

**SENIOR PRIMêRE LEERLINGE SE BEGRIP VAN SEKERE ALGEMENE
GETALEIENSKAPPE, MET BESONDERE VERWYSING NA DIE
DISTRIBUTIEWE EIENSKAP**

CORNELIS FRANZ VERMEULEN, B.Sc., B.Ed.

Tesis ingelewer ter gedeeltelike voldoening aan die vereistes vir die graad



MAGISTER IN DIE OPVOEDKUNDE

aan die

UNIVERSITEIT VAN STELLENBSOCH

STUDIELEIER: PROF. P.G. HUMAN

Stellenbosch

November 1991

DANKBETUIGINGS

My opregte dank aan die volgende persone:

Prof. P.G. Human, my studieleier, vir sy gerespekteerde leiding en waardevolle insette.

Mevv. B. Hayes en S. le Roux van die Departement Didaktiek en die personeel van die Opvoedkunde Mediasentrum, Universiteit van Stellenbosch, vir hul spesiale moeite ten opsigte van die administratiewe reëlins en take, en die opspoor van bronne.

Die skoolhoofde, personeel en leerlinge van die skole wat by hierdie studie betrek was vir hul samewerking en uiters positiewe gesindheid.

My vrou, Rykie-Marié, en kinders, Cobus en Marí, sonder wie se onderskraging en geduld ek nie hierdie projek sou kon voltooi het nie.

VERKLARING

Ek die ondergetekende verklaar hiermee dat die werk in hierdie tesis vervat, my eie oorspronklike werk is wat nog nie vantevore in die geheel of gedeeltelik by enige ander Universiteit ter verkryging van 'n graad voorgelê is nie.

Handtekening

Datum

ABSTRACT

Number properties, amongst others the commutative, associative and distributive properties and general rearrangement principles, form the building blocks of manipulative algebra. Research and observation have shown that secondary school pupils do not sufficiently master manipulative algebra, i.e. they do not possess sufficient mastery towards the nature, meaning, functionality and logic of algebraic manipulations. They are hence not aware that algebraic manipulations are based on the number properties, on the one hand because they were not given sufficient opportunity to experience algebra as generalised arithmetic when they were introduced to algebra, and on the other hand because the number properties, about which young children possess intuitive knowledge, were never explicated for them.

This study investigates the level of awareness of several number properties present in senior primary (especially standard 3) pupils, and utilises a few activities to attempt to lead pupils towards a higher level of awareness. In addition this study attempts to determine whether pupils who follow the experimental primary mathematics curriculum (project pupils) possess a higher level of awareness than pupils who follow the traditional curriculum (non-project pupils). As part of the latter effort, two investigation methods are utilised with regards to specifically the distributive property, i.e. clinical interviews and questionnaires. This also serves as part of a wider effort to design a measuring instrument with which possible differences between the learning outcomes of project and non-project pupils can be measured.

From the results of this study, it seems to appear that the large majority of pupils are explicitly aware of the commutative properties of addition and multiplication and the general rearrangement principles, to a lesser extent with regards to a minus sign before brackets, and that there does not exist a significant difference about the level of awareness towards these properties between project and non-project pupils.

With regards to the distributive property, there appears to exist a considerable amount of difference in the level of awareness between project and non-project pupils, the first mentioned being the higher. However, the opinion is expressed that the level of awareness among project pupils is not high enough, and that project pupils must be given sufficient opportunity in (at least standards 4 and 5) to explicate this property for themselves.

Finally, a model of the levels of awareness, based on results of this study, is proposed.

OPSOMMING

Getaleienskappe, waaronder die kommutatiewe, assosiatiewe en distributiewe eienskappe en algemene herrangskikkingsbeginsels, vorm die boustene van manipulatiewe algebra. Navorsing en waarneming het aan die lig gebring dat hoërskoolleerlinge manipulatiewe algebra nie na behore beheers nie, dit wil sê hulle beskik nie oor voldoende beheersing ten opsigte van die aard, betekenis, funksionaliteit en logika van algebraïese manipulasies nie. Hulle is dus nie daarvan bewus dat algebraïese manipulasies op die getaleienskappe berus nie, enersyds omdat hulle nie tydens die kennismaking met manipulatiewe algebra genoegsaam in die geleentheid gestel is om algebra as veralgemeende rekenkunde te ervaar nie, en andersyds omdat die getaleienskappe, waaroor jong kinders intuïtiewe kennis besit, nooit vir hulle geëksplisiteer is nie.

Hierdie studie stel ondersoek in na senior primêre (hoofsaaklik standerd 3) leerlinge se vlak van bewustheid van enkele getaleienskappe, en benut enkele aktiwiteite om leerlinge na 'n hoër vlak van bewustheid daarvan te probeer lei. Hierbenewens word probeer om vas te stel of daar by leerlinge wat die eksperimentele primêre wiskunde-kurrikulum volg (projekleerlinge) 'n hoër vlak van bewustheid aanwesig is as by leerlinge wat die tradisionele kurrikulum volg (nie-projekleerlinge). As deel van laasgenoemde poging, word twee ondersoekmetodes gevolg ten opsigte van spesifiek die distributiewe eienskap, naamlik kliniese onderhoude en vraelyste. Dit dien ook as deel van 'n breër poging om 'n meetinstrument te ontwerp waarmee moontlike verskille tussen die leeruitkomste van projek- en nie-projekleerlinge gemeet kan word.

Dit wil uit die bevindinge van hierdie studie voorkom asof die oorgrote meerderheid leerlinge eksplisiet bewus is van die kommutatiewe eienskappe ten opsigte van optelling en vermenigvuldiging en die algemene herrangskikkingsbeginsels, in 'n mindere mate ten opsigte van die minusteken voor hakies, en dat daar nie 'n noemenswaardige verskil in die vlak van bewustheid oor hierdie eienskappe by projek- en nie-projekleerlinge bestaan nie.

Sover dit die distributiewe eienskap betref, lyk dit asof daar 'n redelike verskil in die vlak van bewustheid by projek- en nie-projekleerlinge is met eersgenoemde die hoogste. Tog word die mening uitgespreek dat die vlak van bewustheid by projekleerlinge nie hoog genoeg is nie, en dat hulle in minstens standerd 4 en 5 in die geleentheid gestel moet word om hierdie getaleienskap vir hulself te eksplisiteer.

Ten slotte word ook 'n model van vlakke van bewustheid, gebaseer op bevindinge van hierdie studie, aan die hand gedoen.

INHOUDSOPGAWE

		Bladsy
HOOFSTUK 1: INLEIDING		1
1.1	Doelstellings	1
1.2	Die noodsaaklikheid van hierdie navorsing	1
1.2.1	Algebra as veralgemeende rekenkunde	1
1.2.2	Vergnaud se "theorems-in-action"	2
1.2.3	Sosio-konstruktivistiese benadering tot onderrig en leer	3
1.2.4	Die Junior-Primêre Wiskunde-projek	4
1.2.5	Samevattend	6
1.3	Oorsig van resente relevante navorsingsbevindings	6
1.4	Navorsingsmetode	6
1.5	Rapportering van navorsingsbevindings	7
1.6	Gevolgtrekkings en aanbevelings	7
HOOFSTUK 2: OORSIG VAN RELEVANTE NAVORSINGS-BEVINDINGE: 'N PERSPEKTIEFSTELLING		9
2.1	Inleiding	9
2.2	Die problematiek	9
2.3	Algebra as veralgemeende rekenkunde	10
2.4	Die aard en rol van intuïsie en stellings-in-aksie in Wiskunde	15
2.5	'n Toepassing van die Van Hiele-niveauteorie	17
HOOFSTUK 3: NAVORSINGSMETODE		20
3.1	Taakgerigte kliniese onderhoudvoering	20
3.2	Houdings en besondere problematiek by hierdie studie	21
3.3	Uitgangspunte en terminologie aangewend by die insameling, analise en rapportering van data	23
3.4	Loodsprojek	25
3.5	Finale projek	26

	Bladsy	
3.5.1	Leerlingsamestelling	26
3.5.2	Kriteria vir onderhoude	27
3.5.3	Die vrae	28
3.6	Vraelys: distributiewe eienskap	32
HOOFSTUK 4: RAPPORTERING VAN NAVORSINGSBEVINDINGE		41
4.1	Inleiding	41
4.2	Die kommutatiewe eienskap vir vermenigvuldiging	41
4.3	Die distributiewe eienskap	52
4.4	Minus-teken voor hakies	69
4.5	Die kommutatiewe eienskap vir optelling	78
4.6	Algemene herrangskikkingsbeginsel: slegs optelling	84
4.7	Algemene herrangskikkingsbeginsel: optelling en aftrekking	92
4.8	Vraelys oor die distributiewe eienskap	105
HOOFSTUK 5: GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS		109
5.1	Gevolgtrekkings	109
5.2	Aanbevelings vir die wiskunde-onderrigpraktyk	109
5.3	Aanbevelings vir verdere navorsing	112
5.4	'n Model van vlakke van bewustheid	113
Bronnelys		114

HOOFSTUK 1

INLEIDING

1.1 DOELSTELLINGS

Die doelstellings van hierdie navorsing is tweërlei, naamlik om:

- 1.1.1 (a) inligting oor die aard en vlak van Senior Primêre leerlinge se kennis oor sekere getaleienskappe te bekom, en
- (b) vas te stel of 'n verskil in die vlak van bewustheid van sekere algemene getaleienskappe bestaan tussen Senior Primêre-leerlinge wat die eksperimentele kurrikulum in die primêre skool volg, en Senior Primêre-leerlinge wat die tradisionele leerplan volg;
- 1.1.2 moontlike aktiwiteite waarmee leerlinge waarskynlik tot 'n meer eksplisiete bewustheid van die betrokke getaleienskappe kan kom, te identifiseer.

1.2 DIE NOODSAAKLIKHEID VAN HIERDIE NAVORSING

Die noodsaaklikheid van hierdie navorsing het duidelik geword enersyds vanweë die waargenome gebrek aan die beheersing van die aard, betekenis, funksionaliteit en logika van manipulatiewe algebra by junior-sekundêre leerlinge (vergelyk byvoorbeeld van der Merwe 1989, van Heerden 1991), en die negatiewe effek daarvan op hul vaardigheid en potensiele genot van wiskunde, en andersyds vanweë die kulminering van verskeie resente navorsingsbevindinge en perspektiewe op leerteorie. Enkele van bovermelde word kortliks toegelig:

1.2.1 Algebra as veralgemeende rekenkunde

Of 'n mens 'n voorstaander is van die terminologie: "Vereenvoudig $3x(2x + 3)$ " of alternatief: "bepaal die produk van $3x$ en $2x + 3$ " en of die volgende meer aanvaarbaar is:

"vervang $3x(2x + 3)$ met 'n eenvoudiger (of nuttiger), ekwivalente uitdrukking" (vergelyk die polemieë in Pythagoras April 1989 en Julie 1989 tussen die redakteur en Dawie Kriel), bly dit 'n voldonge feit dat die "antwoord" of "produk" of "eenvoudiger, ekwivalente uitdrukking" verkry is deur die toepassing van die distributiewe eienskap van reële getalle. Hierdie eienskap van reële getalle is, net soos die kommutatiewe eienskappe vir optelling en vermenigvuldiging, die assosiatiewe eienskappe vir optelling en vermenigvuldiging, die herrangskikkingseienskap, ens., 'n eienskap van reële getalle.

Alle algebraïese manipulasies berus op hierdie getaleienskappe van reële getalle, en dit is die vernaamste rede waarom manipulatiewe algebra as veralgemeende rekenkunde beskou kan word. Human stel dit as volg: "Algebraic manipulation is based on exactly the same general properties of numbers than arithmetic manipulation ... this then is the true sense in which manipulative algebra is 'generalized arithmetic' ... Failure to recognize the true relationship between arithmetic and manipulative algebra may be one of the major causes of a persistent error like conjoining ..." (Human 1988:9).

Booth (1983:75) skryf hieroor as volg: "Algebra is to be regarded, at least in its elementary stage, as the representation in general form of the operations and structures of arithmetic ... Research in algebra should look beyond acquisition of algebraic skills to a consideration of the conceptual framework within which those skills might be constructed".

Die waarskuwing is dus baie duidelik. Leerlinge wat nie:

- (a) eksplisiet bewus is van die bestaan van die getaleienskappe nie, en
- (b) nie geleentheid kry om die parallel tussen algebraïese manipulasie en berekeninge in rekenkunde te trek nie, het waarskynlik 'n minder goeie kans om manipulatiewe algebra en ander aspekte van wiskunde wat daarmee verband hou, onder die knie te kry.

1.2.2 Vergnaud se "theorems-in-actions"

In navorsing wat oorsee en hier te lande onderneem is, is reeds bevind dat jong kinders intuïtief van getaleienskappe gebruik maak. Plaaslik word navorsing in hierdie verband op

'n deurlopende grondslag deur ENWOUS (Eenheid vir Navorsing oor Wiskunde-onderwys aan die Universiteit van Stellenbosch) onderneem.

Die bestaan en benutting van hierdie intuïtiewe stellings in verband met getalbegrip, is reeds deeglik gedokumenteer (vergelyk byvoorbeeld Murray 1986, 1988, 1991, Ginsburg 1977).

Hierdie intuïtiewe stellings wat leerlinge spontaan in nuwe situasies gebruik, word deur Vergnaud "theorems-in-action" ("stellings-in-aksie") genoem (Vergnaud 1981, 1982). Hy stel dit as volg: "Intuition is important. It often consists of "theorems-in-action" that students spontaneously use in dealing with new situations. These theorems-in-action often go far beyond the level teachers think their pupils have reached" (Vergnaud 1981:282).

1.2.3 Sosio-konstruktivistiese benadering tot onderrig en leer

Gedurende die laaste dekade of twee het konstruktivisme onder vooraanstaande wiskunde-didaktici en opvoedkundige sielkundiges wêreldwyd sterk veld gewen as die teorie wat die beste verklaring kan bied oor hoe leer plaasvind.

Die konstruktivistiese leerteorie kan kortliks in die volgende woorde van Kilpatrick saamgevat word:

"The constructivist view involves two principles:

1. Knowledge is actively constructed by the cognizing subject, not passively received from the environment.
2. Coming to know is an adaptive process that organizes one's experiential world; it does not discover an independent, pre-existing world outside the mind of the knower" (Kilpatrick 1987:7).

Volgens hierdie beskouing is 'n leerder dus nie 'n leë houer wat met "kennis" gevul kan word nie, of 'n blanko lei waarop die "kennis" waaroor hy moet beskik, bloot opgeskryf

kan word nie. Veeleer bou die leerder, trouens elke mens, sy eie kennisstrukture of -skemas op, gebaseer op die data wat hy uit eie ervaring ontvang.

Van fundamentele belang is die implikasie dat konsepsuele kennis nie as 'n "klaar opgemaakte pakket" van een persoon na 'n ander oorgedra kan word nie. Die direkte gevolg hiervan is dat leerlinge geleentheid moet kry waartydens hulle self konsepsuele kennisstrukture kan konstrueer. As hierdie argument na die onderrig en leer van manipulatiewe algebra deurgetrek word, is die logiese konsekwensie dat manipulatiewe algebra kwalik aan leerlinge voorgehou kan word alvorens hulle in die geleentheid gestel is om die boustene van manipulatiewe algebra, naamlik die algemene getaleienskappe, vir hulleself te konstrueer. Daar word in hierdie studie van die standpunt af uitgegaan dat dit 'n voorvereiste is alvorens leerlinge manipulatiewe algebra as veralgemeende rekenkunde kan ervaar en benut. Al te dikwels word te min aandag in die onderwyspraktyk gegee aan die krities belangrike oorgang van rekenkunde na algebra, en is die gevaar dat leerlinge twee totaal gesegregeerde skemas opbou ten opsigte van berekenings in rekenkunde en manipulasies in algebra.

Bishop beskou 'n verdere dimensie van leer, naamlik leer as 'n sosiale aktiwiteit (vergelyk byvoorbeeld Bishop 1985). Wanneer leer in 'n konstruktivistiese omgewing plaasvind, en sosiale interaksie tussen leerders onderling, en in 'n mindere mate tussen leerders en leerkrag, word gepraat van 'n sosio-konstruktivistiese leeromgewing.

1.2.4 Die Junior-Primêre Wiskunde-projek (Eksperimentele kurrikulum)

Hierdie projek is vir die eerste keer in 1989 in die standaard een-klasse van 8 skole in die Wes-Kaap geïmplementeer. Dit is 'n gesamentlike onderneming deur die Kaaplandse Onderwysdepartement en ENWOUS, en is deur ENWOUS ontwerp na 'n deeglike studie van die jongste navorsingsresultate op die gebied van die leer van Wiskunde by voorskoolse kinders en junior primêre leerlinge, die onderneming van eie navorsing op dieselfde terrein, en die erkenning en aanvaarding van die konstruktivistiese beskouing ten opsigte van leer as die mees sinvolle epistemologie.

Hierdie benadering word gekenmerk deur die afwesigheid van enige onderrig van standaardalgoritmes deur die leerkrag. Leerlinge moet teweens hul eie berekeningstrategieë, gebaseer op hul intuitiewe kennis, ontwerp en implementeer. Telke male het dit geblyk dat hierdie stellings-in-aksie wat hulle toepas, in wese dieselfde is as die algemene

getaleienskappe. Dit is nie meer vreemd om 'n junior primêre leerling te sien wat die produk van drie en twee-en-sestig spontaan as volg bepaal nie:

$$3 \times 60 = 180$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 62 = 180 + 6 = 186$$

In hierdie voorbeeld benut die leerling ondubbelsinnig die distributiewe eienskap, **SONDER** dat dit ooit so aan hom onderrig is.

Die feit dat leerlinge in die projek die geleentheid kry om hul "stellings-in-aksie" te implementeer, terwyl leerlinge wat die tradisionele Junior Primêre Wiskunde-syllabus volg nie noodwendig in die geleentheid gestel word om dit te doen nie, maar die onderrigde standaardalgoritmes (waar die getaleienskappe glad nie na vore kom nie) moet benut, het aanleiding gegee tot 'n vermoede dat die projekleerlinge oor 'n hoër vlak van bewustheid ten opsigte van getaleienskappe beskik, en wanneer hulle met manipulatiewe algebra in aanraking kom, die betekenis en logika van algebraïese manipulasies, wat suiwer op getaleienskappe berus, makliker sal begryp as die nie-projekleerlinge, en dat dit tot 'n groter mate van sukses in manipulatiewe algebra sal lei.

Human (1990:187) stel dit as volg:

"Nogtans lyk dit geregverdig om te aanvaar dat die bewustheid en begrip van rekenkundige taaktransformasies wat leerlinge in sosio-konstruktivistiese rekenonderrig reeds in die junior primêre skoolfase verwerf, indien dit behoue kan bly en mettertyd tot 'n hoër vlak van bewustheid en eksplisietheid ontwikkel kan word, 'n sterk konsepsuele basis sal voorsien vir die bemeestering van die logika en funksionaliteit van manipulasie van algebraïese uitdrukkings (deur toepassing van algemene getaleienskappe) met die oog op ekwivalente vorme wat vir bepaalde doeleindes meer gerieflik is. Hierin lê dus 'n moontlikheid om drie kardinale beheersingstekorte in die tradisionele uitkomst van algebra-onderrig, naamlik wanbegrippe ten opsigte van die aard van algebraïese manipulasie, en onbegrip van die logika en funksionaliteit daarvan ... aan te spreek" (my onderstreping).

1.2.5 Samevattend

In die lig van Wiskunde-didaktici se veranderende perspektief ten opsigte van die aard van effektiewe leer (weg van die assimilatiese, ten gunste van die konstruktivistiese beskouing) en die gepaardgaande verandering in onderrigstrategieë, is dit nie onrealisties nie om die vermoede uit te spreek dat die projekteerlinge waarskynlik oor 'n beter begrip van die algemene getaleienskappe as die nie-projekteerlinge beskik. Hierdie vermoede word in die eerste doelstelling van hierdie studie verwoord (verwys na paragraaf 1.1.1).

1.3 OORSIG VAN RESENTE RELEVANTE NAVORSINGSBEVINDINGE

Hoofstuk 2 het ten doel om hierdie studie in perspektief te plaas ten opsigte van onlangse navorsingsbevindinge en waarnemings in die praktyk van die onderrig van wiskunde.

Daar word dieper gekyk na die problematiek in die praktyk, die belangrike oorgang van rekenkunde na algebra, die aard en rol van leerlingintuïesies en "stellings-in-aksie" en bydraes van enkele internasionaal-erkende navorsers op die gebied van wiskunde-onderrig.

1.4 NAVORSINGSMETODE

In hoofstuk 3 word 'n gedetailleerde verslag aangebied oor die metode wat in hierdie navorsing gevolg is. Dit kom kortliks op die volgende neer:

1.4.1 'n Aanvanklike lys van vrae is opgestel en 'n onderhoud van ongeveer 35 minute is met elk van 10 standerd 2 en 3 leerlinge gevoer. Hiervan was 7 nie-projekteerlinge, en 3 projekteerlinge. Hierdie onderhoude is op klankkassetband opgeneem.

1.4.2 Nadat die onderhoude teruggespeel is, is van die vrae gewysig of vervang omdat geoordeel is dat hulle nie regtig toets wat ooreenkomstig die gestelde doelstellings getoets moet word nie, en is 'n finale lys van ses vrae saamgestel.

1.4.3 Daarna is onderhoude van ongeveer 30 minute elk met 40 standerd 3 leerlinge gevoer, waarvan 22 nie-projekleerlinge en 18 projekleerlinge. Dieselfde ses vrae is aan feitlik elke leerling gestel, en die navorser het verdere subvrae gestel op grond van die response van die leerlinge. Die doel van die subvrae was telkens om die leerling se vlak van bewustheid van die getaleienskap onder bespreking te probeer bepaal. Waar 'n leerling oënskynlik onbewus was van die bestaan van 'n betrokke getaleienskap, of nie die vraag met die betrokke getaleienskap in verband kon bring nie, het die onderhoudvoerder die leerling met vrae gelei om tot die nodige ontdekking te kom, en om die getaleienskap vir homself te eksplisiteer. Ook hierdie onderhoude is op klankkassetband vasgelê.

1.4.4 Sowat tien weke later is kort vraelyste by vier van die deelnemende skole deur leerlinge voltooi. Hierdie vraelyste het net betrekking op een getaleienskap, naamlik die distributiewe eienskap (van vermenigvuldiging oor optelling). Die rede hiervoor was om op 'n ander manier as deur onderhoudvoering, sowel as deur vrae wat op 'n ander manier as in die onderhoude geformuleer is, vas te stel of daar wel by leerlinge 'n vlak van bewustheid van hierdie getaleienskap bestaan wat nie in die onderhoude geïdentifiseer kon word nie.

1.5 **RAPPORTERING VAN NAVORSINGSBEVINDINGE**

In hoofstuk 4 word die navorsingsbevindinge weergegee, met benutting van verskeie tabelle, en word uittreksels uit verskeie onderhoude gegee om die mees algemene en tipiese response, sowel as ander relevante response, te illustreer en toe te lig.

1.6 **GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS**

In hoofstuk 5 word enkele gevolgtrekkings gemaak. Daar word ook aanbevelings gemaak vir die praktyk van wiskunde-onderrig, sowel as aanbevelings vir verdere navorsing.

Ten slotte word 'n model van vlakke van bewustheid, gebaseer op bevindinge van hierdie studie, aan die hand gedoen.

HOOFSTUK 2

OORSIG VAN RESENTE RELEVANTE NAVORSINGSBEVINDINGE: 'N PERSPEKTIEFSTELLING

2.1 INLEIDING

Die doel van hierdie hoofstuk is 'n dieper beskouing van die rasonaal van hierdie studie as wat in 1.2 aangebied is, sowel as om hierdie studie binne 'n breë navorsingsraamwerk te probeer plaas.

Om hierdie doel te bereik, sal noodwendig gekyk word na die problematiek in die tradisionele praktyk van algebra-onderrig, die kritiese oorgang vanaf rekenkunde na algebra, die aard en rol van intuïsie en "stellings-in-aksie", en die bydraes van enkele ander navorsers en wiskunde-didaktici.

2.2 DIE PROBLEMATIEK

Waarnemings in die praktyk, sowel as bevindinge deur verskeie navorsers (bv. Bester 1989, Fray 1989, van der Merwe 1989, van Heerden 1991) dui daarop dat (onder andere) standerd 6 en 7-leerlinge manipulatiewe algebra nie na wense beheers nie, hoofsaaklik omdat hulle nie die betekenis, funksionaliteit en logika daarvan beheers nie. In die praktyk beteken dit dat leerlinge nie weet waarmee hulle besig is nie (is dit bloot die manipulasie van simbole?), dat hulle geen nut sien in waarmee hulle besig is nie, dit wil sê glad nie toepassingsmoontlikhede van (manipulatiewe) algebra beleef of besef nie, en veral nie bewus is waarvandaan die "rigiede" reëls kom waarvolgens simbole gemanipuleer moet word nie. Daar bestaan dus by baie leerlinge 'n totale afwesigheid van die WAT, WAAROM en HOE van manipulatiewe algebra.

