

# Die fassinerende meganika van hoppende fietswiele

Willem Theron en Milton Maritz

---

Afdeling Toegepaste Wiskunde, Departement Wiskundige Wetenskappe, Universiteit Stellenbosch

---

## *Opsomming*

Die gedrag van eksentries-belaaide wiele of hoepels het tydens die afgelope twee dekades aandag geniet, veral met betrekking tot sulke wiele se geneigdheid om te hop. Hier word 'n oorsig gegee oor die verskillende aspekte wat in die vorige artikels bespreek is, beginnende met J.E. Littlewood se voorbeeld van 'n massalose hoepel in 1953, die foto van 'n hoppende hoelahoepel in T. Pritchett se artikel in 1999, asook ander aspekte, soos die effek wat wrywing op die beweging het.

Feitlik al die gepubliseerde numeriese resultate is gegee vir beweging van 'n hoepel op 'n horisontale vlak; in hierdie artikel word 'n *wiel* wat afrol op 'n *skuins* vlak beskou. Die parameters vir 'n werklike fietswiel wat belas is deur 'n stuk lood op die rand vas te smelt, soos getoon in die foto in figuur 1, word in die wiskundige modelle gebruik.

Resultate word gegee vir drie modelle van die wiel, naamlik vir 'n starre wiel, 'n lineêr elastiese wiel sonder demping, en 'n lineêr elastiese wiel met viskeuse demping. Onderskeid word tussen *sentrifugale hoppe* en *elastiese hoppe* gemaak.

Hier word vir die eerste keer gekyk na meervoudige hoppe wat veroorsaak word deur die impuls wat op die wiel uitgeoefen word wanneer dit die vlak tref na 'n hop. Daar word gevind dat die tweede en later hoppe se groottes buitengewoon sensitief is vir klein aanpassings in die waardes van die parameters.

Video's van die werklike beweging van die wiel wat teen 'n steil pad afrol, word ingesluit. Die hoofresultaat is rekenaar-gegenereerde animasies wat poog om hierdie bewegings so goed as moontlik na te boots.

**Trefwoorde:** klassieke meganika; hoppende hoepels; eksentries belaste wiele

## Abstract

### The fascinating mechanics of a hopping bicycle wheel

In 1953 the mathematician J.E. Littlewood, on his retirement from Cambridge University, published a booklet called *A Mathematician's Miscellany*. The following formulation is from p. 37 of the revised edition [1] of this book:

A weight is attached to a point of a rough weightless hoop, which then rolls in a vertical plane, starting near the point of unstable equilibrium. What happens, and is it intuitive?  
...

In 1997 the same problem was considered by Tokieda [3], whose analysis is based on the geometric aspects of the motion. Both Littlewood and Tokieda conclude that the hoop will hop after rolling through  $90^\circ$  after starting from rest with the particle at the highest point of its cycloidal path. This conclusion troubled a number of authors, it being counter intuitive that the hoop can hop while the particle is moving downwards. This sparked a number of articles, [4] to [11], a thorough review of which is given in the Introduction to this article.

In almost all the previous work the motion occurred on a horizontal plane, and a hypothetical loaded hoop was considered. In this paper new results are presented for a *bicycle wheel* rolling down a *sloping* plane. As shown in figure 1, the wheel is weighted with a lump of lead melted onto the rim. To some extent the elasticity of the wheel depends on the air pressure in the tyre.



Figure 1. A loaded bicycle wheel

As shown in figure 2, the geometry of the wheel is fixed in terms of two non-dimensional parameters,  $\gamma$  and  $\kappa_o$ . With  $m$  and  $r$  denoting the mass and the radius of the wheel respectively, the position of the mass centre  $G$  is defined as  $OG = \gamma r$ , and the moment of inertia around the centre  $O$  is written as  $I_o = \kappa_o m r^2$ . These values for the wheel are determined experimentally.

The angular displacement of the wheel is denoted by  $\theta$ , and the position of the centre  $O$  by  $rs(t)$  and  $(r - d(t))$ . Here  $d$  denotes the elastic displacement, used as  $\delta = d/r$  in non-dimensional form.

