  einzeln.

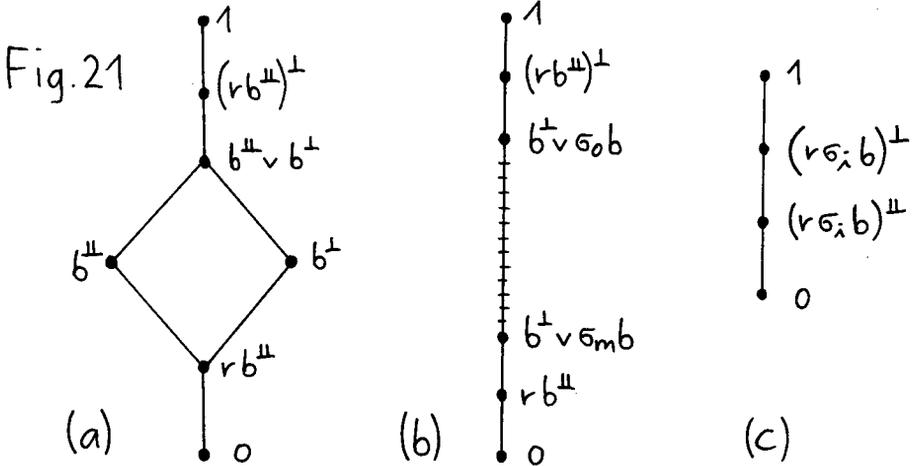
2. Fall:  $x \in (1/b^{\perp})$ . Nach GLS[15],S.272 ist  $(1/b^{\perp}) = \{b^{\perp}\} \cup \{b^{\perp} \vee \sigma_i b \mid 0 \leq i \leq m+1\} \cup \{(r\sigma_i b)^{\perp} \mid 0 \leq i \leq m+1\} \cup \{1\}$ , wobei natürlich  $\sigma_0 y := y^{\perp\perp}$  und  $\sigma_{m+1} y := y$ .  $\langle b^{\perp} \rangle$  bzw.  $\langle b^{\perp} \vee \sigma_i b \rangle$  bzw.  $\langle (r\sigma_i b)^{\perp} \rangle$  sind offenbar stets homomorphe Bilder der in Fig. 21(a) bzw. (b) bzw. (c) abgebildeten quadratischen Verbände. Da  $b$  nach Voraussetzung nicht  $\perp\perp$ -abgeschlossen ist, entnimmt man (a), (b), dass  $b \notin \langle b^{\perp} \rangle$  und  $b \notin \langle (r\sigma_i b)^{\perp} \rangle$ . Aus demselben Grund ist  $b \notin \langle 1 \rangle$ . Ist für ein  $0 \leq i \leq m+1$   $b \in \langle b^{\perp} \vee \sigma_i b \rangle$ , so ist  $b \leq b^{\perp}$  (da  $1, r b^{\perp\perp}, (r b^{\perp\perp})^{\perp}$   $\perp\perp$ -abgeschlossen sind) und wir landen im 1. Fall.

3. Fall:  $x \in (b^{\perp\perp}/0)$ . Gemäss GLS[15],I.3,I.4 ist

$$\{y^{\perp} \mid y \in \mathbf{V}_m(b)\} = \{0, b^{\perp}, b^{\perp\perp}, 1, (r\sigma_i b)^{\perp\perp}, (r\sigma_i b)^{\perp} \mid 0 \leq i \leq m+1\}.$$

Mithin ist  $\{y^{\perp} \mid y \in \mathbf{V}_m(b)\} \subseteq (1/x) \cup (b^{\perp}/0) =: U$ , weswegen  $U$  quadratischer Unterverband von  $\mathbf{V}_m(b)$  ist mit  $\langle x \rangle \subseteq U$ . Angenommen  $b \in U$ . Dann ist o.B.d.A.

$x < b$  (1. Fall), woraus  $x \in \{0, rb\}$  folgt (GLS[15],I.3). Offenbar ist  $\langle rb \rangle \subseteq (b^\perp/0) \cup (1/b^{\perp\perp})$ , aber o.B.d.A. ist  $b \notin (b^\perp/0) \cup (1/b^{\perp\perp})$  (1. Fall und  $b \neq b^{\perp\perp}$ ).  $\square$



**Korollar 45:** Für jeden quadratischen Verband  $V_m(b)$  ist

$$\text{Aut}(V_m(b)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{falls } b = b^{\perp\perp} \text{ und } b, b^\perp \text{ unvergleichbar} \\ \mathbb{Z}_1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Ist  $b = b^{\perp\perp} \neq b^\perp$  und  $b$  nicht mit  $b^\perp$  vergleichbar, so ist  $V_m(b)$  ein homomorphes Bild von Fig. 21(a), in dem höchstens die Quotienten  $1/(rb)^\perp$ ,  $(rb)^\perp/(b \vee b^\perp)$ ,  $rb/0$  zusammenfallen. Klarerweise stiftet dann  $b \mapsto b^\perp$  den einzigen nichttrivialen Automorphismus von  $V_m(b)$ .

Andernfalls ist entweder  $b$  mit  $b^\perp$  vergleichbar, was sofort  $\text{Aut}(V_m(b)) = \mathbb{Z}_1$  impliziert, oder es ist  $b \neq b^{\perp\perp}$ , woraus  $\text{Aut}(V_m(b)) = \mathbb{Z}_1$  mit Lemma 44 folgt.  $\square$

**Satz 46:** Die Schuppli'schen Elementarbeispiele  $V(V^i, E^i)$  ( $1 \leq i \leq 54$ ) sind als quadratische Verbände gerade die subdirekt irreduziblen Faktoren von  $V_3[a]$ .

**Beweis:** Alle Elementarbeispiele  $(V^i, E^i)$  seien über einem festen Tripel  $(k, \nu, \epsilon)$  definiert. Gemäss (106) ist  $V_3[a]$  ein subdirektes Produkt der quadratischen Verbände  $V(V^i, E^i)$  ( $1 \leq i \leq 54$ ). Es bleibt zu zeigen, dass die  $V(V^i, E^i)$  als quadratische Verbände subdirekt irreduzibel sind.