Die logika van manipulatiewe algebra, dit wil sê waar kom die reëls vandaan waarvolgens die spel van manipulatiewe algebra gespeel moet word, oftewel die HOE van manipulatiewe algebra, is begrond in die eienskappe van reële getalle, byvoorbeeld die kommutatiewe, assosiatiewe en distributiewe eienskappe. In die tradisionele onderrig-

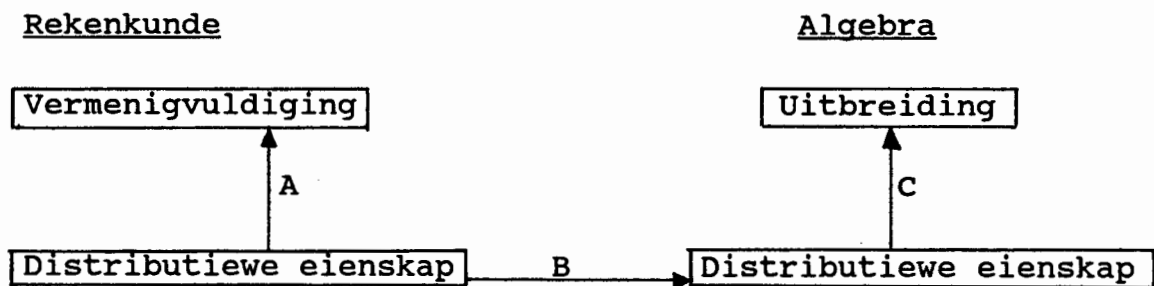
praktyk word aan laerskoolleerlinge weinig geleentheid gebied om hierdie getaleienskappe, **WAAROM HULLE INTUITIEF BESKIK**, te implementeer, te ontwikkel en na vore te bring in hulle denke. Rekenkundige berekeninge, wat in elk geval op hierdie getaleienskappe berus, is onderrig as formele prosedures of standaardalgoritmes, met weinig of geen verwysing na die onderliggende getaleienskappe wat ter sprake is.

Ook in die tradisionele onderrigpraktyk vir manipulatiewe algebra in die hoërskool word tans weinig aandag gegee aan veral die logika van manipulatiewe algebra. 'n Studie van standaard ses-handboeke sal gou aan die lig bring dat weinig skrywers pogings aanwend om algebra as veralgemeende rekenkunde te tipeer, in die sin dat die getaleienskappe wat berekeninge in rekenkunde onderlê, die reëls is wat manipulasies in algebra onderlê.

Hierdie studie sluit by bogenoemde beskrywing van die problematiek aan deurdat dit eensyds probeer vasstel wat die vlak van bewustheid van getaleienskappe by standaard drieleerlinge is, en andersyds probeer vasstel of leerlinge na 'n hoër mate van bewustheid van hierdie eienskappe gelei kan word.

2.3 ALGEBRA AS VERALGEMEENDE REKENKUNDE

As aanduiding van die strukturele verband wat tussen rekenkunde en algebra bestaan, kan die distributiewe eienskap se voorkoms en rol in rekenkunde en algebra as voorbeeld beskou word. Skematies kan dit as volg voorgestel word:



Verband A in die skematiese voorstelling verteenwoordig die benutting van die distributiewe eienskap in vermenigvuldiging. Dit onderlê die standaardalgoritme in sogenaamde langvermenigvuldiging wat in die tradisionele rekenkunde-onderrigpraktyk onderrig word, waar byvoorbeeld die produk van 62 en 3 as volg bepaal word:

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 3 \\ \hline 186 \end{array} ,$$

en waar 'n persoon tipies as volg redeneer: "2 maal 3 is 6", en die 6 neerskryf, "en 6 x 3 is 18", en die 18 links van die 6 neerskryf.

In die eksperimentele kurrikulum, waar leerlinge meer in die geleentheid gestel word om hul intuïesies te implementeer, word dieselfde probleem tipies as volg hanteer:

$$\begin{array}{l} 3 \times 60 = 180 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 180 + 6 = 186 \end{array}$$

In hierdie geval is die benutting van die distributiewe eienskap baie meer eksplisiet.

Verband C in die skematiese voorstelling verteenwoordig die benutting van die distributiewe eienskap wanneer 'n algebraïese produkuitdrukking met 'n algebraïese somuitdrukking vervang word, oftewel "uitbreiding", byvoorbeeld $3(x + y) = 3x + 3y$.

Verband B in die skematiese voorstelling kan beskou word as die veralgemening van die distributiewe eienskap, dit wil sê vanaf die benutting van hierdie eienskap om die produk van bepaalde getalle te bepaal tot by die benutting daarvan om die produk van algebraïese uitdrukkings te bepaal. Human (1988:6) maak gebruik van die begrip "transformasie". Hierdie begrip verwys na die vervangingsproses van byvoorbeeld 'n produk wat relatief moeilik is om te bereken (byvoorbeeld 9×243) met die som van relatief maklik berekenbare produkte ($9 \times 200 + 9 \times 40 + 9 \times 3$). Die doel van só 'n transformasie is om 'n ander, maar makliker probleem met dieselfde antwoord as die oorspronklike, maar moeiliker probleem te konstrueer. Sodanige transformasie word normaalweg teweeggebring deur die algemene getaleienskappe, soos die distributiewe eienskap in bogenoemde geval.

Algebraïese manipulasie, dit wil sê die konstruksie van ekwivalente uitdrukkings, stem direk met rekenkundige manipulasie ooreen, hoewel die doelstellings heelwat breër is. Algebraïese manipulasie is tewens op presies dieselfde algemene getaleienskappe as rekenkundige manipulasie gebaseer. Dit is egter belangrik om daarop te let dat manipulatiewe algebra slegs met die transformasie-gedeelte van rekenkundige prosesse ooreenstem, byvoorbeeld:

Rekenkunde

$$9 \times 243$$

↓ vertolking

$$9 \times (200 + 40 + 3)$$

↓ transformasie

$$9 \times 200 + 9 \times 40 + 9 \times 3$$

↓ intermediêre berekening

$$1800 + 360 + 27$$

↓ finale berekening

$$2187$$

Algebra

$$a \times (b + c + d)$$

↓ transformasie

$$ab + ac + ad$$

Leerlinge se beheersing van verband B (in terme van betekenis, funksionaliteit en logika) is ten nouste afhanklik van verband A. As leerlinge nie bewus is van die bestaan van verband A nie (en dit is heeltemal moontlik in die tradisionele rekenkunde-onderrigpraktyk), is dit realisties om te verwag dat daar ook by hulle beheersingstekorte ten opsigte van verband B sal bestaan.

Meer nog, as verbande A en B nie vir leerlinge eksplisiet is nie, kan daar weinig beheersing van verband C wees. Etlke navorsers (bv. van Heerden 1991, Bester 1989, Fray 1989 en van der Merwe 1989) het bevind dat daar 'n redelike mate van manipulatiewe vaardigheid ten opsigte van verband C by leerlinge bestaan, maar dat beheersing van betekenis, logika en funksionaliteit in 'n groot mate afwesig is.

'n Ander aspek wat hier van groot betekenis is, is leerlingintuïesies. Dat leerlinge oor bepaalde intuïesies ten opsigte van wiskundige manipulasies beskik, is reeds in detail gedokumenteer. Hierdie leerlingintuïesies manifesteer hulleself in die vorm van "stellings-in-aksie". 'n Leemte wat in die tradisionele onderwyspraktyk van rekenkunde-onderrig bestaan, is dat leerlingintuïesies ten opsigte van getaleienskappe nie vir leerlinge geëksplisiteer word nie, dit wil sê, dit word nie vir hulle in hul denke na vore gebring nie. Wanneer die getaleienskappe in standerd 4 of 5 formeel behandel word, integreer leerlinge nie noodwendig hierdie formele konsep met hul intuïtiewe beskouing van dieselfde begrip nie, en kan dit gebeur dat hulle aparte kognitiewe skemas van presies dieselfde eienskap bou.

Vergnaud laat hom as volg hieroor uit: "It is important to help children develop the mathematical processes that underlie the procedures they 'spontaneously' tend to use. There may be more mathematical thinking in those procedures and processes than in some formal algorithms that we teach them" (Vergnaud 1981:291).

Human skryf as volg: "Die konstruksie van rekenmetodes deur leerlinge behels dat leerlinge korrekte intuïesies ten opsigte van getaleienskappe toepas, al beskik hulle nie op daardie stadium oor die vermoë om die getaleienskappe wat hulle gebruik eksplisiet en in algemene terme te formuleer nie. Hierdeur word 'n veel sterker grondslag vir die begripmatige leer en onderrig van algebra gelê, as in daardie vorme van tradisionele rekenonderrig waarin leerlinge bloot voorskrifte ("algoritmes") wat hulle nie intuïtief of eksplisiet in terme van getaleienskappe begryp nie, moet memoriseer en slaafs moet navolg" (Human 1990:4).

In die voorafgaande paragrawe is dit gestel dat (en hoekom) verband A 'n voorvereiste is vir die beheersing van verband B (wat op sy beurt 'n voorvereiste is vir die beheersing van verband C). Daar is ook gewys op tekorte in die onderwyspraktyk ten opsigte van die lê van verband A.

Vervolgens sal ook kortliks enkele redes uitgelig word waarom verband B, volgens waarneming en navorsingsresultate, nie na behore beheers word nie.

Eerstens kan aangevoer word dat algebra nie as veralgemeende rekenkunde aan leerlinge bekend gestel word nie. Human (1988:6-10) stel dit baie reguit as hy beweer: "Algebraic manipulation is based on exactly the same general properties of numbers than arithmetic manipulation ... Algebraic manipulation, i.e. the construction of algebraic expressions which are equivalent ... correspond directly to arithmetical manipulation ..."

Leerlinge word die geleentheid ontnem om algebra as veralgemeende rekenkunde te ervaar deurdat **tweedens** algebra op 'n formalistiese wyse aan leerlinge voorgehou word. Küchemann sê die volgende hieroor: "...mathematics teaching is often seen as an initiation into rules and procedures which, though very powerful (and therefore attractive to teachers), are often seen by children as meaningless. It follows that children's methods and their levels of understanding need to be taken far more into account, however difficult it may be in practice" (Küchemann, 1981: 118).

Collis sluit hierby aan as hy beweer: "Mathematics teaching in the schools in recent years has shifted its emphasis from the development of computational skills to the understanding of the structure in the subject matter and thus the temptation to present systems formally and then ask students to make deductions within the system has increased" (Collis, 1973:129).

Derdens kan beweer word dat leerlinge nie (genoegsaam) in die geleentheid gestel word om self die oorgang van rekenkunde na algebra te beleef nie. Ginsberg stel dit as volg: "Children's abstract ideas develop from their concrete experience. This leads to an educational paradox: abstract ideas can seldom be taught directly; they need to emerge from concrete experience" (Ginsberg, 1977:56). Collis sê hieroor die volgende: "... at all stages of his life the child bases his decisions on criteria of some kind. At the stage of concrete operational thinking he is ready to base this thinking on concrete criteria and so we help him build a consistent system based on a single concrete referent. He arrives at concrete generalizations, which can be seen as precursors to the formal use of axioms and definitions, without being forced beyond his ability to operate meaningfully on the subject matter" (Collis, 1969:84).

Vierdens kan beweer word dat 'n groot persentasie leerkrigte nie 'n voldoende poging aanwend om leerlinge se kognitiewe skemas ten opsigte van rekenkundige bewerkings en die getaleienskappe wat dit ten grondslag lê, uit te bou in 'n poging om die kognitiewe skemas wat leerlinge noodwendig tydens die kennismaking met manipulatiewe algebra gaan vorm, hierby te laat aansluit nie. Hierdie situasie geld tipies waar 'n leerkrig van direkte onderrigmetodes, eerder as rekonstruktiewe metodes of begeleide ontdekking, gebruik maak. Rae, *et al.* beskryf dit as volg: "Meaningful learning takes place when the teacher relates new knowledge to existing knowledge that consists of previously learned theories, principles, concepts, etc. ... a teacher should ensure that existing cognitive structures are clear and stable, while similarities and differences between the new ideas and the established idea should be pointed out" (Rae, *et al.*, 1976:43).

Dit word weereens beklemtoon dat sodanige pogings van die leerkrig, hoe van kritiese belang dit ook al is, waarskynlik minder suksesvol sal wees as verband A nie genoegsaam beheers word nie, dit wil sê as leerlinge nie eksplisiet bewus is van die bestaan en aard van die getaleienskappe wat rekenkundige bewerkings onderlê nie.

'n Vyfde oorsaak wat waarskynlik vir die onvolledige beheersing van verband D verantwoordelik kan wees, is die mate en tipe van begrip of "verstaan" wat 'n leerkrag van sy leerlinge verwag ten opsigte van manipulatiewe algebra. Skemp se klassifikasie van "instrumental and relational understanding" word reeds algemeen aanvaar en benut. Bruner het dit nuttig gevind om tussen "intuitive" en "analytic" thinking te onderskei (Bruner, 1960). Byers en Herscovics het Skemp se klassifikasie uitgebrei deur ook "intuitive" en "formal understanding" in te sluit (Byers en Herscovics, 1977). Daar word volstaan deur te beweer dat waar leerkragte bloot instrumentele en formele "verstaan" of begrip van leerlinge verwag (en waar leerlinge ook al só gekondisioneer is dat dit al behoefte is waaroor hulle ten opsigte van begrip beskik), 'n meerdere mate van beheersing van verband B, en gevolglik ook verband C, waarskynlik nie binne die leerlinge se ervaring sal beland nie.

Skemp onderskei ook tussen "surface structures" en "deep structures". Eersgenoemde kan beskou word as die sintaks van wiskundige bewerings, terwyl laasgenoemde as die semantiek daarvan beskou kan word. In hierdie verband skryf Skemp: "Doing mathematics involves the manipulation of certain mental objects, namely mathematical concepts, using symbols as combined handles and labels. But for many children (and adults) these concepts are not there. So they can learn to manipulate empty symbols, handles with nothing attached, labels without contents" (Skemp, 1982:286).

'n Sesde rede word volledigheidshalwe hier genoem, al val dit buite die bestek van hierdie studie. Dit is naamlik die feit dat leerlinge lettersimbole nie as plekhouders vir getalle beskou nie. Booth (1981 en 1983) en Küchemann (1981) wat volledig hieroor navorsing gedoen en gedokumenteer het, het 'n hoë mate van korrelasie tussen swak prestasie in manipulatiewe algebra en waninterpretasie van lettersimbole by leerlinge gevind. Booth bevind onder andere dat foute voorkom wanneer leerlinge algebra nie as veralgemeende rekenkunde hanteer nie, maar eerder deur lettersimbole te ignoreer, deur ooreenkomstig die alfabet of andersins waardes in die simbole te stel, of die simbole as objekte beskou.

2.4 DIE AARD EN ROL VAN INTUÏSIE EN STELLINGS-IN-AKSIE IN WISKUNDE

Daar is reeds verskeie kere in hierdie studie daarop gewys dat leerlinge oor bepaalde intuïesies ten opsigte van (onder andere) getaleienskappe beskik, en dat hierdie intuïesies hulself as stellings-in-aksie manifesteer. Vergnaud (1982:36) sê hieroor die volgende: "...

they (stellings-in-aksie) are associated with a feeling of obviousness: they are at a certain stage of development taken as obvious properties of situations". Fischbein, *et al.* (1979) sluit hierby aan as hulle beweer: "The feeling of intuitive acceptance ... is produced by the convergence of two ingredients, namely, the level of confidence and the feeling of obviousness."

Volmink (1990:6) onderskei tussen primêre en sekondêre intuïsie. Volgens hom word primêre intuïsie weinig, indien enigsins, deur die omgewing of ervaring beïnvloed. Fischbein (1973) verwys na hierdie tipe intuïsie as "natural intuition". Daarenteen kan sekondêre intuïsie beskou word as intuïsie wat gebaseer is op en groei saam met ervaring. Wiskundige intuïsie kan, aldus Wilder (1967), onder sekondêre intuïsie geklassifiseer word. Volmink (*loc. cit.*) beskryf wiskundige intuïsie as volg: "Mathematical intuition, like any other secondary intuition, refers to an accumulation of attitudes and awarenesses gathered by the active, personal involvement in the subject. It is this mathematical intuition which leads us to ask the right questions, to make the educated guess, to take the 'intuitive leap'".

Fischbein (1982) beweer dat wiskundige intuïsie twee rolle vertolk, naamlik dié van afwagting ("anticipation") en dié van bevestiging ("affirmation"). Volgens hom verskaf afwagting intuïsie die globale siening van die oplossing van 'n probleem voordat enige eksplisiete, analitiese regverdiging van die oplossing beskikbaar is. Hy identifiseer vervolgens bevestigende intuïsie as "... those which express themselves in the feeling of evidence towards a certain fact." Dit lei tot die aanvaarding van die bewering sonder om oor 'n formele bewys daarvoor te beskik.

Die volgende vraag kan tereg op hierdie stadium gestel word: Gegewe die bostaande beskouings oor die aard van intuïsie, hoe kan intuïsie benut word in die onderrig-en leerproses? Anders gestel: Watter rol kan intuïsie in die onderrig-en leerproses, spesifiek van wiskunde-inhoude, vervul?

Gattegno (1971) beantwoord die vraag op 'n direkte wyse as hy beweer dat mense oor latente kragte ("powers") beskik, en dat dit die taak van die onderwyser is om leerlinge voortdurend bewus ("aware") te maak van hierdie kragte. Hy redeneer voorts dat intuïsie, sy dit sekondêr of primêr, sodanige krag is. Volmink (1990:8) voltooi feitlik die antwoord op die gestelde vraag as hy beweer: "... mathematical learning is seen as the activation of a

dominant awareness and then using that awareness to make sense out of mathematical experience. The experience may take the form of a problem, an idea or a question ... The important point to note here is the importance of the student's mathematical experience."

Dit sluit direk by die van Hiele-niveauteorie aan waar van die standpunt af uitgegaan word dat leerlinge eers op die grondniveau outentieke ervarings ten opsigte van bepaalde inhoude moet beleef om sy sluimerende potensiaal te aktiveer, voordat daar op hoër niveaus aan die strukturele aspekte van sodanige inhoude aandag gegee word.

Hier is dus twee kritiese aspekte van belang:

Eerstens moet leerlinge genoegsame geleentheid kry om hul intuïesies te ontwikkel en toe te pas op probleme.

Tweedens moet hierdie intuïesies deeglik in berekening gebring word wanneer die bepaalde konsepsuele inhoude geformaliseer en in veralgemeende terme hanteer word. Daar moet dus 'n interaksie en uiteindelik 'n integrasie wees van leerlinge se intuïtiewe en informele kennis wat hulle self gekonstrueer het en waarvan hulle 'n sterk gevoel van persoonlike eienaarskap het, en formele kennis, dit wil sê kennis wat primêr met aksiomatiese struktuur en metodiek te doen het.

Dat daar in die proses van integrering van kennis konfliktsituasies sal ontstaan, is beide onvermydelik en natuurlik. Volmink (1990:9) laat hom as volg hieroor uit: "The conflict itself is not undesirable since it should be expected that the student's own private constructions and representations will sometimes differ from those acquired through formal instruction. But it would be extremely injurious to students if they are always expected to abandon their own ideas obtained from the world of intuition and insight".

2.5 'N TOEPASSING VAN DIE VAN HIELE-NIVEAUTEORIE

Van Hiele (1991) onderskei drie niveaus of vlakke van redenering ("argumentation") (tradisioneel: vlakke van denke), naamlik:

die visuele vlak;
die beskrywende vlak; en
die teoretiese vlak

Hy onderskei verder vyf fases wat in die proses, waarvolgens 'n leerder van een niveau na 'n volgende beweeg, verloop, naamlik:

1. Inligting: Leerders word ingelig oor die aard van die aktiwiteit waarmee hulle gaan besig wees, en wat van hulle verwag word.
2. Gebonde oriëntasie: aktiwiteite wat net een moontlike uitkoms het, en wat leerlingdenke in 'n bepaalde rigting stuur.
3. Eksplisitering: die bevindinge word eksplisiet gemaak.
4. Vrye oriëntasie: aktiwiteite wat verskeie moontlike uitkomste het om leerlingdenke te verruim.
5. Integrering: al die ervarings en bevindinge word geïntegreer.

Tydens fases 2 tot 5 is bespreking, aldus van Hiele, van uiterste belang. Verder word die fases nie beskou as stappe in hierdie bepaalde volgorde nie, maar eerder wel as minder rigied-omlynde fases wat selfs herhaaldelik kan voorkom. Ook kan dit gebeur dat sekere aspekte van 'n bepaalde aktiwiteit gebonde oriëntasie verteenwoordig, terwyl ander aspekte van dieselfde aktiwiteit vrye oriëntasie kan verteenwoordig.

Om optimale leer ten opsigte van konsepsuele inhoude te realiseer, moet 'n leerder progressief deur hierdie drie vlakke vorder. Die visuele vlak (tradisioneel: grondniveau) behels ervarings wat die leerder voorberei vir die volgende, hoër vlakke. Hierdie ervarings behels geleenthede tot eksperimentering en waarneming om leerlingintuïesies te help skep, te versterk en te bevestig deur die herkenning en vergelyking van patrone (byvoorbeeld getalpatrone, gedrag van getaleienskappe, gedrag van funksies, ens.) en vorme (byvoorbeeld meetkundige figure). Net so belangrik as die persoonlike ervarings en waarnemings vir die leerder, is die rol van bespreking. Die taal is egter nog informeel: die standaard terminologie word geleidelik ingevoer en simbole en geskrewe werk word

teruggehou totdat die leerder die konsepte wat benoem en gesimboliseer moet word, gekonstrueer het (Murray 1988:201).

Toegepas op rekenkunde, beweer van Hiele dat 'n eksplisiete kennis van getaleienskappe op die beskrywende vlak lê. Uit voorafgaande is dit dus duidelik dat leerlinge nie vir die eerste keer in standerd 4 of 5 "amptelik" met hierdie eienskappe gekonfronteer moet word nie, maar dat hulle sedert hul eerste kennismaking met rekenkunde, dit wil sê reeds in sub A, geleentheid gegun moet word om hierdie getaleienskappe, waaroor hulle bewese intuïesies besit, te eksplisiteer. Met ander woorde, waar hulle vroeg in die laerskool op die visuele vlak verkeer, moet hulle geleidelik na die beskrywende vlak beweeg, en self hul kennis ten opsigte van die getaleienskappe konstrueer. Dan kan, tydens standerd 4 of 5, hierdie ervarings en bevindinge geïntegreer word (aldus van Hiele) om dan by die beskrywende vlak uit te kom. Dieselfde prosedure word gevolg in standerd 4, 5 en 6 om leerlinge self tot die teoretiese vlak te laat kom, naamlik die veralgemeende of algebraïese vorme van hierdie eienskappe. Word hierdie prosedure gevolg, word albei leemtes soos vroeër in hierdie verslag geïdentifiseer, naamlik dat leerlinge nie genoegsaam geleentheid gebied word om die getaleienskappe te eksplisiteer nie, en ook dat algebra nie as veralgemeende rekenkunde aan leerlinge voorgehou word nie, gevul.

Van Hiele (1991) benut voorts die uitdrukking: (legale) niveau-reduksie. Wanneer sy niveau-teorie op manipulatiewe algebra toegepas word, kan die veralgemeende of algebraïese vorme van die getaleienskappe, byvoorbeeld $a(b + c) = ab + ac$, op die beskrywende vlak geplaas word. Die ervarings wat leerders moes hê om vanaf die visuele vlak na die beskrywende vlak te beweeg, vind dus binne 'n rekenkunde-konteks plaas. Dus kan 'n sekere konsep binne rekenkunde op een niveau lê, terwyl dieselfde konsep binne algebra op 'n ander, laer, niveau lê. Wanneer die oorgang van rekenkunde na algebra gemaak word, vind daar dus 'n niveau-reduksie plaas.

HOOFSTUK 3

NAVORSINGSMETODE

3.1 TAAKGERIGTE KLINIESE ONDERHOUDVOERING

Navorsing op die gebied van Wiskunde-vakdidaktiek behoort oor veel meer te gaan as die blote insameling van kennis. Die dryfveer behoort te wees die strewende om 'n beter onderwyspraktyk van die vak te verwesenlik. Om dit te bereik, is 'n verskeidenheid van navorsingsmetodes moontlik.

Daar kan onder andere drie empiriese navorsingstegnieke onderskei word, naamlik onderrigeksperimente, geskrewe vraelyste en kliniese onderhoudvoering. Hoewel elke kategorie potensieel leemtes het wat die navorsingsresultate beduidend kan beïnvloed, is die huidige tendens toenemend in die rigting van onderhoudvoering met leerlinge. Die rede hiervoor is eintlik voor die hand liggend, naamlik: om die onderrigpraktyk van wiskunde te verbeter, moet dit aansluiting vind by bestaande kennis, begrippe, intuïesies en kognitiewe skemas van leerlinge, en van alle navorsingsmetodes bied persoonlike onderhoude die beste geleentheid om hierdie aspekte van leerlinge bloot te lê.

Ginsberg, et al. (1983:7) stel dit as volg:

"There is heavy emphasis on protocol methods - the talking aloud procedure and the clinical interview technique - which typically involve the gathering of a rich corpus of data, ultimately represented in written protocols. The protocols are used as the basis for inferences about underlying cognitive processes (or structures, operations, etc., depending on the terminology and concepts of the theory used) involved in intellectual activities. Although increasingly popular, protocol methods have not yet received thorough methodological analysis".

Ginsburg, et al. onderskei dus twee aspekte van protokolmetodes, naamlik die hardop praat-prosedure en die kliniese onderhoudtegniek. Aangaande die hardop praat-prosedure verklaar hulle as volg: "Aside from the initial instruction to talk aloud, the researcher seldom intervenes beyond presenting the relevant tasks" (Ginsberg, et al., 1983:8). Oor die

kliniese onderhoud-tegniek skryf hulle as volg: "The verbal clinical interview method, as originally used by Piaget, involves flexible questioning of individual children on a totally verbal level ..." (Ginsberg, et al., 1983:10). In die praktyk word egter gevind dat 'n kombinasie van hierdie twee protokolmetodes aangewend word. 'n Leerling word byvoorbeeld 'n rekentaak gegee, en hy word gevra om die taak uit te voer terwyl hy hardop verduidelik wat hy doen. Ná uitvoering van die taak vra die onderhoudvoerder indringende vrae om te probeer vasstel hoekom die leerling die taak op die betrokke manier uitgevoer het, of dalk ook hoe hy ander soortgelyke of verskillende take sou uitvoer, ens. Die onderhoudvoerder probeer dus om die leerling se denkpatrone (wat sy intuïesies, kognitiewe skemas en bestaande kennis insluit) bloot te lê. Anders gestel, 'n poging word aangewend om die model wat die leerling in die betrokke situasie aanwend, bloot te lê (verwys ook na Thompson, 1982).