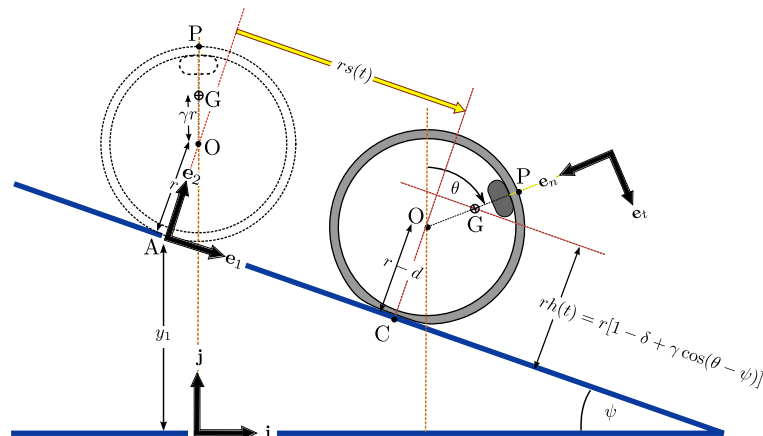


Figure 2. Geometry of an eccentrically loaded wheel

All equations are written in non-dimensional form, using the definitions for non-dimensional time, angular velocity and angular acceleration as given in equation (1):

$$\tau = \sqrt{g/r} t, \quad \omega = \theta' = \sqrt{r/g} \dot{\theta} \quad \text{and} \quad \alpha = \omega' = (r/g) \ddot{\theta}. \quad (1)$$

Here  $t$  is in seconds, and differentiation with respect to  $t$  and  $\tau$  is denoted by the over-dot and  $()'$  respectively.

The three external forces are the weight  $mg$ , the normal reaction  $N$  and the friction force  $F$ . The friction coefficient  $\mu$  determines whether the wheel is rolling or slipping.

The equations of motion are obtained by applying Newton's second law, and the resulting set of three second-order differential equations (in  $\theta$ ,  $s$  and  $\delta$ ) is solved numerically using the ode45-function in MATLAB. The full mathematical model for an eccentrically loaded elastic wheel rolling down a sloping plane is presented in a separate appendix.

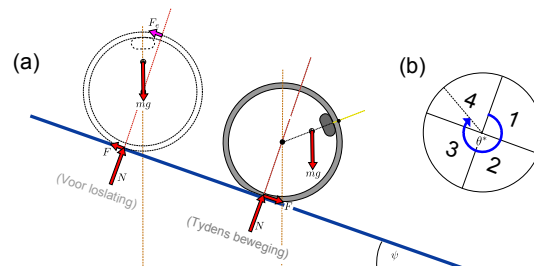


Figure 3. Forces acting on the wheel and definition of quadrants

During the hop the weight is the only force and therefore the mass centre  $G$  follows a parabolic path while the hoop rotates with a constant angular velocity denoted by  $\omega^*$ .

Three theoretical models are investigated. First, a very stiff wheel, approximated as being rigid, is used to show hopping that is entirely due to the centrifugal effect. The mechanics behind the hop is illustrated by means of so-called D'Alembert diagrams. The effect of the slope is shown in figure 7, which shows the size and position of the first hop as a function of the slope. The vertical blue lines are drawn between the angles at the beginning and end of the hop, and show, for example, that the wheel is launched during the first rotation when the slope is greater than  $19^\circ$ .

Secondly, the linear elastic model used in [2] is applied to a soft wheel and results in a hop in which the elastic effect is the major cause of the hopping. It is found, however, that the

oscillations in  $\delta$  dominate the motion and that it is necessary to damp these oscillations in order to model the behaviour of the real wheel.

Viscous damping is included in the third model. The non-dimensional internal elastic force is modelled as  $e\delta + c\delta'$ , with the damping coefficient  $c = (2\sqrt{e})\xi$  and  $\xi$  denoting the damping ratio. It is found that reasonably large damping is required, with  $\xi = 0,7$  being used in example 3. Then the behaviour of the elastic hoop tends to that of the rigid hoop as the elastic constant  $e$  increases, as shown in figure 12.

The behaviour of the wheel therefore depends on the values of six parameters, namely  $\gamma$  and  $\kappa_o$  for the geometry,  $e$  and  $\xi$  for the elasticity, and  $\mu$  and  $\psi$  for the slope.

The initial conditions considered here are for a wheel starting from an equilibrium position with the mass at the position of unstable equilibrium (to quote Littlewood). This implies the initial value  $\delta(0) = \delta_1 = \cos \psi/e$ . In most examples this is the only non-zero initial value.

In these examples the graphs of the normal reaction as a function of real time are used to illustrate and explain the behaviour. In these figures the position of the wheel at specific instances is also shown. A feature of these graphs, also found in the graphs of the angular velocity, is the sharp peak as the mass rolls through the lowest position. This is due to the centrifugal effect resulting from the large eccentricity.