$V(V^{48}, E^{48})$  und  $V(V^{49}, E^{49})$  sind schon als blosse Verbände subdirekt irreduzibel (Fig. 22(ii), (iii)). Wir fixieren ein  $p \in \{1, \dots, 54\} \setminus \{48, 49\}$  und eine subdirekte Darstellung

$$V(V^p, E^p) \simeq ((s_k \mid k \in K)) \subseteq \prod \{S_k \mid k \in K\}$$

mit subdirekt irreduziblen  $S_k \in \mathbb{K}_3$  (S.79). Unser Ziel ist es,  $V(V^p, E^p) \simeq S_h$  für ein  $h \in K$  zu zeigen. Nach Definition eines subdirekten Produktes ist  $(\forall k \in K) S_k = (s_k)$ , d.h. die  $S_k$  sind 1-erzeugte quadratische Verbände und somit nach (106) zu Elementarbeispielen  $V(V^j, E^j)$  isomorph. Wir können daher o.B.d.A. annehmen

$$(107) \quad V(V^p, E^p) \simeq ((W^j \mid j \in J)) \subseteq \prod \{V(V^j, E^j) \mid j \in J\}.$$

Wegen  $a_p(V(V^p, E^p)) = 1$ , existiert auch ein  $h \in J$  mit  $a_p(V(W^h, E^h)) \geq 1$ .

1. Fall:  $h \notin \{48, 49, 54\}$ . Dann ist  $W^h = V^h$ , denn für  $h = 1$  ist dies trivial (Fig. 22(i)), und für  $h \notin \{1, 48, 49, 54\}$  ist stets  $V^h \neq (V^h)^{\perp\perp}$ , wie man sich anhand der Hasse-Diagramme in Sch[25] vergewissern kann, mithin gilt  $W^h = V^h$  gemäss Lemma 44! Somit ist  $a_p(V(V^h, E^h)) = a_p(V(W^h, E^h)) \geq 1$ . Gelingt es,  $a_p(V(V^h, E^h)) = 1$  zu zeigen, so folgt mit (96) wie gewünscht  $p = h$ . Angenommen  $a_p(V(V^h, E^h)) > 1$ . Gemäss (96) muss dann  $p \in I_0$  sein und aus (Rp) folgt, dass in allen Elementarbeispielen  $a_h \leq a_p$  gilt; insbesondere ist  $a_h(V(V^p, E^p)) \leq a_p(V(V^p, E^p)) = 1$ . Aber aus  $a_h(V(V^p, E^p)) = 1$  erhalten wir den Widerspruch  $h = p$ ,  $a_p(V(V^h, E^h)) = 1$  (statt  $> 1$ ) und aus  $a_h(V(V^p, E^p)) = 0$  den Widerspruch  $(\forall j \in J) a_h(V(V^j, E^j)) = 0$ .

2. Fall:  $h = 54$  (Fig. 22(iv)). Ist  $W^{54} = V^{54}$ , so folgt  $p = 54$  wie im ersten Fall. Als Erzeugendes kommt aber auch  $W^{54} = (V^{54})^{\perp}$  in Frage! Setzen wir  $V := V^{54}$ ,  $E :=$

$E^{54}$ , so ist

$$a_{48}(\mathbf{V}(V^\perp, E)) = \dim(V^{\perp\perp}/rV^{\perp\perp}) = a_{48}(\mathbf{V}(V, E)),$$

$$a_{49}(\mathbf{V}(V^\perp, E)) = \dim(V^\perp/rV^\perp) = a_{48}(\mathbf{V}(V, E)),$$

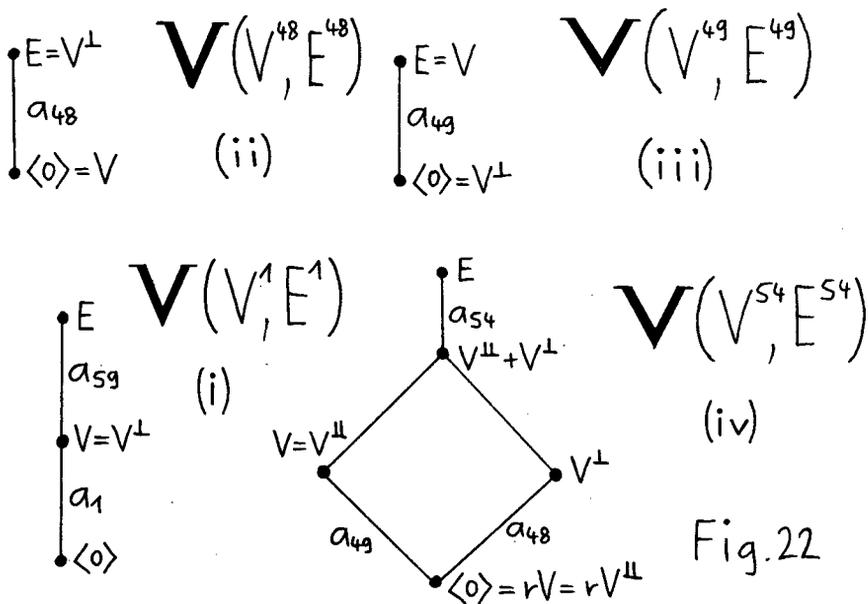
$$a_{54}(\mathbf{V}(V^\perp, E)) = \dim((r(V^\perp)^{\perp\perp})^\perp/(V^\perp)^\perp + (V^\perp)^{\perp\perp}) = \\ \dim((rV^{\perp\perp})^\perp/V^\perp + V^{\perp\perp}) = a_{54}(\mathbf{V}(V, E)),$$

$$a_j(\mathbf{V}(V^\perp, E)) = 0 \quad (\forall j \neq 48, 49, 54) \quad (\text{Routinerechnungen}).$$

Da nach Voraussetzung  $p \neq 48, 49$  ist, muss  $p = h = 54$  sein.

3. Fall:  $h = 48$  (Fig. 22(ii)). Sei o.B.d.A.  $W^{48} = V^{48\perp}$ . Es ist  $a_{49}(\mathbf{V}(V^{48\perp}, E^{48})) = a_{48}(\mathbf{V}(V^{48}, E^{48})) = 1$  und  $(\forall j \neq 49) a_j(\mathbf{V}(V^{48\perp}, E^{48})) = 0$ . Da  $p \neq 49$ , kann dieser Fall also gar nicht eintreten.