3.2 HOUDINGS EN BESONDERE PROBLEMATIEK BY HIERDIE STUDIE

Een van die slaggate wat wyd voorkom in literatuur oor die onderwerp van kliniese onderhoudvoering, is die gee van wenke ("clues") deur die onderhoudvoerder aan leerlinge. Dit mag subtiel wees, soos byvoorbeeld die lig van 'n wenkbrou, of die stemtoon van die ondervraer, maar dit kan ook baie meer eksplisiet wees deurdat die onderhoudvoerder die leerling met opmerkings of vrae na 'n sekere sienswyse lei.

Uit die twee doelstellings van hierdie studie (verwys na paragraaf 1.1) is dit duidelik dat, om hierdie studie suksesvol uit te voer, daar nie bloot aan leerlinge vrae om hulle kennis te probeer peil, asook hoe hulle hul kennis benut, gevra kan word nie. Om met behulp van begeleidende aktiwiteite ook leerlinge se kennis (vir hulleself) eksplisiet te maak, sou noodwendig ook vereis dat aan hulle vrae gestel word en opmerkings gemaak word wat hulle in 'n bepaalde rigting sal stuur. 'n Grondliggende problematiek van hierdie studie was dus hoe om die kliniese onderhoude te voer, sodat kennisstrukture geëksploiteer kon word sonder om enigsins leerlinge te lei, maar terselfdertyd om waar leerlingintuïesies na die oppervlak gebring moet word, dit ook te doen deur pertinente vrae en opmerkings. Die navorser het hierdie probleem hanteer deur so ver as moontlik die twee doelstellings gedurende 'n onderhoud te skei, dit wil sê, hy het sy bes probeer om vas te stel wat 'n bepaalde leerling se vlak van bewustheid ten opsigte van 'n betrokke getaleienskap is (hopelik) sonder om enige wenke ("clues") te gee. Slegs wanneer dit volgens sy oordeel geblyk het dat die leerling nie oor die nodige vlak van bewustheid beskik het nie (verwys

na paragraaf 3.3 vir 'n volledige beskrywing hiervan), is aan hom doelbewus leiding gegee deur middel van begeleidende vrae en opmerkings. Dit kan in groot mate aan 'n Socratische gesprek gelykgestel word.

Die navorser moes ook die kompleksiteit van die rekentake waarmee leerlinge tydens die onderhoude gekonfronteer is, vanuit 'n bepaalde standpunt benader. Sy houding hieroor word as volg beskryf:

Soos reeds in hoofstuk 1 beskryf, het die navorser hierdie studie benader met die vermoede dat die projekteerlinge oor 'n hoër vlak van begrip van die getaleienskappe as die nie-projekteerlinge beskik, omdat hulle slegs deur (intuïtief) hierdie getaleienskappe aan te wend, enige rekenkundige berekeninge kan uitvoer. Daarenteen is die nie-projekteerlinge nie noodwendig die geleentheid gegun om hul intuïtiewe kennis ten opsigte van die getaleienskappe toe te pas, te eksploiteer en te internaliseer nie, maar is standaardalgoritmes aan hulle onderrig, waarin die getaleienskappe grootliks (indien nie heeltemal nie) versluier is.

Dit kan gestel word dat die projekteerlinge hierdie getaleienskappe as "stellings-in-aksie" aangewend het, dit wil sê, hulle het 'n intuïtiewe kennis hiervan gehad, en dit aangewend waar nodig - en hulle het ervaar dat ander leerlinge dieselfde of soortgelyke "metodes" aanwend om probleme op te los, en hulle was tevrede dat hulle die probleme kon oplos. Die gevaar bestaan egter dat hierdie "stellings-in-aksie" al só lank deel van hul wiskundekennis is, dat hulle dit onbewustelik aanwend, dit wil sê dat dit al heeltemal outomaties plaasvind. Daarom moes die vrae vir die onderhoude só opgestel word dat dit die projekteerlinge sou dwing om te dink, en nie bloot outomaties te reageer nie. Die rekentake moes dus kompleks genoeg wees dat dit (op hulle vlak) nie bloot roetine is nie.

Die nie-projekteerlinge moes ook in gedagte gehou word: dit sou nutteloos wees om die rekentake só kompleks te maak dat hulle nie eens sou weet wat van hulle verwag word nie, laat staan nog om 'n sinvolle respons te lewer. Hiermee wil die navorser nie te kenne gee dat hy van die standpunt uitgegaan het dat die projekteerlinge noodwendig 'n hoër vlak van begrip besit, of dat hulle rekenkundig meer vaardig as die nie-projekteerlinge is nie. Hy moes net voorsorg tref dat die navorsingspoging nie totaal nutteloos sou blyk te wees nie.

'n Middeweg is dus gevind, naamlik take wat kompleks genoeg is sodat leerlinge dit nie as roetine beleef nie, waar hulle die antwoord nie deur berekening kan bepaal nie (die waarde

van die getalle is sodanig groot gekies dat dit die leerlinge se hoofrekenkapasiteit oorskry) en waar hulle nie summier die taak in 'n konkrete konteks kan hanteer nie (die taak word bloot as 'n manipulasie van getalle gegee, dit wil sê nie as 'n woordprobleem (storiesom) nie). Aan die ander kant is die getalwaardes nie só groot gekies dat leerlinge afgeskrik word deur die groot getalle nie, en glad nie 'n sinvolle respons kan gee nie.

3.3 UITGANGSPUNTE EN TERMINOLOGIE AANGEWEND BY DIE INSAMELING, ANALISE EN RAPPORTERING VAN DATA

Soos reeds tevore vermeld, speel algemene getaleienskappe 'n fundamentele rol in manipulatiewe algebra, en is die navorser van oordeel dat leerlinge nie alleenlik 'n eksplisiete kennis van die getaleienskappe moet hê nie, maar ook in staat moet wees om hierdie getaleienskappe te veralgemeen alvorens hulle manipulatiewe algebra sal kan beheers. 'n Belangrike aspek van hierdie navorsing is dus, soos tevore gestel, om te probeer vasstel of leerlinge oor eksplisiete kennis ten opsigte van sekere getaleienskappe beskik, en ook of hulle hierdie getaleienskappe kan veralgemeen.

Maar wat word verstaan onder eksplisiete kennis van getaleienskappe, en wat word bedoel met veralgemening van getaleienskappe?

Hierdie vraag sal beantwoord word met verwysing na van die vrae wat aan leerlinge gestel is rakende die kommutatiewe eienskap vir vermenigvuldiging, en die leerlingresponse (verwys na paragraaf 4.1).

Die vraag word aan die leerling gestel: "Sal 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer?" Op 'n positiewe antwoord word verder gevra: "hoekom?" As 'n leerling 'n aanduiding gee dat hy daarvan bewus is dat die kommutatiewe beginsel hier geld (al beskik hy nie oor die term 'kommutatief' nie), word dit beskou as dat hy oor eksplisiete kennis van hierdie getaleienskap beskik. Tipiese leerlingresponse sou wees: "Die twee getalle is net omgeruil" of "dit is steeds dieselfde getalle; die volgorde van vermenigvuldiging is net anders". As hy verder 'n aanduiding sou gee dat dit ook vir enige (of alle) getalle geld, en nie net vir hierdie spesifieke twee getalle nie, word dit beskou as dat die leerling die getaleienskap kan veralgemeen. 'n Tipiese leerlingrespons hier sou wees: "Dit maak nie saak in watter volgorde jy vermenigvuldig nie", met ander woorde die leerling verwys nie net bloot na hierdie enkele geval nie. 'n Ander leerlingrespons is byvoorbeeld as die leerling bevestigend antwoord op die vraag: "Geld dit vir alle getalle?" of "Geld dit ook vir

enorme groot getalle?", dit wil sê, weer 'n verwysing na ander getalle as die wat in die oorspronklike vraag voorkom.

Leerlinge wat "ja" geantwoord het op die oorspronklike vraag, en ook die daaropvolgende "hoekom"-vraag beantwoord het, is verder ondervra om vas te stel hoekom hulle van mening is dat die kommutatiewe eienskap geld. Hoewel die doelstellings met die vraag reeds bereik is, dit wil sê die navorser het reeds vasgestel of 'n leerling oor eksplisiete kennis beskik en of hy kan veralgemeen, is tog nog vroe gevra om leerlingverklarings vir die bestaan van die eienskap te probeer uitlig.

Met die voorafgaande in aanmerking geneem, kan dit gestel word dat daar drie vlakke van leerlingresponse onderskei kan word. Die eerste vlak kan beskou word as 'n verwoordingsvlak. As die leerling dus byvoorbeeld sê dat 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer, "want die twee getalle is net omgeruil", kan hy hierdie eienskap verwoord. Dit stem dus ooreen met 'n eksplisiete kennis van hierdie getaleienskap.

Die tweede vlak: As 'n leerling die oorspronklike vraag bevestigend beantwoord het, en daar bestaan by hom die aanvaarding dat dit vir alle getalle geld, het hy die begrip veralgemeen.

Sover dit die eerste gestelde doelstelling van hierdie navorsing betref (verwys na paragraaf 1.1), is slegs die eerste twee vlakke van belang, omdat dit die primêre aanduiers is van 'n leerling se vlak van bewustheid van 'n betrokke getaleienskap. Tog het die navorser, soos reeds gemeld, soms nog dieper gedelf, en in effek ook op 'n derde vlak leerlingresponse ontlok.

Hierdie derde vlak kan beskou word as die verklaringsvlak, dit wil sê of die leerling kan verklaar hoekom die betrokke eienskap geld. In die algemeen kan enige (korrekte) wiskundige bewering op enige (of 'n verskeidenheid) van die volgende maniere verklaar word (let wel: hier word nie bedoel: bewys nie):

- deur te konkretiseer, byvoorbeeld 2×3 beteken twee groepe van 3 objekte elk, en dit is ses objekte. Soortgelyk beteken 3×2 drie groepe van twee objekte elk, en dit is ook ses objekte.

- met spesiale gevalle, byvoorbeeld die wete dat 8×3 is 24 en 3×8 is ook 24. Dit is so 'n deel van 'n persoon met drie of vier jaar ervaring van rekenkunde se alledaagse kennis, dat dit desnoods as sosiale kennis beskou kan word, en as sulks glad nie (meer) na konkrete objekte (referente) verwys nie.

- deduktiewe herleiding. Na die mening van die navorser is dit nie moontlik om deur middel van deduktiewe argumentvoering by 'n getaleienskap soos die kommutatiewe eienskap uit te kom nie.

Op hierdie verklaringsvlak het die navorser in die besonder gekyk in watter mate die leerling die eienskap kan verklaar deur van konkretisering of spesiale gevalle gebruik te maak.

By elk van die ses vrae rakende getaleienskappe wat aan leerlinge gevra is, sal verdere aanduidings gegee word ten opsigte van leerlinge se eksplisiete kennis, vermoë om te veralgemeen en vermoë om te verklaar (verwys na hoofstuk 4).

3.4 LOODSPROJEK

Gedurende die tweede kwartaal van 1991 is onderhoude met tien leerlinge gevoer. Tabel 3.4.1 toon hoe hierdie leerlingtal saamgestel was.

	Nie-projek	Projek
Standerd 2	2	0
Standerd 3	5	3
Totaal	7	3

Tabel 3.4.1

Die doelstellings van hierdie onderhoude was om:

- die navorser oefening te gee in die tegniek van onderhoudvoering;
- vrae te ontwerp, aan te pas of te vervang ten einde vrae te bekom wat sal toets dit wat ooreenkomstig doelstelling 1.1 getoets moet word;
- vas te stel hoeveel inligting per onderhoud van ongeveer 30 minute elk ingesamel kan word, dit wil sê om onnodige vrae, opmerkings, ens. uit te skakel, en om te besluit op watter getaleienskappe gekonsentreer sal word (en watter buite rekening gelaat sal word).

Bogenoemde doelstellings is bereik deur onder andere elke onderhoud op band vas te lê en later krities daarna te luister.

3.5 FINALE PROJEK

3.5.1 Leerlingsamestelling

Onderhoude is met 40 standerd drie-leerlinge uit drie projek- en twee nie-projekskole gevoer. Al vyf skole val onder die Kaaplandse Onderwysdepartement. Die leerlingsamestelling, met fiktiewe name, punte behaal uit 120 vir Wiskunde in die Junie 1991 eksamen, en die standerdgemiddelde vir die betrokke skole, word in tabel 3.5.1 aangedui.

Nie-projekskole				Projekskole					
Skool A		Skool B		Skool C		Skool D		Skool E	
Naam	120	Naam	120	Naam	120	Naam	120	Naam	120
Cobus	100	Daniël	116	André	114	Mary	86	Erna	115
Marius	70	Susan	105	Paul	115	Rozanne	113	Gert	84
Hennie	106	Hester	109	Willem	77	Christal	106	Dalene	60
Marie	102	Retha	105	Pieter	91	Terry	109	Lida	49
Rina	95	Stefan	101	Sarel	96	Joe	88	Maria	84
Johan	98	Lalie	96	Ånet	70	John	19		
Hannes	94	Ester	93			Peter	34		
Freek	66	Anna	106						
Frikkie	102	Herman	114						
Josua	92	Braam	103						
		Josef	101						
		Gesina	97						
Std. gem.	79	Std. gem	84	Std. gem	81	Std. gem	80	Std. gem	78

Tabel 3.5.1

3.5.2 Kriteria vir onderhoude

Daar is reeds heelwat gepubliseer oor die doelstellings, aard en kriteria van kliniese onderhoude. Vir sy onderhoud het die navorser kriteria opgestel en gevolg soortgelyk aan dié wat Lankford (1974:26) aan die hand doen, naamlik:

- Die onderhoude is in 'n stil vertrek gevoer, waar slegs die betrokke leerling en die onderhoudvoerder teenwoordig was, en waar hulle ongesteurd kon werk.

- Elke onderhoud het 'n maksimum van 30 minute geduur. 'n Leerling is nooit gevra om vinniger te werk of te respondeer nie - 'n kleiner terrein is eerder gedek wanneer die onderhoud lank by 'n betrokke getaleienskap, 'n aspek daarvan, of 'n ander belangrike aspek stilgestaan het.
- 'n Verbatim rekord van elke onderhoud is op klankkassetband vasgelê.
- Elke leerling het foliopapier en 'n potlood tot sy beskikking gehad en kon dit na eie goeddenke benut.
- Elke leerling is op sy gemak gestel, en verduidelik dat dit nie 'n toets is om te sien hoe goed hy wiskunde kan doen nie, maar eerder om vas te stel hoe hy dink.
- Elke leerling het elke vraag hardop gelees, waarna hy kans gegee is om die antwoord te oorweeg voor hy respondeer, waarna hy gevra is hoekom hy so sê, ensovoorts, soos beskryf in hoofstuk 4.
- Sover moontlik is die leerling nie onderbreek terwyl hy met 'n berekening besig was nie, of terwyl hy oor 'n vraag van die onderhoudvoerder reflekteer het, of besig was met die verwoording van 'n antwoord, 'n gedagte of 'n opmerking.

3.5.3 Die vrae

Tydens die beplanning van hierdie studie- en dit sluit die loodsprojek in - het die navorser besluit om ses getaleienskappe te ondersoek. Hierdie betrokke ses eienskappe is gekies omdat dit, in veralgemeende vorm, gereeld in manipulatiewe algebra voorkom, en gebrekkige kennis oor hierdie getalbegrippe dikwels tot foutiewe bewerkings in algebra aanleiding gee.

Oor elke eienskap is daar 'n vraag geformuleer, wat op 'n stywe geel kartonkaartjie van 125 mm x 75 mm geskryf is (sien afdrukke hieronder). Soos van die een getaleienskap na die volgende beweeg is, het die onderhoudvoerder die betrokke kaartjie aan die leerling

gegee. Die leerling het die vraag hardop gelees, die antwoord oorweeg en dit dan gegee, waarna die onderhoudvoerder die onderhoud verder gevoer het.

Die ses getaleienskappe waarna ondersoek ingestel is, en die vraag oor elk, verskyn hierna. Die vrae self verskyn as afdrucke vanaf die kaartjies waarop hulle aan die leerlinge gegee is. Die vrae is ook in hierdie volgorde aan leerlinge gegee. Op die keersy van elke kaartjie verskyn dieselfde vraag in Engels.

A. *Die kommutatiewe eienskap vir vermenigvuldiging:*

Sal 328×257 en
 257×328 dieselfde
antwoord lewer?

B. *Die distributiewe eienskap (x versprei oor +):*

Sal $374 \times (136 + 78)$
dieselfde antwoord gee
as $374 \times 136 + 374 \times 78$?

C. *Minus-teken voor hakies:*

Sal $523 - (128 + 395)$
en $523 - 128 - 395$
dieselfde antwoord gee ?

D. *Kommutatiewe eienskap vir optelling:*

Sal $386 + 549$ en
 $549 + 386$ dieselfde
antwoord lewer?

E. *Herrangskikkingsbeginsel: slegs optelling:*

Bepaal die waarde van:
 $37 + 88 + 23 + 12$

F. *Herrangskikkingsbeginsel: optelling en aftrekking:*

Bereken

$$80 + 9 - 50 - 3$$

3.6 KORT VRAELYS: DISTRIBUTIEWE EIENSKAP

Gedurende Oktober 1991 is aan 495 leerlinge van vier van die skole wat by hierdie studie betrek was, 'n kort vraelys oor die distributiewe eienskap gegee om te voltooi. Die leerlinge wat hierby betrokke was, is die skool se hoogste standerd waar leerlinge die eksperimentele kurrikulum volg (dit wil sê projekteerlinge), en die daaropvolgende standerd (dit wil sê nie-projekteerlinge), aldus:

Skool A:	Standerd 2 (projek) en standerd 3 (nie-projek)
Skool B:	Standerd 2 (projek) en standerd 3 (nie-projek)
Skool D:	Standerd 3 (projek) en standerd 4 (nie-projek)
Skool E:	Standerd 3 (projek) en standerd 4 (nie-projek)

Die voltooiing van hierdie vraelys is nie by die beplanning en aanvanklike uitvoer van hierdie studie in die vooruitsig gestel nie, maar is deur die volgende faktore genoodsaak:

3.6.1 Aangesien projekteerlinge die distributiewe eienskap spontaan toepas wanneer hulle twee- en meersyfergetal-vermenigvuldiging uitvoer, terwyl nie-projekteerlinge van die onderrigte standaardalgoritme ("Lang vermenigvuldiging") gebruik maak, was die vermoede met die aanvang van hierdie studie dat projekteerlinge 'n hoër vlak van bewustheid ten opsigte van spesifiek hierdie getaleienskap sou hê as nie-projekteerlinge. Soos blyk

uit tabel 4.3.1, is dit nie die geval by die leerlinge wat by hierdie studie betrokke was nie.

- 3.6.2 Dit blyk trouens uit dieselfde tabel dat van al die betrokke leerlinge slegs 9 uit 35 bevestigend op die gestelde vraag om bewustheid te toets, gereageer het.

Die moontlikheid bestaan dat die voorkoms van hakies in die vraag wat tydens die onderhoud aan leerlinge gevra is, naamlik: "sal $374 \times (136 + 78)$ dieselfde antwoord lewer as $374 \times 136 + 374 \times 78$ ", 'n versluierende effek gehad het. Aangesien hierdie studie ook 'n ondersteunende rol probeer vervul in die soeke na 'n meetinstrument wat moontlike verskille in leeruitkomst tussen projek- en nie-projekleerlinge kan meet, is voortgegaan om die vraelys saam te stel om enersyds te probeer om die onbevredigende resultate in 3.6.1 en 3.6.2 te verbeter, en andersyds om vas te stel of dit die vermeende verskil in bewustheid tussen projek- en nie-projekleerlinge beter kan aandui.

Die vraelys sien as volg daaruit:

1. Bereken $344 + 532$
2. Sal die volgende twee berekeninge verskillende antwoorde of dieselfde antwoord lewer? Gee 'n rede vir jou antwoord.

$$37 \times 876 \quad \text{en} \quad 37 \times 344 + 37 \times 532$$

3. Sal die volgende twee berekeninge verskillende antwoorde of dieselfde antwoord lewer? Gee 'n rede vir jou antwoord.

$$58 \times 356 \quad \text{en} \quad 58 \times 300 + 58 \times 50 + 58 \times 6$$

Die prosedure wat met die voltooiing van hierdie vraelys gevolg is, is die volgende:

- Die volgende vraag is mondelings aan leerlinge gestel (en herhaal waar nodig): "24 persone gaan op 'n bustoer. Elkeen betaal R37. Hoeveel geld is betaal?"
- Leerlinge moes die antwoord op die rugkant van die vraelys bereken, en hul berekening toon. Hulle mag ook nie hul antwoorde of rekenmetodes met mekaar vergelyk of bespreek het nie.
- Vervolgens moes hulle vraag 1 van die vraelys doen. Hulle is aangesê om die antwoord met mekaar te vergelyk, sodat almal dit sou korrek hê, aangesien dit as hulp by vraag 2 dien.
- Daarna is aan leerlinge verduidelik wat van hulle by vrae 2 en 3 verwag word, naamlik om te sê of die antwoorde van die twee berekeninge by elke vraag dieselfde of verskillende antwoorde sou lewer. Dit is beklemtoon dat hulle nie die antwoorde mag bereken nie. Hulle is ook daarop gewys dat hulle 'n rede vir hul antwoord moet gee, en dat hulle nie hul antwoorde of redes met mekaar mag vergelyk of bespreek nie.
- Leerlinge is nie aangejaag nie, en is genoeg tyd gegun om rustig klaar te maak.

Na voltooiing van die vraelyste, het die navorser 'n ontleding van die berekeningsmetodes op die mondeling gestelde vraag gedoen, en al die metodes gekategoriseer. Op dieselfde wyse is die antwoorde en redes by vrae 2 en 3 gekategoriseer. Vervolgens is 'n matriks saamgestel met die berekeningsmetodes as die een veranderlike, en die antwoorde en redes as die ander veranderlike.

- Elke leerling se vraelys is ontleed en voorsien van 'n kode wat ooreenstem met die sel op die matriks wat enersyds sy berekeningsmetode en andersyds sy antwoorde en redes by vrae 2 en 3 reflekteer.
- Die matriks is vir elke skool voltooi, en 'n gesamentlike matriks vir al die skole is ook saamgestel.

- Die 40 leerlinge met wie vroeër in die jaar onderhoude gevoer is, was uiteraard onder die 495 wat die vraelyste voltooi het, maar hulle is nie in die matrikse opgeneem nie. Die rede hiervoor is dat die blootstelling aan die distributiewe eienskap wat hulle gedurende die onderhoude gehad het, hul vlak van bewustheid van hierdie eienskap kon verhoog het.