Multiple hops are reported on for the first time. These are caused by the impulse that is exerted on the wheel when it strikes the slope after a hop. The principle relating the angular impulse to the change in angular momentum is relevant here, and in non-dimensional terms, with reference to Figures 2 and 3, this becomes

$$\int [(N/mg)\gamma \sin(\theta - \psi) - (F/mg)(1 - \delta + \gamma \sin(\theta - \psi))]d\tau = \kappa_G \omega_2^* - \kappa_G \omega_1^*.$$

Impulses are classified as being normal, medium or long, depending on the shape of the  $N-t$ -diagram as shown in figure 16.

The main result in this paper is the mathematical simulation, shown as an animation of the calculated results, of two videos showing the actual motion of the wheel rolling down a steep road. These videos and animations can be viewed by clicking the appropriate boxes in section 4 of this article.

The previously used condition of zero initial velocity is not realistic for the real-world motion, and in all cases the wheel was set in motion with a small initial angular and forward velocity in such a manner that slipping did not occur. These initial conditions are incorporated in the mathematical model used for the animations.

Comparison between the real motion and the mathematical model is based on the length of the different hops and impulses. For example, video F3, repeated below, shows a medium first hop, medium impulse, large second hop and normal impulse. The third hop has very little forward motion and almost zero angular velocity, followed by a small *backwards hop* with negative angular velocity. This pattern is simulated reasonably well as shown in section 4, using a crude non-linear damping model. We suggest that future research using non-linear models for the internal force should provide better simulations of this motion.



**Video F3. An unusual hopping motion of a bicycle wheel**

To see the video, please go to the YouTube section on the article page:  
[litnet.co.za/die-fassinierende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinierende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

**Keywords:** classical mechanics; hopping hoops; eccentrically loaded wheels

## 1. Inleiding

Ons belangstelling in die onderwerp van eksentries-belaaide wiele se beweging het begin met die terloopse lees van 'n huldeblyk deur D. MacKenzie aan die Amerikaanse wiskundige Fred Almgren (1933 – 1997) [2]. Hierin word verwys na Almgren se belangstelling in 'n artikel deur Tokieda en hulle eksperiment wat as volg beskryf word: "... taped a battery to a hula hoop and rolled it down a hallway. The hoop hopped, just as predicted."

Hierdie aanhaling het my (die eerste outeur) se belangstelling tot so 'n mate geprikkel dat ek Tokieda se artikel, "The Hopping Hoop"[3] (1997), gaan opsoek het. Dit het gelei tot 'n jarelange belangstelling en 'n aantal publikasies, insluitend 'n PhD-tesis [1].

Tokieda se artikel was 'n nuwe uiteensetting van 'n probleem wat baie jare vroeër, in 1953, deur nog 'n wiskundige, John E Littlewood, gepubliseer is in "A Mathematician's Miscellany". In 'n geredigeerde weergawe van hierdie boek, [1] p. 37, word die probleem as volg beskryf:

A weight is attached to a point of a rough weightless hoop, which then rolls in a vertical plane, starting near the point of unstable equilibrium. What happens, and is it intuitive?

The hoop lifts off the ground when the radius vector to the weight becomes horizontal. I don't find the lift directly intuitive; one can however "see" that the motion is equivalent to the weight's sliding smoothly under gravity on the cycloid it describes, and it is intuitive that it will sooner or later leave *that*. (But the "seeing" involves the observation that P is instantaneously rotating about C (fig.1).)

Mr H.A. Webb sets the question annually to his engineering pupils, but I don't find it in books. In actual practice the hoop skids first.

(Terloops, Littlewood (1885 – 1977) het in Kaapstad, waar sy pa 'n skoolhoof was, grootgeword, maar is reeds op 14-jarige leeftyd teruggestuur Engeland toe vir sy opleiding. Hy was een van Cambridge se groot wiskundiges en is natuurlik bekend vir veel belangriker wiskunde as die probleem van die hoppende hoepel!)

Tokieda se artikel [3] in 1997 het 'n hele paar artikels tot gevolg gehad; hieronder volg 'n oorsig van die literatuur oor verskillende aspekte van hierdie probleem.

### 1.1 Massalose hoepels

Die hipotetiese probleem van 'n hoepel sonder massa het aanvanklik al die aandag gekry.

Die model wat Tokieda ontleed het, was dié van 'n massalose hoepel wat belas word met 'n partikel op die rand, en wat vanuit 'n rusposisie losgelaat word met die partikel heel bo, soortgelyk aan Littlewood se beskrywing. Die reaksiekrag word nul nadat die hoepel deur  $90^\circ$  roteer het; gevolglik is die gewig van die partikel die enigste krag, dus word die partikel 'n projektiel en verander die baan van 'n sikloïde na 'n parabool. Beide Littlewood en Tokieda interpreteer hierdie paraboliese baan as 'n hop.