4. Fall:  $h = 49$  (Fig. 22(iii)). Sei o.B.d.A.  $W^{49} = V^{49\perp}$ . Es ist  $a_{48}(\mathbf{V}(V^{49\perp}, E^{49})) = a_{49}(\mathbf{V}(V^{49}, E^{49})) = 1$  und  $(\forall j \neq 48) a_j(\mathbf{V}(V^{49\perp}, E^{49})) = 0$ . Da  $p \neq 48$ , kann auch dieser Fall nicht auftreten.  $\square$



Wir steigen nun eine Dimension höher und beweisen den in 2.4 versprochenen

**Satz 47** (Herrmann, Wild): *Es existiert ein nichtartinscher, distributiver, quadratischer Verband  $V_4(a)$ .*

**Beweis:** Wir werden eine Struktur  $(S, \wedge, \vee, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  angeben, derart dass  $(S, \wedge, \vee)$  ein nichtartinscher, distributiver Verband ist, der (Q3), (Q4), (Q6) von S.79, sowie die folgenden Axiome aus GLS[15], I.5 erfüllt:

(Q7) *Es gibt Ketten  $R := \{r_6 \leq r_5 \leq \dots \leq r_0\}$  und  $R'' := \{r_6'' \leq r_5'' \leq \dots \leq r_0''\}$*

*mit  $(\forall 1 \leq i \leq 5) r_i \leq r_i''$  und  $r_0 = r_0''$ ,  $r_6 = r_6''$ ,*

(Q8)  $(\forall 0 \leq i, j \leq 6) r_i = r_j \implies r_i'' = r_j''$ ,

(Q9)  $(\forall 1 \leq i \leq 4)(\forall 1 \leq j \leq 6) \sigma_i r_i = r_i$  und  $\sigma_i r_j'' = r_j''$ ,

(Q10)  $S = (R \cup R'') \wedge, \vee, \sigma_i$ ,

(Q11)  $(\forall 0 \leq i, j \leq 6) (j < i \text{ und } r_j \leq r_i'') \implies r_j'' = r_i''$ .

In GLS[15] ,I.6 ist ausgeführt, wie man ein solches  $(S, \wedge, \vee, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$  ( $m < \omega_0$ ) in einen quadratischen Verband  $V_m(a)$  einbetten kann (es ist dann  $S = S(a)$  vgl. S.95). Ist  $S$  distributiv, so auch  $V_m(a)$  (Lemma 5 in I.4).

Zur Konstruktion von  $(S, \wedge, \vee, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  schicken wir folgende einfache Bemerkung voraus:

*Sei  $S$  ein Verband mit 1 und  $U_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) seien vollständige Unter-*

(108) *verbände mit  $1 \in U_1 \subseteq \dots \subseteq U_m \subseteq S$ . Dann sind die Operationen  $\sigma_j x :=$*

*$\bigwedge \{s \in U_j \mid s \geq x\}$   $\vee$ -treue Abschlussoperatoren mit  $\sigma_m \leq \sigma_{m-1} \leq \dots \leq \sigma_1$ .*

**Beweis von (108):** Dass die  $\sigma_j$  geordnete Abschlussoperatoren sind, ist trivial. Klarerweise ist  $\sigma_j x \vee \sigma_j y \leq \sigma_j(x \vee y)$ . Da  $x \vee y \leq \sigma_j x \vee \sigma_j y =: s \in S_j$ , ist auch  $\sigma_j x \vee \sigma_j y \geq \sigma_j(x \vee y)$ .

Wir starten mit der unendlichen, partiell geordneten Menge  $(P, \leq)$ , deren Hasse-Diagramm in Fig. 23 abgebildet ist. Für ein  $p \in P$  sei  $p \downarrow := \{x \in P \mid x \leq p\}$  das von  $p$  erzeugte Hauptideal. Nun sei  $S := \{\{p \downarrow \mid p \in P\}\} \subseteq \text{Pot}(P)$  der von allen Hauptidealen erzeugte Unterverband in der Potenzmenge von  $P$ . Damit ist  $(S, \cap, \cup)$  jedenfalls distributiv und besitzt die unendlich absteigende Kette  $u_1 \downarrow \supset u_2 \downarrow \supset \dots$ . (Man beachte, dass für in  $P$  existierende Infima  $p \wedge q$  bzw. Suprema  $p \vee q$  zwar stets  $p \downarrow \cap q \downarrow = (p \wedge q) \downarrow$  gilt, aber  $p \downarrow \cup q \downarrow \subsetneq (p \vee q) \downarrow$  ist.)