Die matrikse word voorgestel in tabelle 4.8.1(a) tot 4.8.1(e)

Skool B

Tabel 4.8.1(b)

Standard 2: Projek
Standard 3: Nie-projek

Antwoorde en redes by Vraag 2 en 3	Berekeningsmetode vir Probleme: 24 mense gaan op 'n busstoer. Elke betaal R37. Hoeveel geld is betaal?															Projek		Nie-projek	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	X van groot-taal	Aan-taal	X van groot-taal	Aan-taal
A. "Dieselfde" in albei gevalle: "532 + 344 = 876" en "6 + 50 + 300 = 356" of sodanig geïmpliseer	P 8	NP 25	P 25	NP 3	P 8	NP 1	P 2	NP 2	P 30	NP 30	P 30	NP 7	P 1	NP 1	1	46	40	65%	40%
B. "Dieselfde" in albei gevalle: Niksseggende of onvertaandbare rede	1	2																	
C. "Verskillend" in albei gevalle: 37 x 876 is minder as 37 x 344 + 37 x 532. 58 x 356 is minder as 48 x 300 + 58 x 50 = 58 x 6																			
D. "Verskillend" in albei gevalle: By 37 x 876 word een keer met 37 gemaak en by 37 x 344 + 37 x 532, twee keer; ens.	1	1																	
E. "Verskillend" in albei gevalle: Moet wees 74 x 876 en 172 x 356 om die-selwde te kan wees																			
F. "Verskillend" in albei gevalle: Daar word met verskillende/ander syfers/getalle in die 2 bewerkings gemaak																			
G. "Verskillend" in albei gevalle: niksseggende of onvertaandbare rede		1																	
H. Vraag 2 en 3 se antwoorde verskil, bv. "dieselfde" by vraag 2, en "verskillend" by vraag 3	1	3																	
I. Geen rede verskaf nie (ongegag "dieselfde" of "verskillend")																			
J. Leerling meld dat 344 + 532 = 876 en 300 + 50 + 6 = 356, maar kan nie besluit of "dieselfde" of "verskillend"																			
K. Bereken antwoord, of probeer antwoord bereken																			
L. Nie beantwoord nie																			
TOTAAL	11	35		4	12	2	2			58		19	1		1	64	81		

Skool E

Tabel 4.8.1(d)

Standard 5: Projek
Standard 4: Nie-projek

Antwoorde en redes by vrae 2 en 3	Berekeningsmetode vir Probleme: 24 mense gaan op 'n busstoer. Elkeen betaal R37. Hoeveel geld is betaal?															Projek		Nie-projek			
	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	X van groot-taal	X van groot-taal			
A. "Dieselfde" in albei gevalle: "532 + 344 = 876" en "6 + 50 + 300 = 356" of sodanig geïmpliseer	17		25																		
B. "Dieselfde" in albei gevalle: Nixseggende of onverstaanbare rede	1		6																		
C. "verskillend" in albei gevalle: 37 x 876 is minder as 37 x 344 + 37 x 532. 56 x 356 is minder as 48 x 300 - 58 x 50 + 56 x 6			3																		
D. "verskillend" in albei gevalle: By 37 x 876 word een keer met 37 gemaak en by 37 x 344 + 37 x 532, twee Keer: ens.			2																		
E. "verskillend" in albei gevalle: Moet wees 34 x 876 en 37 x 356 om die-seide te kan wees	1		1																		
F. "verskillend" in albei gevalle: Daar word met verskillende/ander syfers/gealle in die 2 bewerkings gemaak			1																		
G. "verskillend" in albei gevalle: nixseggende of onverstaanbare rede																					
H. Vraag 2 en 3 se antwoorde verskil, bv. "dieselfde" by vraag 2, en "verskillend" by vraag 3	5		2																		
I. Geen rede verskat nie (ongraag "dieselfde" of "verskillend")																					
J. Leerling meld dat 344 + 532 = 876 en 300 + 50 + 6 = 356, maar kan nie besluit of "dieselfde" of "verskillend"																					
K. Bereken antwoord, of probeer antwoord bereken																					
L. Nie beantwoord nie																					
TOTAAL	24		40			6	10	2	1	1	1	1	1	1	1	31	1	1	1	88	40

1	37 x 20 = 740 37 x 4 = 148 30 x 24 = 720 7 x 24 = 168	2	20 x 30 = 600 4 x 30 = 120 20 x 7 = 140 4 x 7 = 28	3	37 + 37 + 37 ... 24 keer	4	Dieselfde as 1, maar met 'n berekeningsfout	5	Dieselfde as 2, maar met 'n berekeningsfout	6	30 x 20 = 600 7 x 4 = 28 37 x 24 = 628	7	20 x 30 = 600 4 x 30 = 120 37 x 24 = 720	8	10 x 30 = 300; 10 x 30 = 300; 4 x 30 = 120; 10 x 7 = 70; 10 x 7 = 70; 4 x 7 = 28; 4 x 7 = 28 37 x 24 = 916	9	7 x 20 = 140 4 x 30 = 120 37 x 24 = 260	10	37 x 24 148 740 888	11	24 x 37 148 140 600 888	12	Soos 10, maar verkeerd uitgevoer	13	24 + 37 of 24 - 37	14	37 + 24	15	Slegs antwoord gegee - geen berekening getoon
---	----------------------------------------------------------------	---	-------------------------------------------------------------	---	--------------------------------------	---	---------------------------------------------	---	---------------------------------------------	---	----------------------------------------------	---	------------------------------------------------	---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---	-----------------------------------------------	----	---------------------------------	----	----------------------------------------	----	----------------------------------	----	--------------------------	----	---------	----	-----------------------------------------------

HOOFSTUK 4

RAPPORTERING VAN NAVORSINGSBEVINDINGE

4.1 INLEIDING

4.1.1 Ter wille van verdere verduideliking word die volgende aspekte van hierdie navorsing hier beklemtoon:

- Die kern van die navorsingsmetode draai om individuele onderhoude. Met die uitsondering van paragraaf 4.8, waar resultate van 'n vraelys gerapporteer word, is die bevindinge alles dié van hierdie onderhoude.
- Hierdie navorsing is 'n verkennende, kwalitatiewe ondersoek. Die klem val dus op die aard van die response, en nie op die kwantiteit van die response nie.
- Daar is met slegs 40 leerlinge onderhoude gevoer. Die statistiek van die bevindinge is dus nie betroubaar op 'n kwantitatiewe basis nie. Soos in die vorige punt genoem, val die klem egter nie op die kwantiteit van die response nie, maar wel op die aard daarvan.

4.1.2 By die rapportering van die navorsingsbevindinge, word die bevindinge in tabelvorm aangebied en daarna word die tabelle met enkele protokolle toegelig.

4.2 DIE KOMMUTATIEWE EIENSKAP VIR VERMENIGVULDIGING

4.2.1 Die vraag wat oor hierdie eienskap gevra is, is

Sal 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer?

4.2.2 Die leerlingresponse op hierdie vraag word in tabel 4.2.2 weergegee

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Antwoord spontaan "ja"	19	90,5	14	82,4
Huiwer/twyfel/onseker	2	9,5	1	5,8
Antwoord "nee"	0	0	2	11,8
Totaal	21	100	17	100

Tabel 4.2.2

4.2.3 Vervolgens is aan die meeste leerlinge wat bevestigend op die oorspronklike vraag gereageer het (dit wil sê die 19 nie-projek en 14 projek-leerlinge) gevra hoekom hulle so sê. Hierdie vraag het dus ten doel gehad om leerlinge se eksplisiete kennis bloot te lê, sowel as om moontlik blyke van veralgemening by leerlinge uit te wys. Hierdie leerlingresponse word in tabel 4.2.3 saamgevat.

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Kan nie sê hoekom nie - weet net dit is so	6	33,3	7	70
Kan nie sê hoekom nie - onderwyser het so gesê	5	27,8	0	0
Demonstreer self spontaan m.b.v. makliker getalle, bv. 2x3 en 3x2 is albei 6	5	27,8	1	10
Verduidelik in terme van reghoek: aantal blokkies of area	1	5,6	1	10
Verduidelik in terme van bv. 328 groepe van 257 elk	1	5,6	1	10
Totaal	18	100	10	100

Tabel 4.2.3

Die volgende afleidings kan uit tabel 4.2.3 gemaak word:

Volgens die terminologie wat in paragraaf 3.3 ingevoer is, kan met 'n redelike mate van sekerheid gesê word dat 33,3% van die nie-projekleerlinge en 70% van die projekleerlinge wat op die oorspronklike vraag "ja" geantwoord het, oor eksplisiete kennis ten opsigte van hierdie getaleienskap beskik.

Die volgende moet egter ook in gedagte gehou word:

- Die 27,8% wat beweer 'n onderwyser het hulle dit meegedeel, het moontlik sy mededeling ervaar as bloot bevestiging van kennis waarvoor hulle reeds beskik het op daardie stadium, of die impak van die onderwyser se mededeling was moontlik sterker as die eie kennis van die leerling. Dit is dus nie moontlik om te sê of hierdie leerlinge oor eksplisiete kennis beskik of nie.
- Die leerlinge wat die "hoekom" vraag beantwoord deur dit met makliker getalle te demonstreer, is op die verklaringsvlak besig om 'n verklaring te gee deur gebruikmaking van spesiale gevalle.
- Die leerlinge in die ander twee kategorieë (in terme van reghoek, in terme van bv. 328 groepe van 257 elk) is ook op die verklaringsvlak besig om 'n verklaring te gee deur konkretisering.
- Laasgenoemde twee groepe kan beskou word as dat hulle wel oor eksplisiete kennis ten opsigte van die getaleienskap beskik, maar daar kan nie summier aanvaar word dat hulle ook kan veralgemeen nie.

Op grond van tabel 4.2.3 kan daar dus nie tot 'n gevolgtrekking gekom word dat projekleerlinge 'n beter begrip van hierdie getaleienskap besit as nie-projekleerlinge, of omgekeerd, nie.

4.2.4 Die volgende vraag is ook aan van die leerlinge gevra: "Geld dit" (bedoelende die kommutatiewe eienskap vir vermenigvuldiging) "vir alle

getalle/vir enorme groot getalle/vir die grootste getalle waaraan jy kan dink?" Leerlingresponse hierop word in tabel 4.2.4 saamgevat. Dit moet duidelik gestel word dat hierdie leerlingresponse nie verder ondersoek is nie, dit wil sê die onderhoudvoerder het nie probeer vasstel of die leerlingrespons bloot 'n raaiskoot was, en of die leerling in homself oortuig was nie.

	Nie-projek	Projek
Ja	7	8
Onseker	1	0
Nee	0	0
Totaal	8	8

Tabel 4.2.4

Tabel 4.2.4 dui oorweldigend daarop dat leerlinge aan wie gevra is of die kommutatiewe eienskap vir alle getalle/baie groot getalle geld, in staat is om hierdie eienskap te veralgemeen.

4.2.5

Soos reeds genoem, is sommige leerlinge gevra om 'n verklaring vir die kommutatiewe eienskap te gee, al val dit streng gesproke buite die terrein van hierdie navorsing. Hierdie leerlinge is geneem uit die twee kategorieë van tabel 4.2.3 wat net geweet het dit is so, of vir wie 'n onderwyser gesê het dit is so. Juis die feit dat hulle geantwoord het soos wat hulle geantwoord het, en nie soos die ander drie kategorieë van tabel 4.2.3 se leerlinge die "hoekom" vraag beantwoord het deur 'n verklaring vir die eienskap te gee nie, het die navorser sterk laat vermoed dat hulle in elk geval nie 'n verklaring kan gee vir die bestaan van hierdie eienskap nie, en daarom is die vraag aan heelwat van hulle gestel.

Bogenoemde vermoede van die navorser is bevestig: die betrokke leerlinge kan nie 'n verklaring gee deur gebruik te maak van spesiale gevalle of konkretisering nie. Derhalwe het hy self 'n spesiale geval voorgehou aan die leerling, bv. 2×3 en 3×2 . Eerstens is die leerling gevra wat die produk in elke geval is, en tweedens is hulle gevra hoe word die produk gelewer, of

alternatiewelik, wat is die betekenis van 2×3 en/of 3×2 (of bloot wat is die betekenis van vermenigvuldiging).

Ook aan die leerlinge wat op die aanvanklike vraag (sal 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer?) "nee" geantwoord het, sowel as dié wat getwyfel het aan die antwoord, is 'n spesiale geval voorgelê, en is verdere vrae gestel soos direk hierbo beskryf. In die geval van hierdie leerlinge, is hierdie egter nou beskou as binne die terrein van hierdie navorsing, aangesien dit direk by doelstelling 1.1.2 aansluit. Hierdie aktiwiteit word dus in hierdie leerlinge se geval as 'n begeleidende aktiwiteit beskou wat ten doel het om by hulle 'n eksplisiete bewustheid van hierdie getaleienskap te ontwikkel. Volgens die mening van die navorser was was dit 'n geslaagde strategie, want op grond van die spesiale geval, het leerlinge maklik ingestem dat die eienskap ook vir ander getalle sal geld.

4.2.6 Uittreksels uit onderhoude

(a) Hester ('n nie-projekleerling) antwoord spontaan "ja" op die vraag: "Sal 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer?"

O: "Kan jy vir my verduidelik hoekom dit so is?"

H: "Want ... hmm ... dit is as jy byvoorbeeld 328 maal 257 ... en as jy die twee getalle omruil sal dit nie regtig saak maak nie ... by maal, maar as dit byvoorbeeld 'n minus is, sal dit saakmaak. Dan sal die twee getalle nie dieselfde wees nie."

Hester beskik dus oor eksplisiete kennis ten opsigte van hierdie getaleienskap, maar het (nog) nie blyke gegee dat sy kan veralgemeen nie.

Die onderhoudvoerder probeer vasstel of sy 'n verklaring vir hierdie getaleienskap kan gee:

O: "... ek wil hê jy moet vir my verduidelik hoekom is dit so dat as ek maal en ek draai die getalle om, dan gee dit vir my dieselfde antwoord."

- H: "... want die ... want dit ... want dit maak nou nie saak of jy ... of wase getal ... jy mee maal nie ... o ... ggg ... ahmm ... dit sal nie ek weet nie hoekom sal dit 'n verskil maak nie, maar, die twee, as jy dit nou omruil, dan ..." (Stilte).
- O: "Jy't nou al die jare wat jy al wiskunde doen, gewoonde geraak, agtergekom ..."
- H: "... ja, ja ..."
- O: "... dat dit maak nie 'n verskil nie."
- H: "Ja!"
- O: "Maar jy het nog nooit gewonder hoekom is dit so nie?"
- H: "Nee ... ag ek het al partymaal gewonder, maar nog nooit eintlik op 'n antwoord uitgekome nie ..."
- O: "Kom ons gaan na maklike getalle toe; kom ons neem byvoorbeeld 2 en 3. 2×3 weet jy is 6, 3×2 is ook ..."
- H: "... 6 ..."
- O: "... 6. Kom ons kyk na elkeen van hulle. Hoekom is 3×2 6? Wat beteken dit as ek 3 maal met 2?"
- H: "Want 3×2 ... byvoorbeeld jy't ... hmm ... jy het nou hmmm ... 3 groepies van 2 ... en dan ... en dan as jy dit op 'n getallelyn sit, dan sal daar 3 spronge wees, maar as jy sê 2×3 , sal daar net 2 spronge wees, en tussen in is daar 3."
- O: "Daar is natuurlik 'n ander geval ook: as jy kyk na 'n eierdosie ..."
- H: "O, ja, ja, die rye!"
- O: "Dis reg ... so, jy herken dit dadelik?"
- H: "Ja."

(b) Josef (nie-projekleerling).

Opmerking: Hierdie leerling se intuïsie oor die kommutatiewe eienskap is vir hom op 'n interessante manier bevestig. Daarná is hy ook in staat om die logika daarvan te verklaar.

Die uittreksel begin waar hy bevestigend op die vraag "sal 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer?"

O: "Kan jy vir my sê hoekom dit so is?"

J: "Ja, want 328×257 gee vir jou 'n antwoord, en dan 257×328 ... daardie twee is dieselfde en daardie twee is dieselfde". (Hy wys na die 328 wat in albei gevalle voorkom, sowel as na die 257 in albei gevalle).

O: "So jy sê die getalle waarmee jy vermenigvuldig is in albei gevalle dieselfde, daarom gaan jy dieselfde antwoord kry."

J: "Ja."

O: "Hoekom is jy so seker?"

J: "Ek het dit in 'n toets gekry, toe sê ek ja, en toe was dit reg."

O: "Dink jy dit sal so wees vir alle getalle, selfs vir enorme groot getalle ook?"

J: "Ja, as dit vermenigvuldiging is."

Hy beskik dus oor eksplisiete kennis, en is in staat om te veralgemeen.

O: "Kan jy verklaar hoekom dit so is?"

J: "Want ... die syfers waarmee jy vermenigvuldig is almal dieselfde, en as jy 100×100 sê nou maar gee vir jou 10 000 ..."

O: "Ja, maar jy moet nou ..."

J: "O, ja, ja."

O: "... twee verskillende getalle neem."

J: "Ja, ... sê nou maar 9×9 is 81, ag 9×8 is 72 en 8×9 is ook 72."

O: "Hoekom is 9×8 72?"

J: "Want, hm, as jy 9 keer 8 sê, as jy die veelvoude van 8 nege keer opsê, dan kom jy by 72 uit."

O: "En hoekom is 8×9 72?"

J: "As jy sê die veelvoude van 9 agt keer sê dan kom jy ook by 72 uit."

O: "Goed, so jy is heeltemal oortuig as ek twee getalle maal, enige twee getalle, en ek draai hulle om kry ek dieselfde antwoord."

J: "Ja."

(c) Paul (projekleerling).

Opmerking: Hy verklaar tegelykertyd die kommutatiewe eienskap en 'n betekenis van vermenigvuldiging deur na die area van 'n reghoek te verwys. Hy is ook een van die enigste leerlinge wat vermenigvuldiging nie sien as bloot die manipulasie van simbole (syfers) nie, maar spontaan op die referente (fisiese objekte) kan opereer. Die meeste ander leerlinge het slegs onder sterk aanmoediging na referente begin verwys. Die uittreksel begin waar hy die vraag beantwoord: "Sal 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer?"

P: "Ja, ek dink dit sal, want as jy nou hierdie kaartjie vat" (verwys na die kaartjie waarop die vraag geskryf is) "en as jy sy oppervlakte wil hê, vermenigvuldig jy sy kortste sy met sy langste sy en dit gee vir jou 'n antwoord. Nou, as jy dan die kaartjie omdraai, vermenigvuldig jy dié sy met daai sy" (hy wys na die lang sy en dan na die kort sy) "gee dit vir jou dieselfde antwoord."

O: "Hoekom is dit so dat as jy die lengte maal met die breedte, gee dit vir jou die area?"

P: "... ek ... wel, jy't hierso ... sê nou maar dis 'n klomp blokkies sjokolade, dan het jy hierso" (verwys na die kort sy) "sê nou maar 3 blokkies, en hierso" (verwys na die lang sy) "4. Jy het 4 blokkies ... 3 rye met 4 blokkies elk. Dan moet jy dit so optel. 4 plus 4 plus 4 is mos maar dieselfde as 3 maal 4, en dit gee vir jou 12 blokkies".

O: "Goed, dis 12 blokkies. En as jy hom nou so dwars draai, dan het jy nou 3 só af en 4 só af en dan kan jy dit beskou as 4 rye van 3 blokkies elk, of jy kan dit beskou as 3 rye van 4 blokkies elk, ens."

(d) Christal (projekleerling)

Opmerking: Hierdie uittreksel is ingesluit vanweë die oorspronklike verklaring waarom die kommutatiewe eienskap geld. Sy antwoord bevestigend op die oorspronklike vraag, en ...

O: "Why?"

C: "Because you times by the same numbers ... the only thing that differs is you just change the numbers ... just change them around ... it's like the sugar and the milk in a recipe ... whether you first put in the sugar or the milk doesn't matter!"

(e) John (projekleerling)

Opmerking: Hierdie is een van twee leerlinge wat negatief op die oorspronklike vraag gereageer het. Hierdie uittreksel illustreer ook die verskynsel dat baie leerlinge vermenigvuldiging nie in 'n konkrete konteks kan verklaar nie. Die uittreksel begin waar hy negatief antwoord op die vraag: "Will 328×257 and 257×328 produce the same answer?"

J: "No".

O: "Why don't you think so?"

J: "Because ... if you times that by that" (hy bedoel 328×257) "then you get your answer, and if you swop them around, it's different ... this one's less than that one" (hy bedoel 257×328 is minder as 328×257).

O: "I see. Let's look at 3×8 and 8×3 ".

J: "They're the same".

O: "Are they the same, even though I turned them around?"

J: "Yes".

O: "What about 11×7 and 7×11 ?"

J: "Still the same".

O: "So if I take smaller numbers, and I turn them around, I get the same answers. Now here we have on the card two larger numbers, and you don't think they give the same answer?"

Die volgende gedeelte van die gesprek word kortliks as volg saamgevat: Hy dink steeds 257×328 sal minder wees, maar kan nie verklaar hoekom is 3×8 nie minder as 8×3 nie. Nóg kleiner getalle, naamlik 2×3 en 3×2 word deur die onderhoudvoerder voorgestel. Die onderhoudvoerder wil van hom weet hoekom is $3 \times 2 = 6$ en $2 \times 3 = 6$.

J: "Well .. ehh ... ehm ... ehm... times 2 is actually ..." (stilte)

O: "What does times or multiply mean to you?"

J: "... make more?"

O: "Okay ... how so?"

J: "... say now you got a number, and you times it by two, you just make it double ... and 3 times 2 means 3 two's, and 3 two's is six."

O: "Let's go back to what you said: 2 times three means double three, and that's six. Why are you so sure its six?"

J: "I don't know ... its because ... I don't know. It's because if you got 3 ..."

O: "3 what?"

J: "Now say you've got 3 ... eh ..."

O: "Three objects, like 3 batteries?"

J: "Yes ... you want to get 6 you can't times it by any other number"

Die onderhoudvoerder sit later drie boeke voor hom neer.

O: "Here are 3 things. Now double them."

J: "Jou add up".

O: "How many."

J: "Three".

O: "How do I know that's 6?"

J: "Count them".

O: "Let me see you count them?"

J: "One, two, three, four, five, six." (Hy tel almal)

O: "Can you now also explain what 3 times 2 means in terms of these 6 books?"

Hy kom redelik gou daarby uit dat dit 3 groepe van 2 boeke elk is. Die onderhoudvoerder vra hom of hy dink die twee skryfwyses op die kaartjie sal dieselfde antwoord gee.

J: "No, I don't think so".

Dit is baie duidelik dat John nie in staat is om hierdie eienskap te veralgemeen nie.

(f) Lida (Projekleerling)

Opmerking: Hier word nie 'n uittreksel uit die onderhoud gemaak nie, maar bloot haar redenasie beskryf. Sy is die ander leerling wat negatief geantwoord het op die oorspronklike vraag. Haar verklaring hiervoor is dat 328×257 is gelyk aan 300×200 plus 300×50 plus 300 maal 7 plus 20 maal 200 ens. dit wil sê sy pas die herhaalde distributiewe eienskap heeltemal korrek toe. Dan sê sy 257×328 is gelyk aan $200 \times 300 + 200 \times 20 + 200 \times 8 + 50 \times 3$ ens., dit wil sê weer 'n korrekte toepassing. Die verrassende kern van haar verklaring is egter dat sy sê dat hierdie partiële produkte van die twee produkte nie dieselfde finale antwoord sal lewer nie.

Die onderhoudvoerder skryf die partiële produkte neer:

328 x 257

257 x 328

300 x 200

200 x 300

300 x 50

200 x 20

300 x 7

200 x 8

20 x 200

50 x 300

20 x 50

50 x 20

20 x 7

50 x 8

8 x 200

7 x 300

8 x 50

7 x 20

8 x 7

7 x 8

Elke parsieë produk uit die linkerkolom word geneem, en sy kommutatiewe parsieë produk uit die regterkolom gesoek, bv. 300×200 en 200×300 , of 20×7 en 7×20 . Waar die onderhoudvoerder verwag het dat sy dadelik sou sê die antwoorde van twee kommutatiewe parsieë produkte is dieselfde, het sy sy verwagting getroef deur vir elke paar die antwoord te bereken, en dan eers te verklaar dat dit dieselfde is. By die vyfde poging (20×50 en 50×20) het die onderhoudvoerder vir haar gesê sy kan darem seker al agterkom hulle gaan dieselfde antwoord lewer. Sy het egter by haar roetine gehou en albei eers bereken voor sy 'n uitspraak wou waag. Hierdie patroon het sy gevolg tot by die laaste poging (8×7 en 7×8) al het die onderhoudvoerder haar hoë aangemoedig om te aanvaar dat die antwoorde dieselfde sal wees.

Hierna het die onderhoudvoerder haar daarop gewys dat al die "stukkies" waaruit 328×257 bestaan, en al die "stukkies" waaruit 257×328 bestaan, dieselfde antwoord lewer, en gevolglik sal ook 328×257 en 257×328 dieselfde antwoord lewer. Of sy hierdie redenasie as oortuigend beskou het, is nie duidelik nie ...

4.3 DIE DISTRIBUTIEWE EIENSKAP

4.3.1 Die vraag wat hieroor gevra is, is:

Sal $374 \times (136 + 78)$ dieselfde antwoord lewer as $374 \times 136 + 374 \times 78$?

Soos wat sal blyk uit die hieropvolgende rapportering van die leerlingresponse, was die insidensie van negatiewe response op hierdie vraag uitermate hoog. Aan die laaste vyf (projek-)leerlinge, almal van skool E, is die vraag as volg gestel:

Sal $37 \times (13 + 26)$ dieselfde antwoord gee as $37 \times 13 + 37 \times 26$?

Slegs een van hierdie leerlinge het 'n positiewe respons gelever. Die navorsers het gevolglik geoordeel dat die response ooreenstem met die response

van die res van die leerlinge, en daarom is die leerlingresponse van albei vrae saamgevat in tabel 4.3.1.

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Sal dieselfde antwoord lewer (positiewe respons)	7	37	2	13
Sal nie dieselfde antwoord lewer (negatiewe respons)	12	63	13	81
Onseker	0	0	1	6
Totaal	19	100	16	100

Tabel 4.3.1

4.3.2

Vervolgens is aan leerlinge gevra hoekom hulle respons só was. Die redes van die leerlinge wat negatiewe response gelewer het, verskyn in tabel 4.3.2(a), en dié van leerlinge wat positiewe response gelewer het, verskyn in tabel 4.3.2(b).

	Nie-projek	Projek
"Tweede skryfwyse is meer"	6	7
"Tweede uitdrukking moet wees: $374 \times 136 + 78$ "	1	0
"Daar is twee keer 374"/"Jy maal twee keer"	4	3
"Jy <u>moet</u> eers 136 plus 78, en dan maal 374"	1	1
Totaal	12	11

Tabel 4.3.2(a)

	Nie-projek	Projek
Verklaar in terme van die bewerkings "Dis tog eintlik dieselfde"	6 1	2
Totaal	7	2

Tabel 4.3.2(b)

Hier volg enkele aanhalings uit onderhoude om te illustreer wat word in tabel 4.3.2(b) verstaan onder: "verklaar in terme van die bewerkings".

Hennie (nie-projekleerling):

O: "Hoekom sê jy ja?"

H: "Omdat as jy dié en dié maal" (wys na 374 en 136) "kry jy 'n antwoord, en dan kan jy weer met 78 maal, en dan tel jy net die twee antwoorde bymekaar, en dan sal dit dieselfde wees as jy die twee opgetel het" (verwys na $136 + 78$)" en dan maal".

Erna (projekleerling):

E: "Ek dink dit sal".

O: "Dink jy so? Hoekom dink jy so?"

E: "As jy die 13 en 26 bymekaartel, gee dit vir jou 39, en dan maal jy dit 37. So dis 37 maal 13, en 37 maal 26, en dan tel ek daai twee getalle bymekaar", (sy bedoel die antwoorde van 37×13 en 37×26) "en dit sal dieselfde wees as daai" (37×39).