Butler beweer: “Hopping Hoops Don't Hop”[4], (1999), maar sy bewys bevat 'n subtiele fout. Hy gebruik die bekende vergelyking dat *die totale moment om die massamiddelpunt gelyk is aan die produk van die traagheidsmoment en die hoekversnelling* om aan te toon dat die hoekversnelling nul is omdat die moment van die kragte nul is. Maar in hierdie geval is die traagheidsmoment  $I_G$  nul, dus sal *énige* hoekversnelling die vergelyking bevredig.

In al drie gevalle is aangeneem dat die hoepel rol sonder om te gly, alhoewel Littlewood se laaste sin toon dat hy beseft het dat dit nie in die praktyk kan gebeur nie, en Butler het ook 'n opmerking hieroor gemaak. Daar word ook implisiet aangeneem dat die hoepel star is.

'n Baie volledige ontleding van die beweging van 'n eksentries-belaaide massalose hoepel word gegee deur Theron en Du Plessis in “The Dynamics of a massless hoop”[7], (2001). Realistiese waardes vir die wrywingskoëffisiënt word gebruik, en die invloed van die aanvanklike snelheid  $\geq 0$  word deeglik ondersoek. Die las is steeds 'n partikel, dus is die traagheidsmoment  $I_G$  nul; die beoordelaar van 'n vroeë weergawe van die artikel het die skrywers gewys op die implikasie hiervan toe hulle dieselfde fout as Butler gemaak het.

Die belangrikste resultaat in [7] is die beweging nadat die normaalreaksie nul word. Hier word getoon dat die hoepel se middelpunt voortgaan om reguit te beweeg, sonder dat die hoepel op- of afwaarts beweeg, en die reaksiekrag nul is, met die gevolg dat die partikel 'n paraboliese baan volg terwyl die wiel om  $G$  roteer. Hierdie beweging is “skimming”gedoop; 'n moontlike Afrikaanse vertaling: *skuiwing*. (Die terme gly of glip, spin en skuur word reeds gebruik soos later gedefinieer). Die huidige siening is dat hierdie een moontlike oplossing is, met 'n hop as nog 'n moontlikheid. Daar kon nie geslaag word om die beoordelaars te oortuig dat skuiwing dié oplossing is nie! Hier is dus 'n bifurkasie by 'n singulêre punt in die oplossing van 'n hipotetiese probleem.

Tokieda was in 2003 in Kaapstad om onder andere 'n kursus by AIMS aan te bied. Toe hy oor bostaande kwessie genader is, het hy in 'n persoonlike e-pos as volg reageer:



By “hopping”, what is mathematically meant is of course not that the hoop acquires an upward velocity, but rather that the vertical reaction on the floor vanishes; the point of contact hovers as if in zero gravity. Physically, any tiny irregularity on the floor is enough to push up the hoop, and in practice the hoop hops.

Hierdie siening word nie in hierdie artikel gebruik nie; hier impliseer “hop” die weg beweeg vanaf die oppervlak waarop die hoepel of wiel rol.

## 1.2 Vroeë hop van starre hoepels

Vroeë hop word gedefiniër as ’n hop soos in [1] tot [4] bedoel; met ander woorde, ’n hop wat plaasvind terwyl die partikel *afwaarts* beweeg.

In Pritchett se “The Hopping Hoop Revisited”[5] (1999), word ’n meer fisies realistiese model beskou (in teenstelling met die massalose geval). Die massa van die starre hoepel word in ag geneem en die partikel word vervang deur ’n voorwerp met afmetings en dus ook met ’n traagheidsmoment. Die wrywingskrag word in ag geneem en Pritchett toon formeel aan dat die hoepel moet gly voordat die normaalreaksie nul word.

Hy bevind egter dat die hoepel ’n vroeë hop kan uitvoer, soos duidelik gesien op ’n stroboskopiese foto, figuur 2 in [5], van “... a plastic hula hoop and four brass rods”.

’n Model soortgelyk aan bostaande word in fyn besonderhede ontleed in Theron se “The rolling motion of an eccentrically loaded wheel”[6] (2000). Hier bestaan die model uit ’n starre hoepel belas met ’n partikel op die rand en wat afrol teen ’n skuinsvlak terwyl wrywing in ag geneem word. Die posisie van die massamiddelpunt word bepaal deur die verhouding van die partikel- en hoepel-massas.