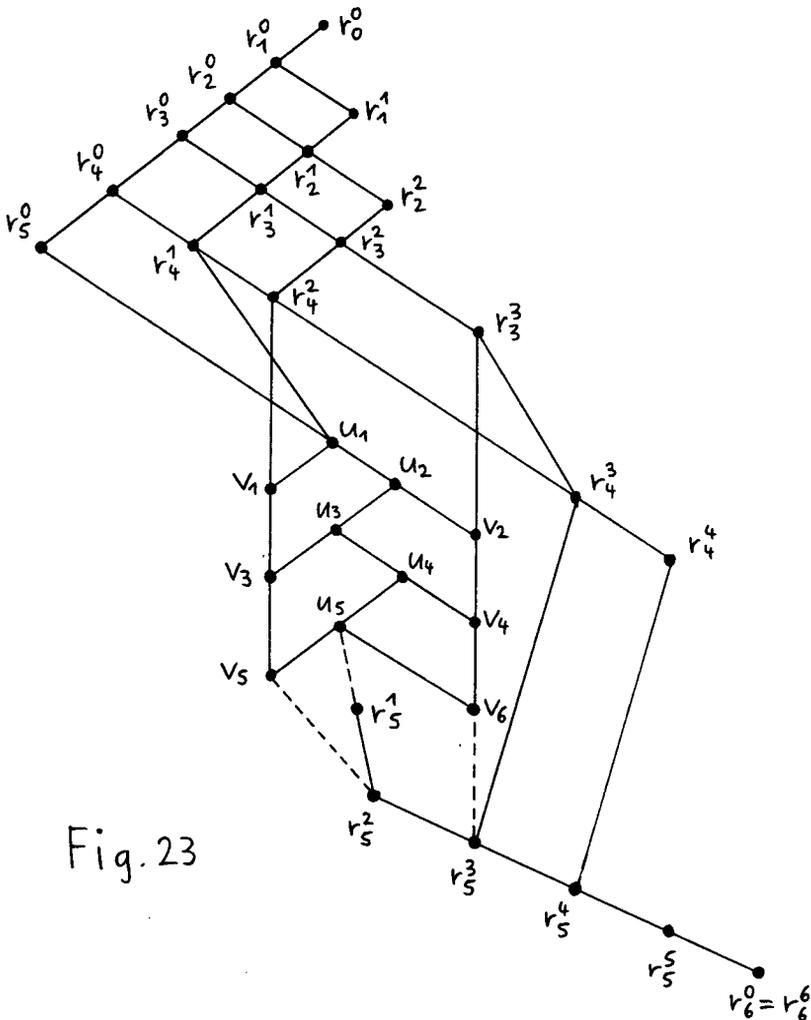


Fig. 23

Wir wollen nun Abschlussoperatoren  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  und Ketten  $R, R'' \subseteq S$  definieren, derart dass die Axiome (Q3), (Q4), (Q6) und (Q7) bis (Q11) erfüllt sind. Setzt man

$$U_1 := \{\{r_i^0 \downarrow \mid 0 \leq i \leq 6\} \cup \{r_i^1 \downarrow \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_i \downarrow \mid i \geq 1\}\},$$

$$U_j := \{U_{j-1} \cup \{r_i^j \downarrow \mid j \leq i \leq 5\}\} \quad (j = 2, 3, 4),$$

so ist  $1 = r_0^0 \downarrow \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq U_4$  und man sieht leicht, dass die  $U_j$  auch vollständig sind. Nach (108) erhält man mit  $\sigma_j x := \bigwedge \{s \in U_j \mid s \geq x\}$  (Q3), (Q4), (Q5) erfüllende Abschlussoperatoren.

Als nächstes definieren wir die Ketten  $R = \{r_i \mid 0 \leq i \leq 6\}$  und  $R'' = \{r_i'' \mid 0 \leq i \leq 6\}$  durch  $r_i := r_i^1 \downarrow$  bzw.  $r_i'' := r_i^0 \downarrow$ . Es bleiben die Axiome (Q7) bis (Q11) nachzuweisen.

Die Gültigkeit von (Q7), (Q8), (Q11) entnimmt man leicht Fig. 23.

Zu (Q9). Da  $(\forall 1 \leq i \leq 4) r_i \in U_i$ , haben wir  $\sigma_i r_i = r_i$ . Ebenso ist  $(\forall 1 \leq i \leq 4) (\forall 0 \leq j \leq 6) \sigma_i r_j'' = r_j''$ .

Zu (Q10). Da  $S$  das  $\wedge, \vee$ -Erzeugnis von  $\{p \downarrow \mid p \in P\} \subseteq S$  ist, genügt es,  $\langle R \cup R'' \rangle \supseteq \{p \downarrow \mid p \in P\}$  zu zeigen. Wir zeigen zunächst, dass  $\langle R \cup R'' \rangle \supseteq \{r_i^j \downarrow \mid 2 \leq i \leq 5, 1 \leq j < i\}$ . Klarerweise ist  $r_5^4 \downarrow = \sigma_4 r_5$ , da  $r_5^4 \downarrow$  das kleinste Element von  $U_4$  oberhalb  $r_5$  ist. Analog ist  $r_5^3 \downarrow = \sigma_3 r_5$ ,  $r_5^2 \downarrow = \sigma_2 r_5$ ,  $r_5^1 \downarrow = \sigma_1 r_5$ . Mit etwas mehr Aufwand liesse sich durch Bestimmung des kleinsten Elementes von  $U_j$  oberhalb  $r_i$  allgemein  $(\forall 2 \leq i \leq 5)(\forall 1 \leq j < i) r_i^j \downarrow = \sigma_j r_i$  zeigen. Für  $2 \leq i \leq 4, 1 \leq j < i, (i, j) \neq (4, 3)$  folgt aber  $r_i^j \downarrow \in \langle R \cup R'' \rangle$  schon aus  $r_i^j \downarrow = r_i'' \cap r_j$  und  $r_4^3 \downarrow$  ist gleich  $r_4^2 \downarrow \cap r_3$  (siehe Fig. 23). Nun folgt weiter  $v_1 \downarrow = r_5'' \cap r_4^2 \downarrow$ ,  $u_1 \downarrow = \sigma_1(v_1 \downarrow)$  (klar),  $v_2 \downarrow = u_1 \downarrow \cap r_3$ ,  $u_2 \downarrow = \sigma_1(v_2 \downarrow)$ ,  $v_3 \downarrow = u_2 \downarrow \cap r_4^2 \downarrow$ , etc.. Damit ist der Satz bewiesen.

(Die "Entdeckung", dass  $u_0 := (ra)^{\perp\perp}$ ,  $u_{2i-1} := \sigma_1(u_{2i-2} \wedge \sigma_2(r\sigma_4 a))$ ,  $u_{2i} := \sigma_1(u_{2i-1} \wedge r\sigma_3 a)$  ( $i \geq 1$ ) im freien quadratischen Verband  $V_4[a]$  wohl eine streng monoton fallende Folge definiert, stammt vom Autor; Chr. Herrmann half mir bei der expliziten Konstruktion eines distributiven  $V_4(a)$  "um  $\{u_i \mid i \geq 0\}$  herum".)  $\square$