4.3.3

Vervolgens is aan die meeste leerlinge gevra om die produk van 3 en 62 te bepaal. Tabel 4.3.3 gee 'n aanduiding van die verskillende metodes wat leerlinge gevolg het:

	Nie-projek	Projek
Langvermenigvuldig (korrek)	16	2
Langvermenigvuldig (verkeerd)	3	10
$3 \times 60 = 180$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 62 = 186$		2
$62 + 62 + 62 = 186$		
Totaal	19	14

Tabel 4.3.3

Opmerkings oor tabel 4.3.3:

- Die twee projekteerlinge wat in die vierde kategorie van tabel 4.3.3 val, dit wil sê " $62 + 62 + 62 = 186$ " is gevra om die produk ook op 'n ander manier te bepaal. Albei het toe die metode in die derde kategorie toegepas, dit wil sê " $3 \times 60 = 180$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 62 = 186$ ".
- Gevolglik benut 12 uit die 14 projekteerlinge die metode in die derde kategorie van tabel 4.3.3. Hulle is dus besig met 'n direkte toepassing van die distributiewe eienskap. Tog het slegs 2 uit 16 (13%) van die projekteerlinge 'n positiewe respons gelever op die oorspronklike vraag oor die distributiewe eienskap (verwys na tabel 4.3.1)! Dit het ernstige bedenkinge laat ontstaan oor die vermoë van die oorspronklike vraag om die bewustheid van die distributiewe eienskap by leerlinge te toets. Die navorser vermoed dat die voorkoms van hakies in die vraag grotendeels hiervoor verantwoordelik was, aangesien geeneen van hierdie leerlinge nog amptelik aan die benutting van hakies blootgestel is nie.
- As hierdie opmerkings verder saam met tabel 4.3.1 beskou word, is 'n ander eienaardige tendens sigbaar, naamlik dat op die oorspronklike vraag die nie-projekteerlinge 'n baie hoër positiewe respons as die projekteerlinge gelever het (37% teenoor 13%). Dit is lynreg in teenstelling met die vermoede wat in paragraaf 1.2.4 uitgespreek is.

- Aangesien hierdie tendense eers na etlike onderhoude begin manifesteer het, het die onderhoudvoerder die struktuur van die onderhoude onveranderd gelaat, ten einde 'n geheelindruk te bekom. Eers nadat bogenoemde bevindinge bestudeer is, is besluit om leerlinge se vlak van bewustheid oor die distributiewe eienskap ook met 'n ander meetinstrument te probeer bepaal. Vir hierdie doel is die vraelys, soos beskryf in paragraaf 3.6, ontwerp en geïmplementeer.

4.3.4

Nadat leerlinge die produk van 3 en 62 moes bepaal, is die volgende procedure gevolg: Die onderhoudvoerder het die leerling gevra of hy saamstem met die metode wat die onderhoudvoerder volg, naamlik:

62 kan "opgebreek" word as $60 + 2$. Gevolglik is 3×62 dieselfde (ekwivalent) as $3 \times (60 + 2)$.

Hiermee het alle leerlinge aan wie die vraag gestel is, saamgestem. Oënskynlik het die gebruik van die hakies hulle nie hier gepla nie. Vervolgens is aan leerlinge gevra of $3 \times (60 + 2)$ dieselfde (ekwivalent) sal wees as $3 \times 60 + 3 \times 2$. Leerlingresponse op hierdie laaste vraag verskyn in tabel 4.3.4.

	Nie-projek	Projek
Ja (sonder om te bereken)	6	11
Nee (sonder om te bereken)	3	
Onseker	1	1
Ja (na berekening)	8	1
Totaal	18	13

Tabel 4.3.4

Opmerking oor tabel 4.3.4:

Die bevindinge in tabel 4.3.4 korreleer glad nie met dié in tabel 4.3.1 nie. In tabel 4.3.4 sê 11 uit 13 projekteerlinge dat $3 \times (60 + 2)$ en $3 \times 60 + 3 \times 2$ dieselfde antwoord sal gee, sonder om dit te bereken, maar in tabel 4.3.1 sê slegs 2 uit 16 projekteerlinge dat $374 \times (136 + 78)$ en $374 \times 136 + 374 \times$

78 dieselfde antwoord sal lewer - en tog is albei gevalle identiese toepassings van die distributiewe eienskap.

Wat egter moontlik die hoë mate van positiewe respons by projekteerlinge in tabel 4.3.4 kon veroorsaak, is die feit dat $(60 + 2)$ 'n natuurlike "opbreek-kombinasie" by projekteerlinge is, en dat die voorkoms en herkenning van hierdie kombinasie as 'n wenk gedien het waarop hulle gereageer het. Die moontlikheid bestaan ook dat die betekenis van hakies nou vir sommige leerlinge deurgebreek het.

Hier volg uittreksels uit onderhoude om tabel 4.3.4 toe te lig:

Braam (nie-projekteerling): Antwoord "nee" op oorspronklike vraag. Op die vraag: "hoekom sê jy so?" sê hy die tweede skryfwyse, dit wil sê $374 \times 136 + 374 \times 78$, is meer as die eerste skryfwyse, dit wil sê $374 \times (136 + 78)$. Verder sê hy "ja", $3 \times (60 + 2)$ is dieselfde as $3 \times 60 + 3 \times 2$ (verwys na tabel 4.3.4.).

O: "Vermenigvuldig gou vir my 3 met 62".

B: "Moet ek dit hier op die vel doen?"

O: "Ja".

(Hy skryf:
$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$
)

O: "Stop nou net gou. Ek het vir jou gevra om te vermenigvuldig 3 met 62".

B: "O!"

O: "Nou maar wag nou, moet nou nie verder skryf nie". (Hy wil skryf:

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 62 \\ \hline \end{array}$$
)

"Is 3 maal 62 nie maar dieselfde as 62 maal 3 nie?"

B: "Ja, maar ek ... ons het geleer jy moet altyd die grootste getal eerste sit."

O: "Goed".

Hy doen die berekening:

B: "2 maal 3 gee vir jou 6 ... en 3 maal 6 dan ... sit jy 'n nul agter en dis 180 ... en dan tel jy net daai twee bymekaar" (hy bedoel 180 en 6) "... en dis nou 186".

Sy berekening lyk so:

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 3 \\ \hline 6 \\ \hline 180 \\ \hline 186 \end{array}$$

O: "Dis baie mooi. Jy het nou gesê as jy 3 maal met 6, dan sit jy 'n nul aan. Waar sit jy die nul aan?"

B: "3 maal 6 ... jy kyk ... hoeveel nulle is daar na ... as dit 'n tien is, dan sit jy een nul aan; as dit 'n honderd is, dan sit jy twee nulle aan."

O: "Met ander woorde, wat jy eintlik sê, is daai 6 wat daar bo staan ..."

B: "Is 60."

O: "... is 60".

B: "Ja".

O: "Ek gaan nou dieselfde probleem só doen, en nou moet jy vir my sê of jy saamstem of dit wat ek doen, reg is. Ek gaan 3 maal 62 doen deur te sê dis 3 maal ... en die 62 weet jy tog beteken 60 ..."

B: "plus 2".

O: "... plus 2. Ek gaan nou maar net die $60 + 2$ in hakies sit om te wys dit hoort bymekaar."

Onderhoudvoerder skryf: $3 \times 62 = 3 \times (60 + 2)$

O: "Nou, ek kan nou daai som verder doen deur te sê dit" ($3 \times (60 + 2)$)" is maar dieselfde as 3 maal 60 plus ..."

B: "2"

O: "... 3 ..."

B: "O ja, ja ..." (Hy beseft dus dit is nie $3 \times 60 + 2$ nie, maar wel $3 \times 60 + 3 \times 2$)

O: "... maal 2."

O: "O, ja, ja!"

$$\begin{aligned} \text{Onderhoudvoerder skryf } 3 \times 62 &= 3 \times (60 + 2) \\ &= 3 \times 60 + 3 \times 2 \end{aligned}$$

O: "Wat dink jy daarvan?"

B: "Ja, dit gaan dieselfde antwoord uitkom"

O: "Hoekom?"

B: "Want daarso wat ek daarbo gedoen het" (verwys na sy metode) "is 3 maal 2 en daarso" (verwys na onderhoudvoerder se metode) "is ook 3 maal 2, en dan kom ek by 6 uit, en dan tel ek net 3 maal 60, dis 180, dan tel ek net die twee se antwoorde bymekaar."

O: "Met ander woorde, jy sien dat wat ek hier gedoen het, is maar dieselfde as wat jy gedoen het, dis net 'n bietjie anders geskryf."

B: "Ja".

O: "Jy sien met ander woorde die 3 wat ek gemaal het met 62 het ek gemaal met die 60 en met die 2".

B: "Ja".

O: "Goed, ek gaan nou vir jou vra om weer te kyk na die vraag op die kaartjie". (Die vraag lui: "Sal $374 \times (136 + 78)$ dieselfde antwoord lewer as $374 \times 136 + 374 \times 78$?")

B: "... O ja! Ja, ek sien hy's reg ja!"

O: "Hoekom verander jy nou van gedagte?"

B: "Want 374 maal 136 ... as jy die boonste twee bymekaartel" (hy bedoel 136 plus 78) "dan kry jy 214 en dan breek jy net daai twee van mekaar af op, dan sê jy 374 maal 136 en dan plus jy daai antwoord by die 374 maal 78".

O: "Met ander woorde, jy sien die patroon op die kaartjie is dieselfde as die patroon van die 62 maal 3".

B: "Ja".

O: "Sê gou vir my: dink jy ek kan daai 3 maal 62 byvoorbeeld gedoen het as ek 62 opbreek as 50 plus 12 ..."

B: "Ja".

O: "... en dat ek dan weer kan sê dis 3 maal 50, plus dan 3 x 12".

Hy werk uit soos die onderhoudvoerder praat, en kry 186.

B: "Ja, dieselfde antwoord".

O: "So jy is nou heeltemal oortuig wat op die kaartjie staan, is waar?"

B: "Ja".

Hierdie aanhaling dui ook alreeds op die inligting in tabelle 4.3.5; 4.3.6 en 4.3.9.

Pieter (projekleerling): antwoord "nee" op oorspronklike vraag. Op die vraag: "hoekom sê jy so?" sê hy dat die tweede skryfwyse groter is as die eerste. Verder sê hy $3 \times (60 + 2)$ is dieselfde as $3 \times 60 + 3 \times 2$, nadat hy dit bereken het (verwys na tabel 4.3.4).

O: "Werk gou vir my uit wat is 62 vermenigvuldig met 3"

Hy skryf: $62 \times 3 = 186$
 $60 \times 3 = 180 \quad 2 \times 3 = 6$

O: "Ek gaan nou dieselfde som net so 'n bietjie anders doen. Ek gaan 62 maal 3 ... sal jy saamstem dis dieselfde as 3 maal 62 ... dis dieselfde as waaroor ons netnou gesels het"

P: "Ja".

O: "Jy het nou die 62 opgebreek as 60 en 2. Ek gaan dit ook doen ... ek gaan alles doen wat jy gedoen het, ek skryf dit net 'n bietjie anders. So daai 62 skryf ek nou as 60 plus 2. Ek sit dit net in hakies om te wys dis nou die 62".

Onderhoudvoerder skryf $62 \times 3 = 3 \times 62$
 $= 3 \times (60 + 2)$

O: "Wat ek by jou wil weet is: sal jy nou saamstem dat wat dáár staan - die 3 maal 60 plus 2 - maar dieselfde antwoord sal gee as wanneer ek 3 maal met die 60 en daar bytel 3 maal met die 2"

Onderhoudvoerder skryf $62 \times 3 = 3 \times 62$

$$= 3 \times (60 + 2)$$

$$= 3 \times 60 + 3 \times 2$$

P: "Ja dit sal"

O: "Hoekom?"

P: "3 maal 2 is 6, 3 maal 60 is 180, 6 plus 180 is 186".

O: "So jy sien nou die antwoord is dieselfde as die antwoord wat jy gekry het. So jy glo toe wat ek gedoen het. Dink jy wat ek hier gedoen het dieselfde is as wat jy gedoen het?"

P: "Ja, tog".

O: "Hoekom sê jy so?"

P: "Ek het ook so opgebreek ... ek het net nie die plus ingeskryf nie".

4.3.5 Soos blyk uit die voorafgaande twee onderhoude, is leerlinge gevra of hulle 'n ooreenkoms sien tussen hulle metode om die produk van 62 en 3 te bepaal, en die onderhoudvoerder se uiteensetting, naamlik $3 \times 62 = 3 \times (60 + 2) = 3 \times 60 + 3 \times 2$. Tabel 4.3.5 toon leerlingresponse hierop:

	Nie-projek	Projek
Sien ooreenkoms	12	7
Sien nie ooreenkoms	2	
Onderhoudvoerder wys leerling op ooreenkoms sonder om leerling te vra of hy ooreenkoms sien	3	2
Totaal	17	9

Tabel 4.3.5

Aan leerlinge wat nie die ooreenkoms kan sien nie, (tweede kategorie uit tabel 4.3.5) is noukeurig gewys op die ooreenkoms (selfs met langvermenigvuldiging) omdat dit as basis sou dien om die oorspronklike vraag met vertroue korrek te kan beantwoord.

4.3.6

Vir verskeie leerlinge is op hierdie stadium gevra of hulle dink 'n mens kan die produk van 3 en 62 ook bepaal deur 62 op ander maniere op te breek, bv. $(50 + 12)$; $(80 - 18)$; $(55 + 7)$; ens. Tabel 4.3.6 toon die leerlingresponse hierop.

	Nie-projek	Projek
Ja (sonder bereken)	2	4
Nee (sonder bereken)		1
Onseker	1	2
Totaal	3	7

Tabel 4.3.6

Maria (projekleerling) uit eerste kategorie in tabel 4.3.6: "nee" geantwoord op oorspronklike vraag, en op vraag: "hoekom" gesê die tweede skryfwyse is meer.

O: "Dink jy as ek 3 maal met 62 kan ek 62 op enige manier opdeel, en dan maal ek 3 met die eerste opgedeelde stukkie, en ek maal ook 3 met die ander opgedeelde stukkie?"

M: "Ja ... dis mos 62. Dan deel jy dit op ... 62 dan kom dit 31 ... 31 maal 3 is ... ee ... dan kry jy die antwoord dan tel jy ... dis tog dieselfde ... as jy dit bymekaartel dan kry jy 62 en dan maal jy dit met 3. Dis dieselfde".

O: "Goed, en sê nou ek deel 62 op as 80 minus 18 ... jy kan maar uitwerk: 80 minus 18 gee vir jou 62. Dink jy ek kan dit nou ook gaan maak net soos tevore, net soos jy oortuig is van, dat ek 3 maal met elkeen van daai opgedeelde stukkies ... 3 maal met 80 en ook 3 maal met 18?"

M: "Nee".

O: "Hoekom nie".

M: "Want 80 is meer ... dit is meer as 62. Maar daar minus jy dit, maar jy kan hom nie só maak met die 80 nie".

O: "Behalwe as ek nou ..."

M: "As jy daai minus".

O: "A, behalwe as jy 3 maal 80 minus 3 maal 18".

4.3.7

Vervolgens is leerlinge wat "nee" geantwoord het op die oorspronklike vraag of onseker was, gevra om weer na die vraag op die kaartjie te kyk. (Sal $374 \times (136 + 78)$ dieselfde antwoord lewer as $374 \times 136 + 374 \times 78$?). Die verwagte respons was nou dat leerlinge, ná al die voorafgaande aktiwiteite, met sekerheid 'n positiewe respons op hierdie vraag sou lewer. Leerlingresponse word in tabel 4.3.7 aangetoon.

	Nie-projek	Projek
Positiewe respons	4	8
Negatiewe respons of onseker	8	7
Totaal	12	15

Tabel 4.3.7

Uit tabel 4.3.7 blyk dat projekteerlinge 'n groter vordering as nie-projekteerlinge openbaar, aangesien 8 uit 15 wat tevore 'n negatiewe respons gelewer het, of onseker was, nou positief respondeer. Daarenteen kan slegs 4 uit 12 nie-projekteerlinge nou positief respondeer.

Daar is egter by beide projek- en nie-projekteerlinge steeds 'n groot aantal leerlinge wat nie positief respondeer nie (7 uit 15 projekteerlinge en 8 uit 12 nie-projekteerlinge).

Die volgende uittreksels uit onderhoude lig tabel 4.3.7 toe:

Braam: (projekteerling): verwys na die aanhaling uit sy onderhoud in paragraaf 4.3.4.

Marius (nie-projekleerling): antwoord "nee" op oorspronklike vraag, want "die tweede skryfwyse gaan meer wees". Hy sê nou die twee skryfwyses van die oorspronklike vraag lewer dieselfde antwoord.

O: "Nou gaan ek weer vir jou vra om te kyk na die vraag op die kaartjie".

M: "... ja, dit sal dieselfde wees".

O: "Sal dit? Hoekom?"

M: "Omdat ... dit ... daar moet jy mos alles maal met daai plus daar" (verwys na $374 \times (136 + 78)$)" en dan ... dis iets in die 200 .."

O: "Nee wag, jy hoef dit nie uit te werk nie ... ek wil net weet of jy nou sê dis dieselfde".

M: "Jy kry dieselfde antwoord".

O: "Jy het netnou vir my gesê jy kry nie dieselfde antwoord nie. Hoekom sê jy nou ja ... wat het jou van besluit laat verander?"

M: "Hierdie een" (Hy wys na die probleem: $3 \times (60 + 2) = 3 \times 60 + 3 \times 2$).

4.3.8

Aan enkele leerlinge is die volgende vraag gevra: "Ek dink aan enige getal. Daarby tel ek 'n tweede getal. Nadat ek hierdie twee getalle bymekaargetel het, vermenigvuldig ek dit met 'n derde getal. Is die antwoord wat ek kry dieselfde as wanneer ek die eerste getal met die derde getal vermenigvuldig, en die tweede getal ook met die derde getal vermenigvuldig, en dan hierdie twee antwoorde bymekaartel?" Leerlinge is gelei om die probleem in terme van simbole te formuleer, dit wil sê om die vraag te beskou as: "Is $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$?"

Die bevindinge word in twee tabelle weergegee.

Tabel 4.3.7(a) dui leerlinge aan wat op die oorspronklike vraag in 4.3.1 'n positiewe respons gelever het.

Tabel 4.3.7(b) dui leerlinge aan wat op die oorspronklike vraag in 4.3.1 'n negatiewe respons gelever het.

	Nie-projek	Projek
Ja Nee	2	1
Totaal	2	1

Tabel 4.3.7(a)

	Nie-projek	Projek
Ja Nee		6
Totaal		6

Tabel 4.3.7(b)

Onderstaande aanhalings lig tabelle 4.3.7(a) en (b) toe.

Retha (nie-projekleerling); positiewe respons by 4.3.1, dit wil sê op die oorspronklike vraag:

- O: "Dink gou aan die volgende probleem: Ek dink aan 'n getal ... enige getal ... en by daai getal tel ek nog 'n getal. Die twee getalle wat ek by mekaar getel het, gaan ek maal met 'n derde getal. Nou raak dit 'n bietjie deurmekaar. Hoe dink jy sal ek dit kan skryf?"
- R: "Ek sal dit skryf as twee getalle wat ek bymekaartel en in hakies sit en dan na die hakies maal die ander getal".
- O: "Met ander woorde, kom ons sê maar die struktuur gaan wees: getal plus getal, in hakies, maal met getal. Nou daai drie getalle, om nou vir jou te help dat jy nie deurmekaar raak nie, gaan ek nou vir elkeen van daai getalle 'n simbool gee ... enige simbool. Wat dink jy?"
- R: (giggel) "Nee, ek sal nie weet nie".

O: "Ek kan maar sê die eerste getal is x , en die tweede getal is y en dis die twee getalle wat ek bymekaartel, en dit kan dan gemaak word met z ".

(Skryf $(x + y) \times z$)

"Ek wil nou by jou weet of, as ek daai ding sou uitwerk, met ander woorde as ek eers die twee getalle bymekaartel, en dit dan nou maal met die derde getal, of dit maar presies dieselfde antwoord sal gee as wat ek eers die eerste getal maal met daai derde getal, en dit dan bytel by die tweede getal waaraan ek gedink het gemaak met daai derde getal" (Skryf: $x \times z + y \times z$).

R: "Ja".

O: "Hoekom dink jy so?"

R: "Omdat ... dieselfde as wat ek hierso gedoen het by die vorige een" (verwys na oorspronklike vraag 4.3.1), waarop sy 'n positiewe respons gelever het).

Paul (projekleerling) wat 'n negatiewe respons op die oorspronklike vraag (4.3.1) gegee het.

O: "Ek gaan nou met drie getalle werk, maar dit is nou sommer enige drie getalle, en die eerste getal waaraan ek dink, en die tweede getal waaraan ek dink, hulle twee gaan ek bymekaartel. Nadat ek hulle opgetel het, gaan ek hulle maal met 'n derde getal. Dink jy dit sal dieselfde wees as wanneer ek die eerste getal waaraan ek gedink het, vermenigvuldig met die derde getal, en dit bytel by die tweede getal waaraan ek gedink het, vermenigvuldig met die derde getal?"

P: "Nee, ek dink nie so nie, want sê nou jou eerste getal was 1, en jou tweede getal was 1, en jy vermenigvuldig dit met 2, en as jy gesê het ... maak die tweede getal ook 2, en as jy gesê het 2 maal 1 gee vir jou 2, plus 2 ...".

O: "Plus 2?"

P: "Want dis mos nou 2 maal 1, want meneer het mos gesê 2 maal 1 en dan die een bytel ...".

O: "Nee, ek het dit aspris só 'n lang storie gemaak ... maar jy het toe die laaste stertjie gemis. Nee, ek het gesê ek gaan die eerste getal

omgekeerd. Tabel 4.3.8(b) toon hoeveel leerlinge spontaan 'n ander metode kon benut.

	Nie-projek	Projek
Kan ander metode benut	2	3
Kan nie ander metode benut nie	1	2
Totaal	3	5

Tabel 4.3.8(b)

Hierna is aan die leerlinge getoon dat die twee metodes wat hulle aangewend het (of waarheen hulle gelei is as hulle nie 'n tweede metode kon aanwend nie (tabel 4.3.8(b)), as volg geskryf kan word:

$$(1 + 2 + 3) \times 4 \text{ en } 1 \times 4 + 2 \times 4 + 3 \times 4,$$

en dat hulle te kenne gegee het dat albei skryfwyses dieselfde antwoord lewer.

Toe is ses van hulle gevra of hulle gedurende die onderhoud al 'n soortgelyke probleem teëgekome het. Vyf van die ses het 'n positiewe respons gelewer, en verwys na òf die oorspronklike vraag oor die distributiewe eienskap (4.3.1), òf die vraag $3 \times (60 + 2) = 3 \times 60 + 3 \times 2$.

4.3.9 Aan vier projekteerlinge is ook die volgende vraag gestel:

"Maak 'n keuse:

As a, b en c enige getalle is, is $a \times (b + c)$ gelyk aan:

1. $a \times b + a \times c$, of

2. $a \times b + c$, of
3. Nie een van 1. of 2. nie"

Hierdie vraag is aan die einde van die onderhoud gestel, geruime tyd nadat die distributiewe eienskap in die onderhoud behandel is. Tabel 4.3.9 dui aan watter opsie die leerlinge as eerste keuse geneem het.

1. $a \times b + a \times c$	1
2. $a \times b + c$	3
3. Nie een van 1. of 2 nie.	

Tabel 4.3.9

- 4.3.10 Enige kommentaar oor die bevindinge ten opsigte van die distributiewe eienskap word teruggehou tot by die bespreking van die bevindinge op die vraelys in 4.8.

4.4 MINUS-TEKEN VOOR HAKIES

- 4.4.1 Die vraag wat hieroor gevra is, is:

Sal $523 - (128 + 395)$ en $523 - 128 - 395$ dieselfde antwoord gee?

Volledigheidshalwe word dit genoem dat hierdie vraag voorgekom het nadat leerlinge reeds met hakies gekonfronteer is (verwys na 4.3).

4.4.2 Die leerlingresponse op hierdie vraag word in tabel 4.4.2 aangedui.

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Sê van die begin af JA	10	59,1	11	76,5
Sê eers NEE, en verander dan self later na JA	3		2	
Antwoord NEE	9	40,9	4	23,5
Totaal	22	100	17	100

Tabel 4.4.2

Hannes (nie-projekleerling) sê eers NEE, en verander dan self na JA:

H: (Lees die vraag vanaf die kaartjie): "Sal $523 - (128 + 395)$ en $523 - 128 - 395$ dieselfde antwoord gee? ... Nee".

O: "Nie? Hoekom dink jy nie so nie?"

H: "Want hierso is 523 minus die twee getalle wat jy plus" (wys na die eerste skryfwyse) en as jy dit plus en jy trek dit van die ander af, gee dit vir jou 'n antwoord, maar as jy sê $523 - 128 - 395$ dan gaan dit vir jou ... nee, dit gaan vir jou dieselfde antwoord gee."

Marianne ('n projekleerling) sê ook eers NEE, en verander later self na JA.

M: (Lees die vraag vanaf die kaartjie): "Sal $523 - (128 + 395)$ en $523 - 128 - 395$ dieselfde antwoord gee? ... Nee" (dadelik).

O: "Nee. Definitief nie?"

M: "Want daar plus hulle, daar minus hulle en daar's dit dieselfde".

O: "Wag net gou 'n bietjie".

M: "Want daar's dit tussen hakies, en daar's dit nie".