## Literatur

- [1] Aigner M. – Kombinatorik II – Matroid- und Transversaltheorie; Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1976.
- [2] Avann S.P. – Applications of the join irreducible excess function to semimodular lattices; Math. Annalen 142, 1960/61: 345–354.
- [3] Báni W. – Linear topologies and sesquilinear spaces; Comm. Algebra 5, 1977: 1561–1587.
- [4] Birkhoff G. – Lattice Theory; American Math. Soc. Publ., third edition, 1979.
- [5] Day A., Herrmann C., Wille R. – On modular lattices with four generators; Algebra Universalis 2, 1972: 317–323.
- [6] Dilworth R., Crawley P. – Algebraic Theory of lattices; Prentice Hall inc., Englewood Cliffs N.J., 1973.
- [7] Gelfand I., Ponomarev V. – Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space; Colloquia Mathematica Societas János Bolyai, Vol.5, Hilbert space operators, Tihany 1970: 163–273.
- [8] Gelfand I., Ponomarev V. – Lattices, representations, and algebras connected with them I – Russian Math. Surveys 31, 1976: 67–85.
- [9] Grätzer G. – General lattice theory; Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1978.
- [10] Gross H. – Quadratic forms in infinite dimensional vector spaces; Progress in math., Vol.1, Birkhäuser, Boston, 1979.
- [11] Gross H. – The lattice method in the theory of quadratic spaces of non-denumerable dimension; Journal for Algebra 75, 1982: 23–42.
- [12] Gross H. – Der euklidische Defekt bei quadratischen Räumen; Math. Annalen 180, 1969: 95–137.
- [13] Gross H., Keller H.A. – On the problem of classifying infinite chains in projective and orthogonal geometry; Annales Acad. Sci. Fennicae, Serie A.I.8, 1983: 67–86.

- [14] Gross H., Keller H.A. – On the non trace-valued forms; *Advances in Math.* 42, 1981: 179–195.
- [15] Gross H., Lomecky Z., Schuppli R. – Lattice problems originating in quadratic space theory; *Algebra Universalis* 20, 1985: 267–291. (Auf vorliegende Dissertation wird darin mit dem Titel "Zur Klassifikation von Unterräumen in quadratischen Räumen kleiner überabzählbarer Dimension" Bezug genommen.)
- [16] Haapasalo L. – Von Vektorraumisometrien induzierte Verbandisomorphismen zwischen nicht orthostabilen und nicht distributiven Vektorraumverbänden; *Annales Acad. Sci. Fennicae, Serie A.I. Dissertationes* 37, 1981.
- [17] Herrmann C., Wild M. – Acyclic modular lattices (in Vorbereitung, erscheint vermutlich 1988)
- [18] Jónason B., Nation B. – Representations of 2-distributive modular lattices of finite length (erscheint in *Acta Sci. Math. Szeged*).
- [19] Köthe G. – *Topologische lineare Räume I*; Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- [20] Kunen K. – *Set Theory (An introduction to independence proofs)*; North Holland Publishing Company, 1980.
- [21] Levy A. – *Basic Set Theory*; Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [22] Mitschke A., Wille R. – Freie modulare Verbände  $FM(DM_3)$ ; *Proceedings of the Lattice Theory Conference Houston 1973*: 383–396.
- [23] Poguntke W. – Zerlegung von S-Verbänden; *Math. Zeitschriften* 142, 1975: 47–65.
- [24] Schuppli R. – *Untersuchungen zu quadratischen Räumen kleiner überabzählbarer Dimension*; Inauguraldissertation Universität Zürich, 1983.
- [25] Schuppli R. – The relations among indices in  $V_3$ ; Preprint Universität Zürich, 1983.
- [26] Welsh D. – *Matroid Theory*; Academic Press London, New York, San Francisco, 1976.
- [27] Wille R. – Subdirekte Produkte vollständiger Verbände; *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd.283/284, 1976: 53–70.

## Symbol- und Schlagwortverzeichnis

C	echte Inklusion ( $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ und $A \neq B$ )	Einleitung
$\wedge$	Infimum ( $a \wedge b$ )	1
$\vee$	Supremum ( $a \vee b$ )	1
$\simeq$	isomorphe Verbände ( $L \simeq L_0$ )	1
$\sim$	isomorphe Darstellungen ( $\rho \sim \rho'$ )	1
{ }	erzeugter Untervektorraum bzw. Unterverband ( $\{x_i \mid i \in I\}$ )	4,98
$\prec$	Nachbarschaftsrelation ( $b \prec a$ )	7
/	Quotient ( $a/b := \{c \in L \mid a \geq c \geq b\}$ )	7
$\nearrow$	nach oben transponierte Quotienten ( $a/b \nearrow c/d$ )	7
$\searrow$	nach unten transponierte Quotienten ( $a/b \searrow c/d$ )	7
$\sim$	transponierte Quotienten ( $a/b \sim c/d$ )	7
$\approx$	projektive Quotienten ( $a/b \approx c/d$ )	7
$\hat{\phantom{p}}$	Vorgänger eines irreduziblen Elementes ( $\hat{p}$ )	9
-	Abschluss einer Teilmenge eines Matroids ( $\bar{A}$ )	12
(,)	Sesquilinearform $(,): E \times E \rightarrow E$	48
$\perp$	Orthogonalitätsrelation ( $x \perp y$ )	48
$\oplus$	orthogonale Zerlegung ( $\oplus\{X_i \mid i \in I\}$ )	48
$\cong$	isometrische Räume ( $V \cong V'$ )	48
·	Kofinalität einer Limeszahl ( $\dot{\lambda}$ = Kofinalität von $\lambda$ )	74
	"Länge" eines Vektors ( $\ y\ $ )	82
$A(\kappa)$	Adjungierbarkeit $\kappa$ -dimensionaler Teilräume	73
$A(X, \gamma)$	von $X$ erzeugter $\gamma$ -Raum	55

$a_i(\mathbf{V}(V))$	Indices im "konkreten" quadratischen Verband $\mathbf{V}(V) \in \mathbb{IK}_3$ .....	87
$a_i(\mathbf{V}(b))$	Indices im "abstrakten" quadratischen Verband $\mathbf{V}(b) \in \mathbb{IK}_3$ .....	97
$a_\theta$	$\theta$ -Kongruenzklasse von $a$ .....	6
(CC)	chain condition .....	56
$C(L)$	Kongruenzverband von $L$ .....	6
$D_2$	zweielementige Kette .....	11
DCC	"Descending Chain Condition" .....	35
$D(L)$	Dreiecke des Dreieckverbandes $L$ .....	17
$D(\gamma, \mathbf{V}) := \{D \in \mathbf{V} \mid D \text{ irreduzibel, kompakt, } \dim(D/\hat{D}) = \aleph_\gamma\}$	.....	52
$D^\theta(L) := \sigma_\theta(D(L_\theta))$	.....	26
$D(w, X)$	Erzeugendes von $M(w, X)$ .....	33
$\Delta$	Dreieck aus $D(L)$ .....	11
$(\Delta 1), (\Delta 2), (\Delta 3)$	Def. eines Dreieckgraphen .....	13
$(\Delta 4), (\Delta 5)$	Def. eines Dreieckverbandes .....	17
$(\Delta 5)'$	Abschwächung von $(\Delta 5)$ .....	22
$(\Delta 6)$	"quadratische" Zusatzbedingung .....	51
$\delta(b)$	Höhe von $b \in L$ .....	8
$\delta(L) := \delta(1_L)$	Höhe von $L$ .....	8
$E$	$k$ -Vektorraum .....	1
$[E, (, )]$	Sesquilinearraum .....	48
$(E, S)$	partitionierter Raum .....	54
$e$	$\mathbb{IK}^e$ ist die von $\mathbb{IK}$ erzeugte Varietät .....	11
$\mathbf{F} := \{\varphi : X \rightarrow X' \mid \varphi \text{ partitionierte Isometrie mit } (44), (44'), (45)\}$	.....	57
$FM(\Delta 5)$	unter $(\Delta 5)$ frei modular erzeugter Verband .....	10
$FM(3)$	"Dedekind-Verband" .....	10
$\mathbf{F}(PP)$	Teilmenge von $\mathbf{F}$ .....	73
$G(V, J)$	Graph mit Eckenmenge $V$ und Kantenmenge $J$ .....	13
$(J, -)$	Abschlussmenge, Matroid .....	12

$J(a) := J(L) \cap (a/0)$ .....	22
$(J, D)$ Dreieckmatroid .....	15
$(J, D) = \prod_{i=1}^e (J^i, D^i)$ Zusammenhangskomponenten von $(J, D)$ .....	15
$J^i(a) := J(a) \cap J^i$ .....	26
$J(L) := \{p \in L \mid p \text{ irreduzibel}\} \setminus \{0\}$ .....	5
$J^\theta(L) := \sigma_\theta(J(L_\theta))$ .....	9
$K(J, -)$ Kreise des Matroids $(J, -)$ .....	12
$\mathbb{K}_m$ Varietät quadratischer Verbände .....	79
$k$ Körper (nicht notwendig kommutativ) .....	1
$\ker \pi$ Kern von $\pi$ .....	6
$(k, \nu, \epsilon)$ " $\epsilon$ -hermisches Tripel" .....	82
$L = (L, \leq)$ Verband .....	1
$L(E)$ Verband der Unterräume von $E$ .....	1
$L(J, -)$ Verband der abgeschlossenen Unterräume von $(J, -)$ .....	17
$L(J, \leq)$ Verband der Ideale von $(J(L), \leq)$ .....	22
$L(J, \leq, -) := L(J, -) \cap L(J, \leq)$ .....	23
$L_\theta$ $L$ modulo die Kongruenzrelation $\theta$ .....	6
$M_3$ Verband von .....	3,18
$M_{3,3}$ Verband von .....	27
$M_{3,3,3}$ Verband von .....	18
$M_{3,3}^3$ Verband von .....	45
$M_4$ Verband von .....	3,20
$\mathbf{M}(w, X)$ Filter in $\mathbf{V}$ .....	33
$m_0$ erste schwache Mahlo-Zahl .....	51,78
$\nu : k \rightarrow k$ Antiautomorphismus .....	48
$PG_n[k] := L(k^n)$ projektive Geometrie .....	42
$(PP)$ Ping-Pong-Bedingung .....	56
$(p_0, q_1, p_1, \dots, q_t, p_t)$ $(J, D)$ -Aufzählung .....	16

$\prod\{L_i \mid i \in I\}$ direktes Produkt der Verbände $L_i$ .....	6
$\pi : L \rightarrow L_0$ Verbandshomomorphismus .....	1,6
$\pi : L \rightarrow \prod\{L_i \mid i \in I\}$ subdirekte Darstellung .....	6
$\pi_\theta : L \rightarrow L_\theta$ kanonische Projektion .....	6
$\text{Reg}(\lambda_1) := \{\lambda < \lambda_1 \mid \dot{\lambda} = \lambda\}$ .....	74
$r$ "Radikal" eines Elementes eines quadratischen Verbandes ( $rx := x \wedge x^\perp$ ) .....	81
$rg(A)$ Rang von $A \subseteq (J, -)$ .....	12
$\rho : L \rightarrow L(E)$ lineare Darstellung von $L$ .....	1
$[\rho]$ Isomorphieklasse von $\rho$ .....	21
$\rho[L, k] : L \rightarrow L(E)$ (eindeutige) treue $k$ -Darstellung des $\Delta$ -Verbands $L$ .....	21,26
$\rho_X : L \rightarrow L(X)$ von $X \subseteq E$ induzierte Darstellung .....	29
<b>S</b> Partitionierung eines Vektorraumes .....	54
$S(6, 4), S(n, 4)$ Verbände von .....	19,40
$\mathbf{S}(V, E)$ Seitenverband von $\mathbf{V}(V, E)$ .....	95
$\mathbf{S}_\gamma$ Teilmenge einer Partitionierung <b>S</b> .....	54
$sp(L) := \{\theta \in C(L) \mid \theta < 1\}$ Spektrum von $L$ .....	8,36
$\sigma : L_0 \rightarrow L$ kleinste Urbilder von $\pi : L \rightarrow L_0$ .....	8
$\sigma_\gamma$ lineare Topologie auf $[E, (, )]$ .....	49
$\sigma_\theta : L_\theta \rightarrow L$ kleinste Urbilder von $\pi_\theta : L \rightarrow L_\theta$ .....	9
$\theta \subseteq L \times L$ Kongruenzrelation auf $L$ (siehe auch $\alpha_\theta, L_\theta$ ) .....	6
$\theta_{c,d}$ $c/d$ trennende Kongruenzrelation .....	36
$\tau_\gamma := \sigma_\gamma + 1$ .....	52
$\tau_\gamma(\mathbf{V}) := \{\tau_\gamma(A) \mid A \in \mathbf{V}\}$ .....	52
$\mathfrak{u}_0$ erste schwach unerreichbare Kardinalzahl .....	77
$\mathbf{V} \subseteq L(E)$ Verband von Unterräumen .....	29
$\mathbf{V}_m(a)$ quadratischer Verband aus $\mathbf{IK}_m$ mit Erzeugendem $a$ .....	79
$\mathbf{V}_m[a]$ von $a$ frei erzeugter quadratischer Verband aus $\mathbf{IK}_m$ .....	79
$\mathbf{V}(V) = \mathbf{V}(V, E)$ "konkreter" quadratischer Verband .....	49,80