- O: "So daar's 'n klomp verskille ... daar's hakies bo en nie onder nie; bo is dit plus 395, onder is dit minus 395".
- M: "Jy vat dit nou, dan minus jy dit daarvan ..."
- O: "Wag nou, jy vat nou wat?"
- M: "523 ... ek sal nou eers 395 daarvan afvat ..."
- O: "Waarvan?"
- M: "Van die 523 en dan sal ek, as ek nou my antwoord kry, dan sal ek die 128 daarvan aftrek dan kry ek die antwoord. Maar hierso sê dit" (wys na eerste skryfwyse) "523 minus, dan tel jy daai twee weer net by ... dan ... maar dit is dieselfde!"
- O: (lag)
- M: "Nou sien ek!"
- O: "So dit is dieselfde".

4.4.3

Aan leerlinge wat van die begin af JA gesê het, of eers NEE maar terwyl hulle oor die probleem gesels na JA verander, is gevra HOEKOM hulle JA sê. Die leerlingresponse op hierdie vraag verskyn in tabel 4.4.3.

	Nie-projek	Projek
Leerlinge wat dit verklaar in terme van die bewerkings	11	10
Leerlinge wat aantoon dat dit vir klein getalle geld en aanvaar dit geld ook vir groot getalle		1
Totaal	11	11

Tabel 4.4.3

Die volgende twee uittreksels illustreer wat word in tabel 4.4.3 bedoel met "verklaar in terme van die bewerkings".

Marie (nie-projekleerling):

O: "Hoekom?"

M: "Want as jy daai bymekaartel" (sy bedoel $128 + 395$) "dan is dit gesamentlik een getal wat jy by die 523 aftrek, maar wanneer jy apart elkeen aftrek, dan kom dit op dieselfde neer".

Gert (projekleerling)

G: "... want hierso plus jy die twee getalle by mekaar en dan minus jy dit, en hierso is dit sonder die hakies en dan minus jy hulle apart".

Die 11 nie-projekleerlinge en die 10 projekleerlinge in tabel 4.4.3 wat die vraag "HOEKOM?" beantwoord het deur te "verklaar in terme van die bewerkings", is dus in staat om hierdie eienskap te verwoord. Hulle beskik dus oor eksplisiete kennis van hierdie eienskap. Die volgende aspekte is egter nie duidelik nie:

- Beleef hulle dit as 'n getaleienskap, dit wil sê is $523 - (128 + 395) = 523 - 128 - 395$ vir hulle 'n identiteit, of beleef hulle dit as 'n prosedure, selfs twee prosedures, wat elkeen dieselfde antwoord lewer?
- Beweeg hulle bewustelik of onbewustelik op die verklaringsvlak, waar hulle met behulp van 'n spesiale geval wat hulle konkreet kan hanteer, kan verifieer dat albei skryfwyses dieselfde antwoord lewer? Indien dit so plaasvind, aanvaar hulle ook dit geld vir hierdie moeilik verifieerbare geval (daarom antwoord hulle bevestigend), en kan gesê word dat hulle in staat is om te veralgemeen? Dit is trouens wat die enkele projekleerling in tabel 4.4.3 doen: hy toon aan dat dit vir klein getalle geld (dit wil sê 'n verifieerbare geval), aanvaar dit geld vir groot getalle en dus ook vir hierdie spesifieke geval.

4.4.4

Alhoewel die vlak van begryping ten opsigte van hierdie getaleienskap by leerlinge wat JA geantwoord het reeds vir die navorser duidelik was, het hy nogtans 'n verdere vraag vir hierdie leerlinge gevra. Hy het hulle gevra om 'n woordprobleem rondom die vraag [Is $523 - (128 + 395) = 523 - 128 - 395?$] te konstrueer, sodat dit duidelik blyk dat albei skryfwyses of berekeningsmetodes dieselfde antwoord lewer. Dit was weer 'n poging om te sien of leerlinge hierdie eienskap kan verklaar deur in 'n konkrete konteks te opereer. Hulle is dus gedwing om aan die simbole (= getalle) referente te koppel, en met die referente te werk. Anders gestel: hulle is gedwing om die logika van die twee bewerkings aan te toon. Die mate van sukses hiervan word in tabel 4.4.4 aangedui:

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Gee 'n sinvolle probleem Sukkel om 'n sinvolle probleem te gee, of kan glad nie 'n probleem gee nie en moet daartoe gelei word	10	76,9	10	100
Totaal	13	100	10	100

Tabel 4.4.4

Hier volg uittreksels uit onderhoude om te illustreer wat word met sinvolle probleme bedoel:

Hester (nie-projekleerling)

H: "Sê nou iemand het 523 duiwe gehad, en toe gaan 128 duiwe dood, en toe vlieg hy dié wat oorbly in 'n resies, en 395 van daai wat in die resies vlieg het weggeraak en hy het hulle nooit weer teruggekry nie."

O: "So jy sê 'n mens kan maar eers almal wat weggeraak het, bymekaartel ..."

H: "Ja".

O: "... en dan aftrek van wat hy aan die begin gehad het ..."

H: "Ja".

O: "... of jy kan maar soos wat hulle weggeraak het ...".

H: "Ja".

O: "... kan jy maar aftrek".

H: "Ja".

Gert (projekleerling)

G: "'n Boer het 523 skape, en hy wil dit verminder. Die eerste jaar maak hy 128 weg, en die volgende jaar 395. Hoeveel is oor?"

O: "Kan jy ook die eerste skryfwyse daarop toepas?"

G: "Jy kan sê die boer het 523 skape dan wil hy hulle nie jaarliks verminder nie, dan verminder hy sy skape op een slag, dan verminder hy 128 plus 395 - dan minus jy al die skape ... dis eintlik makliker om eers op te tel, en dan alles af te trek".

Stefan (nie-projekleerling), daarenteen, is nie instaat om 'n woordprobleem aan die hand te doen nie, en moet daartoe gelei word:

O: "Kan jy aan 'n situasie dink waar só iets kan voorkom? ... Dit hoef nie dieselfde getalle te wees nie".

S: "100 minus 60 minus 5 ..."

O: "Maar gee nou 'n betekenis aan 100, 60 en 5 ... bou 'n storietjie daarom".

S: (Stilte).

O: (Na sowat $\frac{3}{4}$ minuut): "Moet ek jou help?"

S: "Ja"

O: "Sê nou jy het 100 sent, 'n Rand, en jy spandeer 60c en toe weer 5c, dan kan ek dit mos skryf as 100c, dan spandeer ek 60c en dan 5c".

(Skryf: $100 - 60 - 5$. Die aktiwiteit verloop verder presies soos die begeleidende aktiwiteit in paragraaf 4.4.6 beskryf).

Josef (nie-projekleerling) was nie aanvanklik in staat om 'n sinvolle probleem te konstrueer nie:

O: "Kan jy vir my 'n storietjie opmaak waar dit nou sal voorkom?"

J: "Nee, ek weet nie ... hoe bedoel oom?"

O: "Ek bedoel jy moet 'n ... ek dink julle noem dit seker storiesomme ..."

J: "O, 'n woordsom".

O: "Ja, ek bedoel jy moet vir my 'n woordsom ontwerp of maak waar jy nou kan wys as ek nou só maak of as ek nou só maak" (verwys na die twee skryfwyses) "dan gee dit maar vir my dieselfde antwoord".

J: "Okay, jy het 523 lemoene, en jy ... jy ... jy kry 128 by jou ma en 395 by jou pa, en toe steel jou broer daardie twee ... toe steel jou broer daai res ... die 128 en die 395 ... en hy steel daardie twee se antwoord van daardie ene" (bedoel 523) "af".

O: "Dink jy nie as 'n mens 128 lemoene kry en toe nog 395 kry, moet jy dit eers bytel by die 523 voor daardie nare ou dit kom steel het nie?"

J: "Ja".

Hierna het hy wel die probleem reggestel, en 'n sinvolle woordprobleem gekonstrueer.

4.4.5

Leerlinge wat NEE geantwoord het op die vraag: "is $523 - (128 + 395) = 523 - 128 - 395$?", is ook gevra hoekom hulle so sê. Tabel 4.4.5 toon 'n ontleding van hierdie response.

	Nie-projek	Projek
Leerlinge wat sê die tweede stap moet + 395 bevat/die tekens verskil:	5	3
Leerlinge wat sê dis net waar as die tweede stap identies aan die eerste stap is:	1	
Leerlinge wat sê die tweede stap is kleiner/die eerste stap is groter	2	
Leerlinge vir wie gevra is: Hoekom?	8	3

Tabel 4.4.5

- 4.4.6 Aan alle leerlinge wat NEE geantwoord het op die vraag: "is $523 - (128 + 395) = 523 - 128 - 395$?" is die volgende begeleidende aktiwiteit gegee:

Die leerling moes bereken hoeveel geld bly oor van R10 as 'n persoon eers R2 spandeer, later R3 en nog later R4. Al dertien die betrokke leerlinge kon dit maklik doen deur òf eers op te tel, dws $2 + 3 + 4 = 9$; $10 - 9 = 1$; òf deur alles af te trek, dit wil sê $10 - 2 - 3 - 4 = 1$. Tabel 4.4.6(a) dui aan hoeveel leerlinge elke metode gebruik het.

	Nie-projek	Projek
Eers optel	6	2
Alles aftrek	3	2
Totaal	9	4

Tabel 4.4.6(a)

Vervolgens is die leerling gevra of hy die probleem op 'n ander manier kon doen. Die verwagte respons was dat 'n leerling wat eers opgetel het, nou alles sal aftrek en omgekeerd. Tabel 4.4.6(b) gee 'n ontleding hiervan.

	Nie-projek	Projek
Kan ander metode self "ontwerp" en toepas	5	4
Kan ander metode nie self "ontwerp" en toepas, maar stem saam as onderhoudvoerder ander metode voorstel	2	
Totaal	7	4

Tabel 4.4.6(b)

Twee nie-projekleerlinge is nie gevra om self 'n ander manier aan te bied nie. Die onderhoudvoerder het self die ander manier aan die leerling gestel, en gevra of hy saamstem. Al twee leerlinge het saamgestem.

Hierna is aan al die leerlinge wat NEE geantwoord het op die vraag: "is $523 - (128 + 395) - 523 - 128 - 395$?" die twee skryfwyses van die begeleidende aktiwiteit gewys, naamlik $10 - (2 + 3 + 4)$ en $10 - 2 - 3 - 4$, en is hulle gevra of hulle aanvaar dat hierdie twee skryfwyses korrekte voorstellings is van die twee metodes, en of hulle oortuig is dat albei skryfwyses dieselfde antwoord sal lewer. In alle gevalle was die antwoord op albei vrae bevestigend. Hierna is die oorspronklike vraag: Is $523 - (128 + 395) = 523 - 128 - 395$? weer aan hierdie leerlinge gestel. Tabel 4.4.6(c) gee 'n ontleding van die response hierop.

	Nie-projek	Projek
Antwoord nou JA (sonder hulp)	8	1
Sukkel steeds, maar sê later JA (met hulp)	1	2
Sê steeds NEE		1
Totaal	9	4

Tabel 4.4.6(c)

Freek (nie-projekleerling) het NEE geantwoord op die vraag: "Is $523 - (128 + 395) = 523 - 128 - 395$?" Die begeleidende aktiwiteit is met hom gedoen, en hy was tevrede met albei skryfwyses, oftewel dat $10 - (2 + 3 + 4) = 10 - 2 - 3 - 4$. Toe is daar teruggekeer na die oorspronklike vraag.

- O: "So jy is tevrede 'n mens kan die vraag" (begeleidende aktiwiteit) "op albei maniere doen en skryf?"
- F: "Ja".
- O: "Goed, kyk gou weer na die kaartjie" (die oorspronklike vraag).
- F: (lees vraag op kaartjie) ... (stilte) ... "Die boonste een sal die grootste getal wees en die onderste die kleinste" (Hy bedoel $523 - (128 + 395)$ is groter as $523 - 128 - 395$).
- O: "Sien jy nie 'n ooreenkoms tussen wat ons op die kaartjie het, en hierdie probleem wat ons nou net gedoen het van die geld uitgee nie?"
- F: "... Nee"
- O: "Dink jy nie ek kan in daardie boonste probleem ook sê: 'n boer het 523 skape, hy verkoop toe 128 en later verkoop hy weer 395. Hoeveel het hy oor? Dink jy nie altwee daardie" (bedoel en wys na altwee skryfwyses op kaartjie) "vertel vir my maar dieselfde nie? Kan ek nie albei gebruik om uit te vind hoeveel het hy oor nie?"
- F: "Altwee".
- O: "Altwee? Is jy seker?"
- F: "Ja".

4.5 DIE KOMMUTATIEWE EIENSKAP VIR OPTELLING

4.5.1 Die vraag wat oor hierdie eienskap aan leerlinge gestel is, is:

Sal $386 + 549$ en $549 + 386$ dieselfde antwoord lewer?

4.5.2 Die leerlingresponse op hierdie vraag word in tabel 4.5.2 weergegee.

	Nie-projek	Projek
Antwoord spontaan "Ja" Nie heeltemal seker	15	4 1
Totaal	15	5

Tabel 4.5.2

Uit tabel 4.5.2 blyk dit dat hierdie getaleienskap by slegs twintig uit die veertig leerlinge getoets is. Die volgende redes kan daarvoor aangevoer word:

- (a) Die feitlik 100% positiewe respons by die twintig leerlinge het die onderhoudvoerder sterk tot die vermoede gelei dat die res van die leerlinge se response soortgelyk sal wees.
- (b) Hierdie eienskap is getoets nadat die kommutatiewe eienskap vir vermenigvuldiging getoets is. Reeds by laasgenoemde eienskap was daar 'n oorweldigende positiewe respons (sien tabel 4.2.2). Hierdie feit, tesame met die waargenome hoë persentasie positiewe respons op die kommutatiewe eienskap vir optelling, het die onderhoudvoerder oortuig dat dieselfde patroon waarskynlik by die ander leerlinge gevind sou word.

Uit tabel 4.5.2 blyk ook dat slegs 5 projekleerlinge, teenoor 15 nie-projekleerlinge, getoets is vir hul vlak van bewustheid van hierdie eienskap. Die redes hiervoor is as volg:

- (a) Die volgorde waarin die leerlinge ondervra is, was sodanig dat die aanvanklike onderhoude meestal met nie-projekleerlinge gevoer is. Daarom is reeds heelwat meer nie-projekleerlinge as projekleerlinge

oor hierdie eienskap ondervra voordat die onderhoudvoerder besluit het om vrae oor hierdie eienskap in te kort.

(b) Aan vyf projekteerlinge is eerder die volgende vraag gestel:

As a en b enige getalle voorstel,
sal $a + b = b + a$?

Al vyf van hulle het bevestigend geantwoord. Dit het die patroon van oorheersend positiewe response ten opsigte van die kommutatiewe eienskap vir optelling baie sterk ondersteun en bevestig.

Die leerling wat (volgens tabel 4.5.2) nie heeltemal seker was of $386 + 549 = 549 + 386$, is John, wat ook op die vrae oor die kommutatiewe eienskap vir vermenigvuldiging (sien tabel 4.2.2) en minus-teken voor hakies (sien tabel 4.4.2) negatief gereageer het.

John (lees die vraag op die kaartjie): "Will $386 + 549$ and $549 + 386$ produce the same answer? No?"

O: "Why not?"

J: "Because this is bigger!"

O: "You mean the 549 in the second case is larger than the 386 in the first case?"

J: "Yes"

O: "Can you see those two problems are basically the same; it's just the numbers that are turned around?"

J: "... No, they are the same ... the numbers are just turned around."

J: "Why do you say yes now ... did you see something that you have missed previously?"

J: "... (onduidelik) ... no, I'm not quite sure."

O: "You're not sure it will give you the same answer? You can see it's the same numbers in both cases?"

J: "Yes".

Die volgende gedeelte van die opname is onduidelik totdat:

J: "... I've got a rough idea that they are, but I'm not sure".

O: "What does addition mean to you?"

J: "Add ... double".

O: "Double? ... suppose I have four books plus two more ..." Die res is onduidelik.

J: "... It means you add on".

Hy kon sê dit gee 'n totaal van ses boeke. Soortgelyk, as jy twee boeke het, en sit vier by, lewer dit ook ses.

O: "And the card?"

J: "It's the same!"

O: "It's the same principle, it's just larger numbers!"

Hierdie was die enigste begeleidende aktiwiteit wat nodig was.

4.5.3

Aan al die leerlinge wat "ja" gesê het op die vraag "is $386 + 549 = 549 + 386$ ", met die uitsondering van een projekteerling, is gevra hoekom hulle so sê. Tabel 4.5.3 gee 'n uiteensetting van hierdie response.

	Nie-projek	Projek
"Dis dieselfde getalle wat jy bymekaartel; dis net omgeruil"	6	2
"Dit geld vir optelling en vermenigvuldiging"	2	
Verduidelik self met klein(er) getalle	5	
Verduidelik met 'n konkrete voorbeeld	2	1
Totaal	15	3

Tabel 4.5.3

Uit tabelle 4.5.2 en 4.5.3 blyk dit dat daar by feitlik al die leerlinge 'n eksplisiete kennis van hierdie eienskap bestaan. Die feit dat agt leerlinge op die "hoekom"-vraag geantwoord het: "Dis dieselfde getalle wat jy bymekaartel, dis net omgeruil", beteken nie noodwendig dat hulle nie kan veralgemeen nie (verwys na paragraaf 3.3 waar die betekenis van die begrip "veralgemening" omskryf is). Die res van die leerlinge van tabel 4.5.3 is beslis (volgens 3.3) in staat om te veralgemeen, en agt is selfs in staat om (spontaan) die eienskap te verklaar: vyf deur van kleiner getalle (dit wil sê spesiale gevalle) gebruik te maak, en drie deur te konkretiseer.

4.5.4 Hier volg enkele aanhalings met onderhoude om al bogenoemde toe te lig:

Marie (nie-projekleerling)

M: (Lees vanaf die kaartjie): "Sal $386 + 549$ en $549 + 386$ dieselfde antwoord lewer? ... Ja".

O: "Sal dit?"

M: Knik haar kop.

O: "Doodseker?"

M: "Ja".

O: "Hoekom?"

M: "Want 386 plus daai 386 daar onder aan is dieselfde, en dan is daar nog 549 en daai 549 is dieselfde, en as jy dit omdraai, dan bly dit dieselfde antwoord."

Sy het dus reeds getoon dat sy oor 'n eksplisiete kennis ten opsigte van hierdie eienskap beskik. Die onderhoudvoerder is nou bloot besig om by haar 'n verklaring vir hierdie eienskap te soek:

O: "Hoekom bly dit dieselfde?"

M: "Want 6 plus 9 is 15 en 9 plus 6 is 15 ". (Sy tel die ene van 386 en 549 bymekaar)

O: "En nog verder?"

M: "En ... 8 plus ... 8 plus 4 is 12 , en 4 plus 8 is 12 ".

Marie se respons is in tabel 4.5.3 aangeteken as een van die vyf in die kategorie: "verduidelik self met klein(er) getalle".

Susan (nie-projekleerling) verduidelik die bestaan van die eienskap met 'n konkrete voorbeeld. Sy bied dus eintlik 'n verklaring aan deur te konkretiseer:

S: (Lees vanaf die kaartjie): "Sal $386 + 549$ en $549 + 386$ dieselfde antwoord lewer? ... Ja".

O: "Hoekom?"

S: "... want ... hmm ... want dit maak nie saak watse een jy eerste optel nie, of jy nou daai een eerste optel of daai een nie, dis dieselfde.

Susan openbaar ook reeds eksplisiete kennis. Die onderhoudvoerder gaan verder op soek na 'n verklaring.

O: "Hoekom is dit so?"

S: "... want sê nou jy gaan dorp toe, en jy ... en jy koop 386 appels, en jy koop eers die ander goeters wat jy wil koop en dan onthou jy jy wil nog appels koop. Dan koop jy 549. Dit gaan dieselfde wees as jy eers 549 koop en dan ...

O: "Goed, ek verstaan wat jy vir my sê."

Susan se respons is in tabel 4.5.3 aangeteken as een van die twee in die kategorie: "verduidelik met 'n konkrete voorbeeld".

Marianne is een van die vyf projekleerlinge vir wie gevra is of $a + b = b + a$.

M: Sy lees van die kaartjie: "As a en b enige getalle voorstel, sal a plus b is gelyk aan b plus a ? ... Meneer, sê daar was nou twee getalle en jy plus nou daarmee, dan sal dit mos 'n antwoord gee ..."

O: "Hoe bedoel jy nou?"

M: "Want daarso is 'n getal en kry jy ..."

O: "Wag nou, waar is 'n getal?"

- M: "Maak nie saak nie, enige getal, en dan draai jy hom daarso om en dan jy draai jy hom net weer om".
- O: "En dink jy dit gaan verskillende antwoorde gee?"
- M: "Dit gaan dieselfde antwoord gee ... want daar a en b is ... sê hier is 15 en 20 en nou ruil jy dit net om dan is dit 20 plus 15."
- O: "En dit gaan dieselfde wees?"
- M: "Ja."

4.6 ALGEMENE HERRANGSKIKKINGSBEGINSEL: SLEGS OPTELLING

4.6.1 Die vraag wat oor hierdie beginsel gevra is, is:

Bepaal die waarde van: $37 + 88 + 23 + 12$.

Die onderhoudvoerder het dadelik, nadat die leerling die kaartjie ontvang het en die vraag gelees het, gesê dat die leerling nie werklik die antwoord hoef te bereken nie, maar bloot moet verduidelik hoe hy dit sou doen. Opmerklik hier was die algemene neiging by die nie-projekleerlinge om die vier getalle onder mekaar te wil skryf voordat hulle die berekening doen. As hulle dit wou doen, het die onderhoudvoerder gesê hulle moet die antwoord hoofreken bepaal. Daarenteen het nie een projekleerling gesê hy sal die getalle neerskryf nie, en het dadelik sy metode van berekening verduidelik, dit wil sê, hulle doen die berekening spontaan deur hoofreken.

4.6.2 Die verskillende metodes wat leerlinge beskryf het waarvolgens hulle die berekening sou doen, word in tabel 4.6.2 aangetoon.

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Tel tiene en ene apart, in volgorde op kaartjie	9	52,9	5	71,4
Tel tiene ene ene apart, nie in volgorde op kaartjie, en nie vir maklike kombinasies	1	5,9		
Tel tiene en ene apart, vir maklike kombinasies	2	11,8	1	14,2
Tel volle getalle bymekaar, in volgorde op kaartjie	1	5,9		
Tel volle getalle bymekaar, groepeer, nie maklike kombinasies	3	17,6		
Tel volle getalle bymekaar, groepeer, maklike kombinasies			1	14,2
Ander metode	1	5,9		
Totaal	17	100	7	100

Tabel 4.6.2

Opmerkings oor tabel 4.6.2:

- Die eerste drie kategorieë in die tabel word verskillend deur projekte en nie-projekleerlinge hanteer, naamlik: nie-projekleerlinge het normaalweg eers die ene, bv. "7 plus 8 is 15, plus 3 is 18, plus 2 is 20. Dra die 2 oor". Dan tel hulle die tiene as "3 plus 8 is 11, plus 2 is 13, plus 1 is 14, plus die 2 wat oorgedra is dis 16. Die antwoord is 160". Projekleerlinge tel eers die "tiene", bv. "30 plus 80 is 110, plus 20 is 130, plus 10 is 140". Dan tel hulle die "ene", bv. "7 plus 8 is 15, plus 3 is 18, plus 2 is 20. 140 plus 20 is 160".

- Hier volg 'n uittreksel uit 'n onderhoud om die kategorie "tel tiene en ene apart, vir makliker kombinasies" toe te lig:

Gesina (nie-projekleerling)

G: "Jy kan probeer om al die getalle in tiene te maak, sê nou al die ene-getalle 'n tien maak, byvoorbeeld 7 plus 3 is 10, en 8 plus 2 is ook 10. Dan het jy al 20 en dan 20 plus 10" (sy bedoel die 10 van 12) "is 30 plus 20 is 50, plus 80 is 130, plus 30 is 160".

Hier volg 'n uittreksel uit 'n onderhoud om die kategorie "tel volle getalle bymekaar, groepeer, nie maklike kombinasies" toe te lig:

Susan (nie-projekleerling)

O: "Hoe sal jy die waarde bereken?"

S: "Almal bymekaartel."

O: "Hoe gaan jy almal bymekaartel?"

S: "Onder mekaar skryf."

O: "En as ek nou vir jou sê jy mag dit nie skryf nie, jy moet dit hoofreken doen?"

S: "Ek gaan daai twee bymekaartel, dan gaan ek daai twee bymekaar tel."

O: "So jy gaan die 37 en die 88 bymekaartel, en sy antwoord kry, en 23 en 12 bymekaartel, sy antwoord kry, en daai twee antwoorde bymekaartel?"

S: "Ja."

Hier volg 'n uittreksel uit 'n onderhoud om die kategorie "tel volle getalle bymekaar, groepeer, maklike kombinasies" toe te lig:

Sarel (projekleerling)

S: (Lees vraag vanaf kaartjie): "Bepaal die waarde van $37 + 88 + 23 + 12$. Ek sou sê 37 plus 23 is 60 ..."

O: "... Jy sien dit dadelik raak?"

S: "Ja ... en 88 plus 12 is 100."

Die volgende uittreksel uit 'n onderhoud illustreer die kategorie: "ander metode":

Josef (nie-projekleerling):

J: (Lees vanaf die kaartjie): "Bepaal die waarde van $37 + 88 + 23 + 12$."

O: "Jy hoef dit nie uit te werk nie, vertel net vir my hoe sou jy dit doen."

J: "Ek sou sê daardie 37 plus 8 is 45 en 45 plus 80 is 125, plus daardie 3 is 128, plus daardie 20 is 148, plus daardie 2 is 150, plus daardie 10 is 160."

Die res van die onderhoud oor hierdie vraag is tipies soos die meeste onderhoude verloop het (sien paragrawe 4.6.3 tot 4.6.6).