$w : J \rightarrow E$ lineare Matroiddarstellung .....	16
$w(p_i), w(q_i)$ Vektoren des Pseudosummanden $W \subseteq E$ .....	30
$X \subseteq E$ Pseudosummand einer Darstellung $\rho$ .....	29,53
$X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_1} \oplus U$ partitionierter Unterraum .....	55
$X_h := X_{\gamma_m} \oplus \dots \oplus X_{\gamma_1}$ homogener Teil eines partitionierten Unterraums $X$ ...	55
$X_\gamma$ $\gamma$ -Raum (vgl. auch S.73).....	54
abhängig .....	12
Abschlussoperator .....	12
abspaltbar (aus $L$ ) .....	43
absteigende Kettenbedingung .....	35
adjungierbar (linear) .....	32
adjungierbar (isometrisch) .....	56
adjungierbar (mengentheoretisch) .....	73
alternierend .....	50
Antiautomorphismus .....	48
artinsch .....	35
artinscher Dreieckverband .....	36
Basis .....	12
Cub .....	78
Darstellung (Matroid) .....	16
Darstellung (Partialordnung) .....	Einleitung
Darstellung (Verband) .....	1
diagonal .....	49
Dimension (einer Darstellung) .....	3
direkte Summe (von Darstellungen) .....	1
direktes Produkt (von Verbänden) .....	6

distributiv .....	11
2-distributiv .....	22
Dreieck ( $\Delta$ ) .....	14
dreieckabgeschlossen .....	14
Dreieckmatroid .....	14
Dreiecksgraph .....	13
Dreieckverband .....	17,35
$\epsilon$ -hermitisch .....	82
einfach (Matroid) .....	12
einfach (Verband) .....	6
endliche Länge .....	8
endlicher Darstellungstyp (Partialordnung) .....	Einleitung
endlicher Typ ( $\Delta$ -Verband) .....	40
entschärfen .....	70
Epimorphismus .....	1
Filtrierung .....	75
$G$ -Kreis .....	13
$\gamma$ -Raum .....	54
gut .....	21
homogen .....	54
Homomorphismus .....	1
Ideal .....	22
indextreu .....	38
Indices .....	87
Infimum .....	1
initiales Tripel .....	70
irredundant (subdirekte Darstellung) .....	6
irreduzibel (bezüglich $\vee$ ) .....	5

Isometrie.....	48
Isomorphismus (von Verbänden).....	1
isomorph (Verbandsdarstellungen $\rho, \rho'$ ).....	1
isotrop (Vektor $y \in E$ ).....	82
isotrop ( $\epsilon$ -hermisches Tripel $(k, \nu, \epsilon)$ ).....	86
$(J, D)$ -Aufzählung.....	16
$k$ -darstellbar (modularer Verband).....	21
$k$ -darstellbar (semimodularer Verband).....	24
Kern (eines Homomorphismus).....	6
kleinste Urbilder.....	8
$k$ -lineare Darstellung.....	siehe Darstellung
$k$ -Matroid.....	16
Kneser-Körper.....	86
kombinatorische Geometrie.....	12
kompakt.....	37
kongruent (Unterräume eines Sesquilinearraums).....	48
Kongruenzproblem.....	48
Kongruenzrelation (eines Verbandes).....	6
Kongruenzverband.....	6
Kreis.....	12
Länge (Verband).....	8
Länge (Vektor).....	82
lineare Topologie.....	49
Matroid.....	12
$M_3$ -Kreis.....	46
modular.....	1
Nachbar (oberer, unterer).....	7
Normalfunktion.....	74

orthogonale Partitionierung .....	57
Orthogonalraum .....	48,86
orthogonale Zerlegung .....	48
orthosymmetrisch .....	48
partitionierte Isometrie .....	57
partitionierter Isomorphismus .....	55
partitionierter Raum .....	54
partitionierter Unterraum .....	55
Partitionierung .....	54
$p_i$ -isometrisch .....	68
Polygonmatroid .....	13
prim .....	9
Primeigenschaft .....	42
Primquotient .....	7
projektiv .....	7
projektive Geometrie .....	42
Pseudosummand .....	29,53
quadratischer Verband .....	79
Quotient .....	7
Rang (eines Matroids) .....	12
regulär (Matroid) .....	16
regulär (Sesquilinearraum) .....	48
regulär (Kardinalzahl) .....	72
Schuppli'sches Elementarbeispiel .....	90
schwache Mahlo-Zahl .....	78
schwach unerreichbar .....	77
semimodular .....	16
Sesquilinearform .....	48

Sesquilinearraum .....	48
Spektrum (eines $\Delta$ -Verbandes) .....	8,36
spurwertig .....	82
stetig (Darstellung) .....	37
stetig (Normalfunktion) .....	74
subdirekte Darstellung .....	6
subdirekt irreduzibel .....	6
Supremum .....	1
totalisotrop .....	82
transponiert .....	7
treu .....	3
trivial ( $\Delta$ -Matroid) .....	14
unabhängig .....	12
Unterverband .....	1
unzerlegbar .....	2
Varietät .....	11
Verband .....	1
vollständig .....	6
Vorgänger .....	9
$\xi$ -Raum .....	73
zerlegbar .....	2
Zerlegung (einer Darstellung) .....	2
zulässig .....	49
zusammenhängend .....	14

## Lebenslauf

Am 17. Juli 1958 wurde ich, Marcel Maria Wolfgang Wild, Bürger von Jonschwil SG, in Bern geboren.

Von April 1971 bis September 1977 besuchte ich das Literargymnasium Rämibühl in Zürich, das ich mit der Matura Typus A abschloss. Noch im gleichen Jahr begann ich mein Studium der Mathematik mit Nebenfächern Informatik und Philosophie an der Universität, welches ich im Herbst 1982 mit einer Diplomarbeit in Algorithmik beendete (bei Prof. Strassen). Ich besuchte während dieser Zeit Vorlesungen bei folgenden Dozenten:

H. Ammann, K. Bongartz, H. De Groote, P. Gabriel, H. Gross, B. Jarchow, G. Karrer, H. Keller, A. Kriszten, G. Mazzola, M. Nagasawa, H. Schwarz, H. Storrer, V. Strassen, K. Strebel (Mathematik); K. Bauknecht, A. Frey, E. Mumprecht, E. Nievergelt (Informatik); P. Günter, P. Hoyningen-Huene, H. Lübbe, P. Schulthess (Philosophie).

Von April 1983 bis April 1987 war ich am Mathematischen Institut bei Herrn Prof. Gross tätig, unter dessen Leitung auch meine Dissertation entstand.

# Tab. 18

## 64 irreduzible Elemente

1 = Nullelement	9 = $\sigma_2(26 \wedge 8)$	17 = $27 \wedge 25$	25 = $v\sigma_2 a$	33 = $\sigma_1(48 \wedge 25)$	41 = $48 \wedge 43$	49 = $(v\sigma_3 a)^{\perp\perp}$	57 = $\sigma_1 a$
2 = $ra = a \wedge a^\perp$	10 = $26 \wedge 11$	18 = $28 \wedge 25$	26 = $\sigma_1 ra$	34 = $48 \wedge 37$	42 = $49 \wedge 43$	50 = $(v\sigma_2 a)^{\perp\perp}$	58 = $a^{\perp\perp}$
3 = $\sigma_3 ra$	11 = $\sigma_2(48 \wedge 8)$	19 = $48 \wedge 37 \wedge 25$	27 = $\sigma_1(48 \wedge 8)$	35 = $(48 v 25) \wedge 37$	43 = $\sigma_1(v\sigma_2 a)$	51 = $(v\sigma_1 a)^{\perp\perp}$	59 = $(ra^{\perp\perp})^\perp$
4 = $8 \wedge 5$	12 = $26 \wedge 15$	20 = $37 \wedge 25$	28 = $\sigma_1(48 \wedge 15)$	36 = $(37 v 25) \wedge 48$	44 = $48 \wedge 47$	52 = $ra^{\perp\perp} = a^{\perp\perp} \wedge a^\perp$	60 = $(v\sigma_1 a)^\perp$
5 = $\sigma_2 ra$	13 = $27 \wedge 15$	21 = $48 \wedge 25$	29 = $\sigma_1(48 \wedge 37 \wedge 25)$	37 = $\sigma_1(v\sigma_3 a)$	45 = $49 \wedge 47$	53 = $a^\perp$	61 = $(v\sigma_2 a)^\perp$
6 = $26 \wedge 8$	14 = $48 \wedge 15$	22 = $(37 v 33) \wedge 25$	30 = $37 \wedge 33$	38 = $\sigma_1(36)$	46 = $50 \wedge 47$	54 = $a$	62 = $(v\sigma_3 a)^\perp$
7 = $48 \wedge 8$	15 = $\sigma_2(v\sigma_3 a)$	23 = $(48 v 37) \wedge 25$	31 = $(33 v 25) \wedge 37$	39 = $48 \wedge 40$	47 = $v\sigma_1 a$	55 = $\sigma_3 a$	63 = $(ra)^\perp$
8 = $v\sigma_3 a$	16 = $26 \wedge 25$	24 = $49 \wedge 25$	32 = $(37 v 25) \wedge 33$	40 = $\sigma_1(49 \wedge 25)$	48 = $(ra)^{\perp\perp}$	56 = $\sigma_2 a$	64 = Einselement

## 59 Klassen projektiver Primquotienten (Angabe von Repräsentanten)

$a_1 = 2/1$	$a_9 = 10/9$	$a_{17} = 18/14 v 17$	$a_{25} = 26/16$	$a_{33} = 38/33 v 36$	$a_{41} = 46/43 v 45$	$a_{49} = 54/2$	$a_{57} = 62/61$
$a_2 = 3/2$	$a_{10} = 11/7 v 10$	$a_{18} = 19/18$	$a_{26} = 27/17 v 26$	$a_{34} = 39/38$	$a_{42} = 47/46$	$a_{50} = 55/54 v 8$	$a_{58} = 63/62$
$a_3 = 4/3$	$a_{11} = 12/10$	$a_{19} = 21/19$	$a_{27} = 28/18 v 27$	$a_{35} = 40/24 v 37 v 39$	$a_{43} = 48/44$	$a_{51} = 56/55 v 25$	$a_{59} = 64/63$
$a_4 = 6/4$	$a_{12} = 13/11 v 12$	$a_{20} = 20/15 v 19$	$a_{28} = 29/19 v 28$	$a_{36} = 41/39$	$a_{44} = 49/48 v 45$	$a_{52} = 57/56 v 47$	
$a_5 = 7/6$	$a_{13} = 14/13$	$a_{21} = 22/20 v 21$	$a_{29} = 30/29$	$a_{37} = 42/40 v 41$	$a_{45} = 50/46 v 49$	$a_{53} = 58/57 v 52$	
$a_6 = 8/7$	$a_{14} = 15/8 v 14$	$a_{22} = 23/22$	$a_{30} = 33/32$	$a_{38} = 43/25 v 42$	$a_{46} = 51/47 v 50$	$a_{54} = 59/58 v 53$	
$a_7 = 5/4$	$a_{15} = 16/12$	$a_{23} = 24/23$	$a_{31} = 34/30$	$a_{39} = 44/41$	$a_{47} = 52/51$	$a_{55} = 60/59$	
$a_8 = 9/5 v 6$	$a_{16} = 17/13 v 16$	$a_{24} = 25/24$	$a_{32} = 37/35$	$a_{40} = 45/42 v 44$	$a_{48} = 53/52$	$a_{56} = 61/60$	