O: "Dink jy 'n mens kan daardie getalle in 'n ander volgorde optel? Kan jy byvoorbeeld begin met die 88, dan die 23 ..."

J: "Ja."

O: "Dink jy ek kon twee getalle bymekaarsit, byvoorbeeld die 37 en 88, en uitwerk wat kry ek as ek hulle bymekaartel, en dan weer die 23 en die 12 apart bymekaarsit, kyk wat kry ek as ek hulle weer optel, en dan hierdie twee antwoorde optel?"

J: "Ja, jy kan."

O: "Dink jy ek kan ander kombinasies maak, behalwe die 37 en die 88 bymekaar, dink jy ek kan die 37 en die 12 bymekaarsit?"

J: "Ja."

O: "As jy dan só mag maak, as jy enige twee-twee getalle bymekaar mag sit, watter twee getalle sou jy bymekaar sit?"

J: "Ek sal daardie twee, die 37 en die 23, en die 88 en die 12."

O: "Hoekom?"

J: "Want daardie twee maak 'n ronde getal ..."

O: "Die 88"

J: "Die 88 en die 12."

4.6.3

Aan sommige van die leerlinge wat in die eerste drie kategorieë in tabel 4.6.2 val ("tel tiene en ene apart"), is gevra of hulle van mening is dat 'n mens die volgorde van die tiene en ene mag omruil, byvoorbeeld in plaas van die ene te tel as 7 plus 8 plus 3 plus 2, dit ook te tel as 3 plus 8 plus 2 plus 7, ens.

Tabel 4.6.3 toon die leerlingrespons op hierdie vraag:

	Nie-projek	Projek
Ja	9	4
Nee	0	0
Totaal	9	4

Tabel 4.6.3

4.6.4

Vervolgens is die vraag aan die meeste leerlinge gevra: "Mag die volgorde van die getalle self verander word, byvoorbeeld $37 + 12 + 23 + 88$?"

Tabel 4.6.4 toon die leerlingrespons op hierdie vraag.

	Nie-projek	Projek
Ja	9	5
Nee	0	0
Totaal	9	5

Tabel 4.6.4

- 4.6.5 Hierna is die vraag aan die meeste leerlinge gestel: "Mag die getalle twee-twee bymekaar gegroeper word, die pare se som apart bereken word, en hierdie twee somme bymekaargetel word?" Tabel 4.6.5 toon die leerling-respons hieroor.

	Nie-projek	Projek
Ja	11	4
Nee	0	0
Totaal	11	4

Tabel 4.6.5

- 4.6.6 Feitlik al die leerlinge aan wie die vraag by 4.6.5 gestel is, is vervolgens gevra hoe hulle dan die groepering sou maak. Die onderhoudvoerder wou vasstel met watter mate van gemak hulle groepeer vir maklike kombinasies, dit wil sê (88 + 12) en (37 + 23). Tabel 4.6.6 toon in watter mate die leerlinge die maklike kombinasie raakgesien en benut het nadat die vraag gevra is:

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Sien dadelik/gou raak	7	70	4	100
Sien nie gou/glad nie raak	3	30		
Totaal	10	100	4	100

Tabel 4.6.6

Hier volg uittreksels uit onderhoude om tabel 4.6.6 toe te lig:

Die uittreksel uit die onderhoud met Josef (verwys na paragraaf 4.6.2) is 'n tipiese geval van waar 'n leerling dadelik of gou 'n maklike kombinasie raaksien.

Daarenteen, vind Johan (nie-projekleerling) dit nie so maklik om dit in te sien nie. (Die uittreksel begin net nadat Johan die vraag op die kaartjie gelees het: "Bepaal die waarde van $37 + 88 + 23 + 12$ "):

O: "Ek wil by jou weet hoe sou jy dit uitwerk."

J: "Jy sal dit bymekaartel."

O: "Hoe sal jy dit bymekaartel?"

J: "37 plus 88 plus 23 plus 12."

O: "Goed, hoe gaan jy dit bymekaartel, hoe gaan jy dit uitwerk?"

J: "Ek gaan dit onder mekaar skryf."

O: "En as ek nou vir jou sê jy moet dit hoofreken doen ... watse plan gaan jy dan maak?"

J: "Dan moet jy dit in jou kop uitwerk."

O: "Verduidelik vir my: hoe gaan jy maak?"

J: "Jy sê dan ... ek vat altyd die hoogste getal, dan vat ek hom laer, dan plus ek dit."

O: "So jy gaan begin by die 88, dan die 37 ..."

J: "... dan die 23 dan die 12."

O: "Mag 'n mens dit doen ... mag jy nou sommer daai getalle deurmekaar maak?"

J: "Ja."

O: "Hoekom?"

J: "Want dit is plus, en by plus en maal mag jy getalle omruil."

O: "Nou as jy dan nou begin by 88, en dan 37 en dan 23 en dan 12, hoe gaan jy nou die ding vir jou uitwerk?"

J: "... ek sal sê 88 en die 37 en dit gee vir jou ..." (dink lank).

- O: "Ons gaan dit nou nie uitwerk nie. Jy gaan nou 'n antwoord kry vir die 88 plus die 37. Wat gaan jy dan daarna maak?"
- J: "Dan gaan jy die 23 en die 12 bymekaartel, en dan tel jy die hele lot bymekaar."
- O: "Dis nou interessant. So jy sê 'n mens kan hulle soort van twee-twee bymekaar sit en dan daai tweetjies elkeen op hul eie optel."
- J: "Ja."
- O: "Heeltemal reg. Nou as 'n mens die getalle nou so kan deurmekaarmaak, dink jy nie, as 'n mens nou die getalle so twee-twee bymekaarsit dat van hulle nou ... gemaklik gaan bymekaar pas nie? Ek bedoel, as jy twee van hulle bymekaarsit, dat hulle vir jou lekker ronde getalle gee?"
- J: "Jy kan dit ook doen."
- O: "Wat gaan jy dan maak?"
- J: "Jy sê 88 plus 23 en dan 37 plus 12."
- O: "Goed, gaan dit vir jou lekker ronde getalle gee?"
- J: "Die 37 plus 12 gaan nie, en die ... die ander ook nie ... die een gaan 101 wees ..."
- O: "Die 88 plus die 23?"
- J: "... en dié gaan ... eh..."
- O: "Hy gaan in elk geval eindig op 'n 9."
- J: "Ja ... 49."
- O: "Goed, is daar 'n ander kombinasie wat jy kan probeer?"
- J: "Jy kan 37 plus 23, en 12 plus 88."
- O: "Gaan dit makliker werk .. gaan dit meer ronde getalle vir jou gee?"
- J: "... ja."
- O: "Wat sien jy sommer as jy na hulle kyk?"
- J: "Jy moet daai ... daai 2 plus 8 gee vir jou ..."
- O: "Die 2 en die 8 gee vir jou lekker ronde getalle - dit eindig op 'n 0,, en die 37 en 23?"

- J: "Hy ... hy gaan agt-en ... nee ..."
- O: "Waarop gaan hy eindig?"
- J: "Hy gaan op 'n 9 eindig."
- O: "Is jy seker? 'n 7 en 'n 3?"
- J: "... o, ja ..."
- O: "Hy gaan eindig op 'n 0 ... ons gaan nou nie kyk wat hy is nie."

4.6.8 Gevolgtrekking

Die doel met die insluiting van hierdie vraag was om vas te stel wat die vlak van begrip by leerlinge ten opsigte van hierdie herrangskikkingsbeginsel is.

Na bestudering van die navorsingsresultate, is daar min twyfel dat leerlinge (beide projek en nie-projek) enigsins aan die geldigheid van hierdie eienskap twyfel. Daar kan met 'n redelike mate van sekerheid gesê word dat leerlinge se kennis oor hierdie getaleienskap eksplisiet is.

4.7 ALGEMENE HERRANGSKIKKINGSBEGINSEL: OPTELLING EN AFTREKKING

4.7.1 Die vraag wat hieroor gevra is, is:

Bereken $80 + 9 - 50 - 3$

Net soos in die geval van 4.6 (die herrangskikkingsbeginsel vir slegs optelling) is nie van leerlinge verwag om die berekening self uit te voer nie, maar eerder om te beskryf hoe hulle die berekening sou uitvoer.

4.7.2 Die verskillende metodes waarvolgens leerlinge die berekening uitgevoer het, of die metode wat hulle beskryf het waarvolgens hulle die berekening sou doen, word in tabel 4.7.2 aangetoon.

	Nie-projek	Projek
(80+9) - (50+3), d.w.s. 89 - 53	5	6
In die volgorde soos op die kaartjie	6	2
(80-50) + (9 - 3), d.w.s. 30 + 6	2	0
(80-50) + 9-3, d.w.s. 30+9-3, d.w.s. 39-3	1	4
Spontaan verskeie van bostaande	3	4
(80+9)-(50-3), d.w.s. 89 - 47	2	1
Totaal	19	17

Tabel 4.7.2

4.7.3

Aan 10 leerlinge (7 nie-projek en 3 projek) wat in die eerste kategorie van tabel 4.7.2 val, dit wil sê wat die berekening as volg beskryf of uitgevoer het: $89 - 53$, is gevra of hulle nie dink dat $89 - 47$ eerder korrek is nie. Die leerlingresponse hierop was as volg:

- (a) 3 nie-projekleerlinge het by die berekening gebly ($89 - 53$) sonder om enigsins die antwoord te bereken.
- (b) 2 projekteerlinge het by die berekening gebly ($89 - 53$) sonder om enigsins die antwoord te bereken.
- (c) 3 nie-projekleerling het by die berekening gebly ($89 - 53$) nadat hulle die antwoord bereken het.
- (d) 1 nie-projekleerling het van berekening verander ($89 - 47$) sonder om die antwoord te bereken.
- (e) 1 projekteerling het van berekening verander ($89 - 47$) sonder om die antwoord te bereken.

Bostaande inligting word in tabel 4.7.3 saamgevat:

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Bly by 89-53: ■ sonder om antwoord te bereken	3	42,9	2	66,7
■ nadat antwoord bereken is	3	42,9		
Verander na 89-47 sonder om antwoord te bereken	1	14,2	1	33,3
Totaal	7	100	3	100

Tabel 4.7.3

Die volgende uittreksels uit die onderhoude illustreer die inligting in tabel 4.7.3:

Paul (projekleerling) is heeltemal oortuig dat hy 53 van 89 moet aftrek, en laat hom nie van stryk bring deur die onderhoudvoerder se voorstel om 47 af te trek nie. (Die uittreksel begin onmiddellik nadat hy die vraag op die kaartjie gelees het, dit wil sê "Bereken $80 + 9 - 50 - 3$ "):

O: "Verduidelik vir my hoe sal jy dit doen."

P: "Wel, ek sal eers hierdie twee getalle bymekaartel ..."

O: "... die 50 en die 3?"

P: "Ja."

O: "Maar hoekom wil jy die getalle bymekaartel want dis dan minus 50 en minus 3 ..."

- P: "Anders moet jy twee keer aftrek, en as jy dit bymekaartel, kry jy 'n groter getal wat jy een keer moet aftrek."
- O: "Goed, en wat gee dit dan vir jou ... die getal wat jy nou gaan aftrek?"
- P: "Dis 53, en dan ... 'n mens kan ook eers die 9 by die 80 tel en dit dan alles aftrek ... 80 minus 53 gee jou 27, dan tel ek die 9 by."
- O: "Jy het nou gesê 89 minus 53, is jy seker dit moet nie wees: 89 - 47 nie?"
- P: "Want kyk, as jy sê ... hier is 50, jy moet dit aftrek. Nou as jy die 3 van die 50 gaan aftrek, kry jy 47. Maar as jy 47 aftrek, dan kan dit nie, want hier staan klaar jy moet 50 aftrek, en dan moet jy 3 nog aftrek."
- O: "So dis definitief 53 wat jy moet aftrek?"
- P: "Ja."

Gesina (nie-projekleerling) bereken eers die antwoord voor sy met sekerheid kan sê of $89 - 53$ die korrekte bewerking is:

- G: (Lees vanaf kaartjie): "Bereken $80 + 9 - 50 - 3$."
- O: "Jy hoef dit nie uit te werk nie ... vertel my hoe jy dit sou doen."
- G: "... hmmm ... jy kan dalk dít optel ... 80 plus 9 ... en 50 plus 3, en toe sê ek 89 minus 53."
- O: "Hoekom het jy die 3 by die 50 getel ... dit sê dan daar minus 3?"
- G: "Want 'n mens moet altyd eers die plus en die vermenigvuldiging, en dan kan jy die ... ek weet nie eintlik hoekom nie, maar dan kan jy die minus en die gedeel deur doen ..." (Sy verwys na 'n bewerkingsvolgorde soos wat sy dit onthou.)
- O: "Jy het gesê van die 89 moet jy aftrek 53, met ander woorde jy het die 3 bygetel by die 50. Maar eintlik staan daar dan minus 3. Moet ek nie eintlik dan 47 aftrek van die 89 nie?"
- G: "... ja, mens moet ... ja ... dit maak ... ek is nie seker of dit 'n verskil maak nie."
- O: "Ek dink dit behoort 'n verskil te maak."

- G: "Ja, dit maak 'n verskil, maar ehm ... by vorige somme kon 'n mens dit doen, maar hier sal dit nie uitwerk nie, omdat hierso ... 89 minus 50 is ... 39 en 39 minus 3 is 37."
- O: "Dink gou weer: 39 minus 3?"
- G: "39 minus 3 ... is 36. 89 minus 53 is ... ook 36."
- O: "Goed, so as jy 53 van 89 aftrek kry jy ook dieselfde antwoord."

(Band stop hier)

Rina (nie-projekleerling) trap in die slagyster: sy verander haar bewerking van $89 - 53$ na $89 - 47$. (Die uittreksel begin nadat sy die vraag op die kaartjie gelees het):

- O: "Nee, jy hoef nie te skryf nie ... verduidelik net vir my hoe sou jy dit bereken."
- R: " $80 + 9$ is 89 en 50 minus 3, en dis 46."
- O: "So jy het met ander woorde 89 gevat toe trek jy van 89 53 af?"

Die onderhoudvoerder het aanvaar dat sy 'n berekeningsfout gemaak het met $89 - 53$, en 46 gekry het in plaas van 36.

- O: "Dink jy nie 'n mens moet van 89 47 aftrek nie?"
- R: "Ja, jy moet 47 aftrek."
- O: "Eerder 47 as 53?"
- R: "Ek sal liewers ... altwee gaan ... jy kan maar altwee ..."
- O: "Gaan jy by dieselfde antwoord uitkom?"
- R: "Nee jy sal nie dieselfde antwoord ..."
- O: "As ek 89 het en ek vat 53 weg, of as ek 89 het en ek vat 47 weg, dan is dit mos nie dieselfde nie?"
- R: " $47 ... 89$ minus 47 is reg."
- O: "Is hy reg?"

4.7.4 Aan leerlinge wat in die tweede, derde en vierde kategorie van tabel 4.7.2 val, dit wil sê leerlinge wat die berekening as volg beskryf of uitgevoer het:

"in volgorde soos op kaartjie", of

" $(80 - 50) + (9 - 3)$, dit wil sê $30 + 6$ ", of

" $(80 - 50) + 9 - 3$, d.w.s. $30 + 9 - 3$, d.w.s $39 - 3$ ",

is die volgende vraag gestel:

"Kan 'n mens die berekening ook op een van die volgende maniere doen:

$89 - 53$ of $89 - 47$?"

Tabel 4.7.4 toon die leerlingrespons op hierdie vraag:

		Nie-projek		Projek	
		Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Kies 89-53:	▪ sonder om antwoord te bereken	4	80	3	75
	▪ nadat antwoord bereken is			1	25
Kies 89-47	sonder om antwoord te bereken	1	20		
Totaal		5	100	4	100

Tabel 4.7.4

Onderstaande aanhaling uit 'n onderhoud illustreer tabel 4.7.4.

Stefan (nie-projekleerling) maak sy keuse sonder om die antwoord te bereken.

O: "Vertel gou vir my hoe sou jy hom gedoen het."

S: "... hmmm ... ek sou ... 80 plus 9 ... en dan kom ek by die antwoord uit, daai antwoord minus 50 en daarvan minus 3."

O: "Goed ... dink jy ek kon ook maar die som só gedoen het: dink jy ek kon gesê het dis 89 minus 50 en dan netnou nog minus 3?"

S: "Ja."

O: "Dink jy ek kan ook die som só gedoen het: 89 minus 53?"

S: "Ja."

O: "Dink jy ek kan ook die som só gedoen het: 89 minus 47?"

S: "Nee."

O: "Goed ... so jy sê dit moet wees 89 minus 53?"

S: "Ja, want anders is daar ses verskil ... dan kry jy meer."

O: "Waar's die ses verskil?"

S: "Tussen 47 en 53."

O: "Maar jy is oortuig dit moet 89 minus 53 ... dat dit vir jou die regte antwoord gee?"

S: "As dit 47 is, gaan jy te min aftrek."

4.7.5

Onder die leerlinge van tabel 4.7.2 se eerste vier kategorieë (dit wil sê die leerlinge na wie in paragrawe 4.7.3 en 4.7.4 verwys word), was daar leerlinge wie se response nie in tabelle 4.7.3 of 4.7.4 opgeneem kon word nie. Die rede hiervoor is dat hulle nóg 89 - 53, nóg 89 - 47 as bewerking gekies het, maar beweer het dat ALBEI bewerkings korrek is, of dat hulle ONSEKER is watter een korrek is.

Hierdie inligting word in tabel 4.7.5 aangetoon:

	Nie-projek	Projek
Albei bewerkings korrek Onseker	2	2 1
Totaal	2	3

Tabel 4.7.5

Dalene (projekleerling) is van mening dat albei bewerkings korrek is.

O: "Jy hoef nie vir my te sê wat die antwoord is nie, ek wil hê jy moet vir my sê hoe sou jy daai probleem doen."

D: "Ek sou 89 minus 53."

O: "Goed stop gou. So jy sou die 50 en die 3 bymekaar tel. Daar staan dan 50 minus 3; moet ek nie die 3 aftrek van die 50 nie en dan 47 kry nie?"

D: "... Ja."

O: "So moet ek sê 89 - 47 ...?"

D: "47."

O: "Of dink jy jy was tog reg toe jy gesê het 89 minus 53?"

D: "Dis dieselfde."

O: "Gaan dit dieselfde antwoord gee? As ek 89 minus 53 en ek het 89 minus 47, dan gaan dit mos verskillende antwoord gee? Een is reg en een is verkeerd ... watter een is reg en watter een verkeerd?"

D: "89 minus 47."

O: "Reg? Seker?"

D: "Ja".

Willem (projekleerling) is onseker watter een van die twee bewerkings korrek is.

- O: "Vertel vir my hoe sal jy dit doen."
- W: "Wel, eers die 80 minus 50 is 30, dan sê ek plus 9, dis 39, dan sê ek minus 3."
- O: "En dan gee dit vir jou?"
- W: "... hmmm ... 36."
- O: "Kan 'n mens die som só doen: 89 minus 53?"
- W: "Ja."
- O: "Wat dink jy: kan ek ook sê dit is 89 minus 47? Sien jy waar kry ek die 47 ... die 50 minus 3?"
- W: "Ja."
- O: "Kan ek ook maar sê ek kan dit bereken deur 89 minus 47?"
- W: ".... Nee, ek weet nie."

4.7.6

Aan leerlinge in die eerste twee kategorieë van tabel 4.7.2, dit wil sê " $(98 + 9) - (50 + 3)$ ", dit wil sê $89 - 53$ ", en "in volgorde soos op kaartjie", met ander woorde leerlinge wat nie die getalle herrangskik het nie, is gevra of 'n mens die getalle mag herrangskik, of alternatiewelik die volgorde van die getalle mag verander. Tabel 4.7.6 toon hierdie leerlingresponse.

	Nie-projek	Projek
Ja	8	8
Nee	-	-
Totaal	8	8

Tabel 4.7.6

Hiervolgens blyk dit dat leerlinge daarvan oortuig is dat hulle die getalle mag herrangskik. Dit is belangrik om daarop te let dat benewens die 16 leerlinge in tabel 4.7.6 wat hierdie mening het, die 7 leerlinge in die derde en vierde kategorieë van tabel 4.7.2 dieselfde mening huldig, want dit is presies wat hulle in hul berekening doen: hulle herrangskik.

4.7.7

Van die leerlinge wat in paragraaf 4.7.6 genoem word, dit wil sê leerlinge aan wie gevra is of die getalle herrangskik kan word, is gevra om te sê watter van die volgende standpunte hulle huldig:

- A. Wanneer herrangskikking plaasvind, bly die tekens (+ en -) in hulle huidige posisies, terwyl slegs die getalle van posisie verander.

OF

- B. Wanneer herrangskikking plaasvind, skuif die getal sowel as die teken voor die getal na 'n ander posisie toe.

Tabel 4.7.7 toon die leerlingresponse hierop.

	Nie-projek		Projek	
	Aantal leerlinge	% van totaal	Aantal leerlinge	% van totaal
Standpunt A	1	25		
Standpunt B	3	75	7	100
Totaal	4	100	7	100

Tabel 4.7.7

Tabel 4.7.7 word aangevul deur die volgende aanhalings uit onderhoude:

Rozanne (projekleerling)

O: "Do you think one could also change the numbers around as we did with the previous one?"

R: "You can change the numbers around."

O: "Do you think one can do it like this: 80 plus 50 minus 9 minus 3?"

- R: "No you can't."
O: "Why not?"
R: "Cause you minus the 50, not the 9."
O: "So you say we must minus the 50."
R: "Yes."
O: "Why?"
R: "Because it says"
O: "It says: minus 50. And the 9?"
R: "You must plus the 9."
O: "So what you are telling me is that that sign in front of the number tells you what to do with that number? That you must move the sign along with the number."
R: "Yes."

Johan (nie-projekleerling)

- O: "Goed, wat sê jy van hom?"
J: "Jy moet daai twee in hakies sit ..."
O: "Die 80 en die 9?"
J: "Ja, en daai twee kan jy in hakies sit, en dan kan jy die twee plus."
O: "O ek sien, jy kan dan sê: 80 plus 9 bymekaar in hakies, minus, en dan sit ek nou 'n hakie, 50 ..."
J: "... plus 3."
O: "Plus 3."
J: "En dan nog 'n hakie."
O: "Dis nou interessant. Hoekom word daai minus 3 nou skielik 'n plus 3?"
J: "Want jy tel daai op ... dis 89, en dan maak jy hom in hakies, en dan is dit makliker om af te trek as daai twee bymekaar is."
O: "Goed, so jy sê jy gaan nou aftrek van 89, 53. Maar moet jy nie 47 aftrek van 89 nie?"

- J: "... Nee."
- O: "Nie? Dit is dan 50 minus 3 ... dit gee dan 47?"
- J: "... Hulle bedoel jy moet daai bymekaartel" (hy verwys na die 80 en 9) "en dan die 50 aftrek, en nog 3 aftrek van daai."
- O: "Dink jy 'n mens kan dit 'n bietjie anders gedoen het? Jy het netnou gesê 'n mens kan maar die getalle verander - daar op die vorige kaartjie het jy gesê 'n mens kan maar die getalle 'n bietjie deurmekaar maak."
- J: "Jy kan die 9 voor die 80 sit ..."
- O: "... jy kan die 80 en die 9 omruil?"
- J: "Ja, en jy kan die 50 en die 3 omruil."
- O: "Dan kan jy sê dis minus 3 minus 50. Goed, kan ek nog iets omruil? Dink jy ek kan die 9 en die 50 omruil?"
- J: "Nee, want dan gaan dit 'n ander antwoord gee."
- O: "As ek nou reg verstaan, dan bedoel jy: as ek die 9 en die 50 wil omruil, dat dit dan gaan wees 80 plus 50 minus 9 ... is dit wat jy bedoel?"
- J: "Nee ... jy kan nie, want 9 ... ja, jy kan, want kyk hierso, daai plus jy mos en dan trek jy dit van mekaar af ... die 9 en die 50 gaan omruil, dan plus jy die 50 en die 80, en die 9 en die 3, en dan trek jy dit vanmekaar af."

Hy verander later van gedagte toe die onderhoudvoerder hom 'n keuse laat maak.

- O: "So jy wil hê dit moet wees 80 plus 50 minus 9 minus 3?"
- J: "Ja."
- O: "Of kan dit ook wees 80 minus 50 plus 9 minus 3?"
- J: "Ja, dit sal dieselfde antwoord gee"
- O: "Dieselfde antwoord as wat?"
- J: "As op die kaartjie."

- 4.7.7 Leerlinge wat nie gemaklik was met die bewerking $89 - 53$ nie, dit wil sê leerlinge wat van mening as dat $89 - 47$ die korrekte bewerking is, of van mening was dat dit albei kon wees, of onseker was oor watter een dit moet wees, het 'n begeleidende aktiwiteit ontvang.

Die volgende uittreksel uit 'n onderhoud illustreer hierdie aktiwiteit:

Willem (projekleerling):

- O: "Daai probleem is maar baie dieselfde as om te sê ek het 89 skape; toe verkoop ek 50, met ander woorde ek moet 50 aftrek. En toe trek ek weer 3 af, met ander woorde ek gee toe 3 weg. Dis presies dieselfde as daai vorige som waaroor ons gesels het waar ek kan sê dat dit wat ek weggee, dit wat weggaan, kan ek eers bymekaartel, met ander woorde, die 50 wat weggaan, en die 3 wat weggaan, kan ek eers bymekaartel, en sê dit is 53 wat weggaan, en dis hoekom dit is: minus 53."

- 4.7.8 Van die leerlinge wat van mening was dat $89 - 53$ die korrekte berekening is, en van diegene wat 'n begeleidende aktiwiteit ontvang het (sien paragraaf 4.7.7) is gevra of hulle die beginsel hier ter sprake al tevore in die huidige onderhoud teëgekom het, en indien wel, waar. Die verlangde respons is dat hulle sou sê ja, en in die geval van vraag C van die onderhoud: "Sal $523 - (128 + 395)$ en $523 - 128 - 395$ dieselfde antwoord gee?"

Al 10 leerlinge (5 nie-projek en 5 projek) aan wie hierdie vraag gestel is, het die verlangde respons gelever.

Johan (nie-projekleerling) lewer 'n tipiese respons:

- O: "Jy is heeltemal seker as ek 50 moet aftrek, en ek moet nog 3 aftrek, is dit maar dieselfde om dit wat ek moet aftrek, bymekaar te tel, en dit dan nou in een af te trek? Met ander woorde, dis waar jy nou kom aan die 53?"
- J: (knik instemmend).

- O: "Klink dit vir jou bekend? Dink jy ons het dieselfde tipe vraag op 'n kaartjie gehad? Twee getalle wat ek aftrek wat ek maar eers kan bymekaartel en dan aftrek ... klink dit bekend?"
- J: (knik instemmend).
- O: "Kan jy kyk watter kaartjie dit was?"
- J: Haal 'n kaartjie uit tussen die orige vyf kaartjies.
- O: "Daai een?" (lees): "523 - (128 + 395). Ja, dis heeltemal reg."

4.8 VRAELYS OOR DIE DISTRIBUTIEWE EIENSKAP

- 4.8.1 In 3.5 is reeds volledig verslag gedoen oor die doel van hierdie vraelys, sowel as die prosedure wat gevolg is met die voltooiing daarvan.

Volledigheidshalwe word die vraelys hier herhaal:

1. Bereken $344 + 532$
2. Sal die volgende twee berekeninge verskillende antwoorde of dieselfde antwoord lewer? Gee 'n rede vir jou antwoord.

 37×876 en $37 \times 344 + 37 \times 532$
3. Sal die volgende twee berekeninge verskillende antwoorde of dieselfde antwoord lewer? Gee 'n rede vir jou antwoord.

 58×356 en $58 \times 300 + 58 \times 50 + 58 \times 6$

Die bevindinge ten opsigte van die vraelys word in tabelle 4.8.1(a) tot 4.8.1(d) in die vier skole afsonderlik weergegee, en samevattend vir al vier skole in tabel 4.8.1(e).

- 4.8.2 Bespreking van die bevindinge:

Vir die doeleindes van hierdie studie, word slegs kommentaar gelewer op leerlinge wat op beide vrae 2 en 3 positief gereageer het, dit wil sê wat op albei gesê het die twee bewerkings sal dieselfde antwoord lewer. 'n Fyner

onderskeiding van hierdie leerlinge word gemaak wanneer hulle redes vir hul positiewe response by hierdie twee vrae bestudeer word. Leerlinge wat as rede pertinent aangevoer het dat " $532 + 344 = 876$ "; " $6 + 50 + 300 = 356$ ", of dit geïmpliseer het deur dit woordeliks te beskryf, is in kategorie A op tabelle 4.8.1(a) tot (e) ingedeel. Daarenteen was daar leerlinge wat redes aangevoer het wat niksseggend of onverstaanbaar is, bv.: "Ja, want as mens $37 \times 344 + 37 \times 532 = 37 \times 876$ "; of "Ja, want dit lyk of die getalle ooreen sal stem met dieselfde antwoord (dink ek) en as die getalle dieselfde is op die ou end moet dit dieselfde antwoord hê"; of "Ja, hulle is dieselfde, want elkeen word net 37 groter"; of "Ja, dit gaan dieselfde wees, want $37 \times 344 + 37 \times 532$ is dieselfde as 37×876 ".

Hierdie leerlinge is in kategorie B ingedeel.

In ooreenstemming met 3.3, waar uitgangspunte en terminologie beskryf is, word leerlinge in kategorie A dus beskou as leerlinge wat oor eksplisiete kennis van die distributiewe eienskap beskik. (Hulle reageer positief, en kan 'n aanvaarbare rede verskaf.) Die leerlinge in kategorie B moet egter nie summier buite rekening gelaat word nie, dit is moontlik dat hulle oor die nodige intuïesies beskik om bevestigend te kan reageer, maar nie oor die taal om hierdie intuïesies te beskryf nie.

Die leerlingtal in kategorie A kan dus beskou word as 'n konserwatiewe hoeveelheid van leerlinge wat oor 'n eksplisiete kennis van die distributiewe eienskap beskik.

Wanneer kategorie A op tabel 4.8.1(e) bestudeer word, blyk dit dat 159 uit 240 projekteerlinge, dit wil sê 66,3%, en 110 uit 220 nie-projekteerlinge, dit wil sê 50%, oor eksplisiete kennis ten opsigte van die distributiewe eienskap beskik. Hierdie resultaat skep 'n totaal ander beeld as tabel 4.3.1, deurdadig meer projek- as nie-projekteerlinge in die geheel blyke van eksplisiete kennis openbaar. Die feit dat projekteerlinge 'n hoër telling het as nie-projekteerlinge versterk die vermoede wat telkens in hierdie verslag uitgespreek is, naamlik dat verwag word dat projekteerlinge oor 'n hoër mate van eksplisiete kennis ten opsigte van getaleienskappe beskik.

4.8.3 Leerlinge met wie onderhoude gevoer is:

Soos blyk uit tabel 4.3.1, is aan 35 leerlinge met wie tevore onderhoude gevoer is, die vraag oor die distributiewe eienskap tydens die onderhoud gestel ["Sal $374 \times (136 + 78)$ dieselfde antwoord lewer as $374 \times 136 + 374 \times 78$?"]. Uit dieselfde tabel is dit duidelik dat 7 uit 19 nie-projekleerlinge, dit wil sê 37%, 'n positiewe respons gelever het, en 2 uit 16 projekteerlinge, dit wil sê 13%. Elkeen van hierdie leerlinge kon ook 'n voldoende rede aanvoer vir hulle antwoord (tabel 4.3.2(b) en daar is dus geoordeel dat hulle almal oor 'n eksplisiete kennis ten opsigte van die distributiewe eienskap beskik.

31 van hierdie 35 leerlinge het die vraelys voltooi. Hul resultaat word in tabel 4.8.3 aangetoon (die selkodes verwys na die selle op tabelle 4.8.1(a) tot (e)):

Nie-projek		Projek	
4A	1	1A	2
10A	9	2A	5
12A	6	10A	1
10B	2	5H	1
10H	2	1H	1
12B	1		
Totaal	21	Totaal	10

Tabel 4.8.3

Uit tabel 4.8.3 blyk dit dat 16 uit 21 nie-projekleerlinge, dit wil sê 76% en 8 uit 10 projekteerlinge, dit wil sê 80%, in kategorie A val, dit wil sê hulle het positief gerespondeer op vrae 2 en 3 van die vraelys en het 'n voldoende rede vir hul antwoord gegee. Hulle word dus beskou as leerlinge met 'n eksplisiete kennis ten opsigte van die distributiewe eienskap.

Die mees beduidende aspek van tabel 4.8.3 is waarskynlik die feit dat die leerlinge met wie die onderhoude gevoer is, en wat dus 'n begeleidende aktiwiteit ervaar het, persentasiegewys 'n veel hoër aanduiding gee van eksplisiete kennis ten opsigte van die distributiewe eienskap as die leerlinge met wie nie onderhoude gevoer is nie, dit wil sê die leerlinge van tabelle 4.8.1(a) tot (e). 'n Direkte vergelyking tussen tabelle 4.8.3 en 4.8.1(e) toon aan dat 76% van die nie-projekleerlinge met wie onderhoude gevoer is toon 'n eksplisiete kennis, teenoor 50% van die nie-projekleerlinge met wie nie onderhoude gevoer is nie. Verder blyk dit dat 80% van die projekleerlinge met wie onderhoude gevoer is, eksplisiete kennis toon, teenoor 66,3% van die projekleerlinge met wie nie onderhoude gevoer is nie.

Dit wil dus voorkom asof die begeleidende aktiwiteit wat die leerlinge tydens die onderhoude ervaar het, 'n verskil in hulle bewustheid van die distributiewe eienskap veroorsaak het.

HOOFSTUK 5

GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS

5.1 GEVOLGTREKKINGS

Dit wil uit die bevindinge van hierdie studie voorkom asof die oorgrote meerderheid leerlinge wat hierby betrokke was, oor 'n eksplisiete bewustheid beskik ten opsigte van die kommutatiewe eienskappe van optelling en vermenigvuldiging, en die algemene herrangskikkingsbeginsels, en in 'n mindere mate ten opsigte van gevalle waar 'n minusteken voor hakies voorkom. Verder blyk dit dat, met die uitsondering van minusteken voor hakies, daar nie 'n noemenswaardige verskil in die vlak van bewustheid oor hierdie eienskappe by projek- en nie-projekleerlinge bestaan nie. By die minusteken voor hakiesgeval, is daar 'n aansienlik hoër persentasie projekleerlinge as nie-projekleerlinge wat 'n eksplisiete kennis openbaar (76,5% teenoor 59,1%).

Wat die distributiewe eienskap betref, lyk dit asof by hierdie getaleienskap ook 'n redelike mate van verskil in die vlak van bewustheid by projek- en nie-projekleerlinge bestaan (66,3% teenoor 50,0%).

Leerlinge met wie onderhoude gevoer is, en wat met 'n aktiwiteit soortgelyk aan 'n Socratische gesprek gelei is om die distributiewe eienskap vir hulself te eksplisiteer, het met die voltooiing van die vraelys, ongeveer 10 weke later, 'n veel hoër vlak van bewusheid van hierdie eienskap geopenbaar as leerlinge met wie nie 'n onderhoud gevoer is nie. Dit wil dus lyk asof hierdie intervensie in 'n mate suksesvol was. Dit wil egter nie sê dat daar nie ander metodes is waarvolgens leerlinge tot eksplisiete kennis van hierdie getaleienskap kan kom nie. In 5.2 sal aandag geskenk word aan 'n ander metode.

5.2 AANBEVELINGS VIR DIE WISKUNDE-ONDERRIGPRAKTYK

5.2.1 Die feit dat 66,3% van die projekleerlinge teenoor 50% van die nie-projekleerlinge 'n eksplisiete kennis van die distributiewe eienskap openbaar (vergelyk tabel 4.8.1(e)), bevestig die vermoede wat vroeër in hierdie verslag uitgespreek is. Hierdie vermoede is gebaseer op die feit dat projek-

leerlinge geen ander uitweg het om rekenkundige berekeninge uit te voer nie as om (in elk geval aanvanklik) van hul intuïesies ten opsigte van getaleienskappe gebruik te maak. Daarteenoor is vermoed dat nie-projekleerlinge, wat onderrig ontvang in die benutting van standaard rekenalgoritmes, waarin die onderliggende getaleienskappe erg versluier is, se bewustheid van getaleienskappe nie so hoog sal wees as die projekleerlinge s'n nie.

Die punt wat hier gemaak moet word, is dat, al bestaan by die projekleerlinge 'n hoër mate van bewustheid as by nie-projekleerlinge, dit nog nie hoog genoeg is om die oorgang van rekenkunde na algebra, soos in detail in 2.3 beskryf word, suksesvol te kan maak nie. Dit word toegegee dat enige verskil in bewustheid tussen projek- en nie-projekleerlinge op hierdie stadium 'n toevallige wins is, aangesien daar nie doelbewus daaraan aandag geskenk is nie. Daar sal egter in die praktyk hieraan aandag geskenk moet word in hierdie projekleerlinge se standerd 4 en 5 jaar.

Ook projekleerlinge in laer standerds moet die geleentheid kry om hierdie getaleienskappe vir hulself te eksplisiteer voordat hulle die junior sekondêre fase betree. Van Hiele (1991) oordeel dat die vrae wat in die vraelys (verwys na 3.6) verskyn, op sy tweede niveau, naamlik die beskrywende niveau, van rekenkunde lê. Hy beklemtoon dat dit tyd neem om vanaf die eerste (visuele) niveau na die tweede te beweeg, en daarom beveel die navorser aan dat leerders reeds in die junior primêre fase geleentheid hiertoe gebied word.

Die navorser is van oordeel dat genoemde geleenthede as taakgebaseerde onderrig hanteer kan word. Leerlinge, afhangend van die grootte en tipe getalle waarmee hulle kan werk (bv. kleiner telgetalle, groter telgetalle, gewone breuke, desimale breuke of heelgetalle), kan gekonfronteer word met oefeninge soos:

Bereken; en kontroleer met jou sakrekenaar:

$$2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6 + 2 \times 7; \text{ of}$$

$$28 \times 36 + 28 \times 51 + 28 \times 33 + 28 \times 64 + 28 \times 16; \text{ of}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}; \text{ of}$$

$$2,56 \times 8,12 + 2,56 \times 12,57 + 2,56 \times 9,31; \text{ ens}$$

en soortgelyke oefeninge waar die gemene faktor telkens die tweede getal van die parsieële produk is.

'n Ander tipe aktiwiteit kan die volgende wees:

Sal 7×48 en $7 \times 19 + 7 \times 29$ dieselfde antwoord lewer? Gee 'n rede vir jou antwoord. Kontroleer. Dieselfde vir:

$$25 \times 135 \quad \text{en} \quad 25 \times 98 \quad + \quad 25 \times 37;$$

$$2,81 \times 7,32 \text{ en } 2,81 \times 3,18 + 2,81 \times 4,14; \text{ ens}$$

en soortgelyke oefeninge waar die gemene faktor telkens die tweede getal van die parsieële produk is.

Dieselfde tipe oefening kan vir die verspreiding van vermenigvuldiging oor aftrekking, en vir deling oor optelling en aftrekking gedoen word. Soortgelyk kan ook die feit ingevoer en ontwikkel word dat optelling en aftrekking nie oor vermenigvuldiging en deling versprei nie.

Van kardinale belang is die rol van gesprek en bespreking tydens en na hierdie aktiwiteite. Die idee van vervanging van een uitdrukking deur 'n ekwivalente, maar nuttiger of geriefliker uitdrukking, moet ook deurgaans sterk benadruk word.

5.2.2

In 2.3 word vyf redes aangevoer waarom leerlinge nie die getaleienskappe wat die manipulasies in algebra onderlê met die getaleienskappe wat berekeninge in rekenkunde onderlê, met mekaar in verband kan bring nie, dit wil sê 'n swak beheersing van verband B (verwys na 2.3). Sonder om hierdie redes hier te herhaal, word onderwyspraktisyns aangeraai om deeglik daarvan kennis te neem, en voorkomende en regstellende aksies in die praktyk te onderneem.

- 5.2.3 Die navorser beveel aan dat die huidige wyse van uiteensetting by vermenigvuldiging van eensyfer- met tweesyfergetalle onder projekteerlinge verander word. Tans word 'n probleem soos 3×62 as volg uiteengesit:

$$3 \times 62 = 180 + 6 = 186$$

$$3 \times 60 = 180$$

$$3 \times 2 = 6$$

Die navorser beveel die volgende uiteensettingswyse aan:

$$\begin{aligned} 3 \times 62 &= 3 \times (60 + 2) &&= 3 \times 60 + 3 \times 2 \\ &= 180 + 6 \\ &= 186 \end{aligned}$$

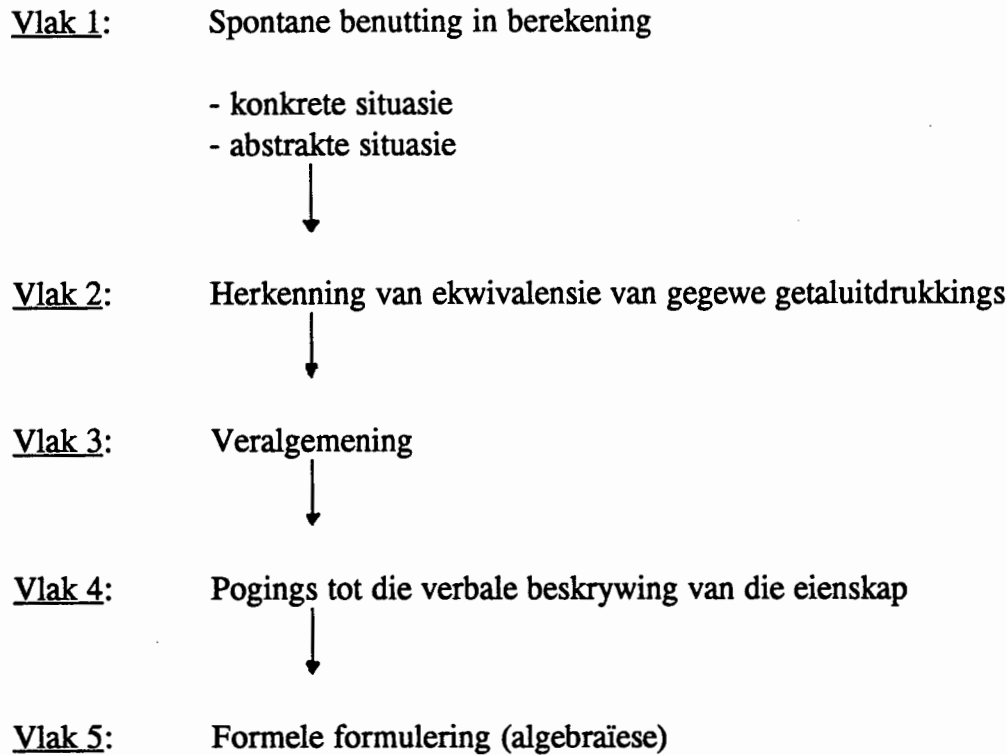
Die struktuur van die tweede, aanbevole uiteensetting sluit, volgens die navorser se mening, steeds volledig by die leerlinge se aanvanklike intuïesies en later gevestigde denkpatroon aan deurdat die 62 "opgebreek" word as $60 + 2$, waarna die 3 met beide die 60 en die 2 vermenigvuldig word. Dit is die navorser se oortuiging dat leerlinge hierdie "uiteensetting" met net soveel gemak as die eersgenoemde een sal kan hanteer. Die voordeel van die tweede "uiteensetting" is dat dit baie meer direk aansluit by die tradisionele formulering van die distributiewe eienskap.

5.3 AANBEVELINGS VIR VERDERE NAVORSING

- 5.3.1 Pogings om ('n) meetinstrument(e) te ontwerp ten einde moontlike verskille in leeruitkomste tussen projek- en nie-projekteerlinge te meet, moet voortgaan sodat die sukses van die projek voortdurend geëvalueer kan word.
- 5.3.2 Die leerlinge wat by hierdie studie betrokke was, kan blootgestel word aan die aktiwiteite soos beskryf in 5.2.1, in 'n poging om hulle intuïtiewe kennis van die distributiewe eienskap te eksplisiteer. Wanneer hulle in standerd 6 of 7 is, kan die vraelyste en toetse, soos aangewend deur van Heerden (1991), van der Merwe (1989), Bester (1989) en Fray (1989) vir hulle aangelê word. Sodoende kan moontlik vasgestel word of hulle manipulatiewe algebra beter beheers as die 1989 en 1991 toetspersone. Dit is 'n langtermynnavorsingsprojek wat onderneem behoort te word.

5.4 'N MODEL VAN VLAKKE VAN BEWUSTHEID

Hier volg 'n model wat die waargenome manifestasies van bewustheid van getaleienskappe, in 'n hiërargiese orde probeer rangskik.



Opmerkings oor bostaande model

Vlak 1: Konkrete situasies verwys na 'n realistiese probleem wat gemodelleer kan word, en waar die aard van die betrokke getaleienskap sodoende na vore tree.

Abstrakte situasies word beskou as hiërargies van 'n hoër orde, omdat dit 'n probleem is wat bloot uit getalle bestaan, en as sodanig nie gemodelleer kan word nie.

Vlakke 1 en 2 se hiërargiese orde is nie altyd so duidelik nie, aangesien verskeie nie-projekleerlinge ekwivalensie van gegewe getaluitdrukkings herken, maar tog nie die betrokke getaleienskap in abstrakte situasies toepas nie.

BRONNELYS

Bester, E.A. (1989). *Die Evaluering van 'n Strategie om die Betekenis en Funksionaliteit van Algebraïese Manipulasies by Standaard 7-leerlinge tuis te bring*. Ongepubliseerde M.Ed.-verhandeling, Universiteit van Stellenbosch.

Bishop, A. (1985). The Social Construction of Meaning - a Significant Development for Mathematics Education? *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 24-27.

Booth, L.R. (1983). *Misconceptions Leading to Error in Elementary Algebra*. Ongepubliseerde Ph.D. Universiteit van Londen.

Booth, Lesley, R. (1981). Strategies and Errors in Generalised Arithmetic. In C. Comiti (Red.) *Proceedings of the Fifth International Congress on mathematical Education*. Grenoble.

Bruner, J.S. (1960). *The Process of Education*. Cambridge: Harvard.

Byers, V. en Herscovics, N. (1977). Understanding School Mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-27.

Collis, K.F. (1969). Concrete Operational and Formal Operational Thinking in Mathematics. *The Australian Mathematics Teacher*, 25(3), 78-84.

Collis, K.F. (1973). A Study of Children's Ability to work with Elementary Mathematical Systems. *Australian Journal of Psychology*, 25(2), 121-130.

Fischbein, E. (1973). Intuition, Structure and Heuristic Methods in the Teaching of Mathematics. In A.G. Howson (Red.). *Developments in Mathematical Education*. Cambridge University Press soos aangehaal deur Volmink (1990).

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-18.

Fischbein, E.; Tirosh, D., Melamed, U. (1979). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? In D. Tall (Red.). *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Warwick.

Fray, E.D. (1989). *Die Evaluering van 'n Strategie om die Betekenis en Funksionaliteit van Algebraïese Manipulasies by Standaard 7-leerlinge tuis te bring*. Ongepubliseerde M.Ed.-verhandeling, Universiteit van Stellenbosch.

Gattegno, C. (1971). *What we owe Children*. New York: D. van Nostrand soos aangehaal deur Volmink (1990).

Ginsberg, H.P.; Kossan, N.E.; Schwartz, R; Swanson, D. (1983). Protocol Methods in Resarch on Mathematical Thinking. In H.P. Ginsberg (Red.) *The Development of Mathematical Thinking*. Florida: Academica Press.

Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic*. New York. D. van Nostrand.

Hart, K.M. (Red.) (1981). *Children's Understanding of Mathematics*. Oxford: Alden Press.

Herscovics, N. (1979). An understanding of ssome Algebraic Concepts at the Secondary School. In D. Tall (Red.). *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Warwick.

Human, P.G. (1990). Enkele moontlike implikasies van die sosio-konstruktivistiese benadering tot rekenonderrig in die onderrig en leer van basiese skoolalgebra. Uit *Verrigtinge: Vakdidaktieksimposium*. Universiteit van Stellenbosch.

Human, P.G., (1988). Problem Transformation: a fundamental strategy in arithmetical and algebra. *Pythagoras*. Mei 1988, 17, 6-10.

Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism might be in Mathematics Education. *Proceedings of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Vol. 1, 3-27.

Küchemann, D.E. (1981). In K.M. Hart (Red.). *Children's Understanding of Mathematics*: 11-16. Oxford: Alden Press.

Lankford, Francis G. (Jr.) (1974). What can a Teacher Learn about a Pupil's Thinking Through Oral Interviews? *The Arithmetic Teacher*, 21(1), 26-32.

Murray, Hanlie (1988). Towards an understanding of two-digit numbers: a theoretical perspective on learning contexts. *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Opvoedkunde*, 8(3), 197-202.

Murray, J.C. (1986). Kinders se spontane wiskunde. Interne Enwous-verslag no. 7. Eenheid vir Navorsing vir Wiskunde Onderwys. Universiteit van Stellenbosch.

Murray, J.C. (1988). Informele wiskundige strategieë by Laerskoolleerlinge: Wat moet ons daarmee doen? Verrigtinge van die Kongres van die Wiskundegenootskap van Suider-Afrika.

Murray, J.C. (1991). The Junior Primary Mathematics Project: An informal overview. Communiqué no. 13. Sept. 1991. Enwous.

Piaget, J. *The Child's Conception of Number*, London: Routledge and Kegan Paul soos aangehaal in Cheat, E. (1978). *Children's Acquisition of Mathematics*. NFER Publishing Company Ltd., Berks.

Rae, G., McPhilliny, W.N. (1976). *Learning in the Primary School*. London: Hodder & Stoughton.

Skemp, R.R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Hammondsworth, England: Penguin.

Skemp, Richard R. (1982). Communicating Mathematics: Surface Structures and Deep Structures. *Visible Language*, XVI(3).

Thompson, Patrick W. (1982). Were Lions to speak, we wouldn't understand. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 3(2), 147-165.

Van der Merwe, Z.A.J. (1989). *Die evaluering van 'n strategie om die betekenis en funksionaliteit van Algebraïese manipulasie by st. 6-leerlinge tuis te bring*. Ongepubliseerde M.Ed. verhandeling, Universiteit van Stellenbosch.

Van Heerden, J.E. (1991). *Standaard 7-leerlinge se begrip van die distributiewe eienskap: 'n gevallestudie*. Ongepubliseerde M.Ed.-verhandeling, Universiteit van Stellenbosch.

Van Hiele, P.M. (1991). Twee lesings gelewer by die Fakulteit van Opvoedkunde, Universiteit van Stellenbosch op 17 en 18 Oktober 1991.

Vergnaud, G. (1981). Topic Area: Psychology of Mathematics Education. In C. Comiti (Red.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education*. Grenoble.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues. *For the learning of Mathematics*, 3(3), November 1982, 31-41.

Volmink, John D. (1990). The Nature and Role of Intuition in Mathematics. *Pythagoras* (22). April 1990: 6-10.

Wilder, R.L. (1967). The Role of Intuition. *Science*. 156, 605-610.