Die belangrikste resultaat is dat sodanige starre hoepels op ’n horisontale vlak sal hop na ’n rotasie van meer as  $270^\circ$ , d.w.s. terwyl die partikel *opwaarts* beweeg, mits die beginsnelheid groot genoeg is. Die invloed van die massa-verhouding en die wrywingskoëffisiënt word getoon, asook een geval vir ’n skuins helling.

In [1] bl. 42, word formeel bewys dat ’n starre wiel kan hop slegs indien die hoek groter as  $180^\circ$  is. Dit is natuurlik strydig met Pritchett se bevinding, en laat ons dan met die probleem om die foto van die hoppende hoelahoepel te verklaar, asook met die gerapporteerde waarneming van Tokieda en Almgren soos aan die begin van hierdie inleiding aangehaal.

Pritchett het dit deels gedoen. In [5] merk hy op:

In the real world, of course, no object is infinitely rigid. [...] and the potential energy stored as elastic strain in the hoop and/or the supporting surface just prior to the loss of contact provides an additional source of propulsion for the hop.

Hy brei egter nie verder hierop uit nie. Dit is intuïtief ook duidelik dat hoelahoepels nie as star gemodelleer behoort te word nie.

Theron se model van 'n *elastiese* hoepel, “The Dynamics of an Elastic Hopping Hoop”[2] (2002), is die eerste (en sover ons weet die enigste) poging om 'n model daar te stel wat 'n vroeë hop verduidelik. Die model is soortgelyk aan die model in [6], behalwe dat aangeneem word dat die radius tussen die kontakpunt en die middelpunt elasties vervorm terwyl die res van die wiel star bly. Waardes van die parameters word gevind wat die vroeë hop in die foto baie goed benader. Die invloed van die verskillende parameters word getoon, slegs vir vroeë hoppe op 'n horisontale vlak.

### 1.3 *Bewegingspatrone en eksperimentele bevestiging*

In al die bogenoemde artikels was die hoofresultaat die voorwaardes wat nodig was vir die wiel of hoepel om te hop. Die modelle is egter ook interessant wat betref die effek van die wrywingskrag op die verskillende fases van die beweging, soos opgeteken in “The amazing variety of motions of a loaded hoop”[9] (2008). Hier word onderskei tussen glybeweging met positiewe skuifkrag, wat *spin*-beweging genoem word, en dié met negatiewe skuifkrag, 'n *skuur*-beweging (Engels: “skid”). Die afwisseling tussen die rolbeweging en hierdie twee tipes glybeweging veroorsaak verskillende bewegingspatrone, waarvan 36 in [9] aangeteken is.

Sommige van hierdie patrone kon eksperimenteel getoon word deur die beweging van 'n fisiese model te verfilm met 'n hoë-spoed digitale kamera en die verskillende raampies van die film daarna wiskundig te ontleed. Hierdie resultate verskyn in “Experimental verification of the motion of a loaded hoop”[11] (2012). Daar word bevind dat die eksperimentele en teoretiese gedrag kwalitatief binne die verwagte foutgrense ooreenstem. In albei artikels word resultate met fase-diagramme getoon, waar die gebiede vir die verskillende fases op die posisie-beginsnelheid parametervlak getoon word.

Nog 'n eksperimentele studie is gerapporteer deur Taylor en Fehrs in “The dynamics of an eccentrically loaded hoop”[10] (2010). Hierdie eksperiment het ten doel gehad om die vergelyking wat in [6] getoon is, te bevestig. Die vergelyking ter sprake was 'n voorwaarde vir die wiel om op 'n skuinsvlak te hop, en die gevolgtrekking in [10] was dat die vergelyking korrek was.

### 1.4 *Beweging van 'n fietswiel op 'n skuinsvlak*

In die artikels hierbo genoem was die resultate, met enkele klein uitsonderings, die beweging van 'n wiskundige model van 'n hoepel-en-partikel-sisteem op 'n horisontale vlak. In hierdie artikel word die beweging van 'n werklike fietswiel, getoon in die foto in figuur 1, op 'n skuinsvlak gemodelleer. Hierdie wiel het 'n redelik groot eksentrisiteit as gevolg van die lood wat op die rand vasgesmelt is. Die wit plakkertjie op die speek toon die posisie van die massamiddelpunt.





**Figuur 1. Foto van 'n eksentries-belaaide fietswiel**

Video F1 toon hoe hierdie wiel teen 'n skuins pad afrol, spoed optel en dan 'n paar keer hop. Die hoofdoel van hierdie artikel is om soortgelyke bewegings so goed as moontlik wiskundig na te boots.



**Video F1. 'n Voorbeeld van 'n hoppende fietswiel**

Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die video te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

## 2. Die wiskundige model

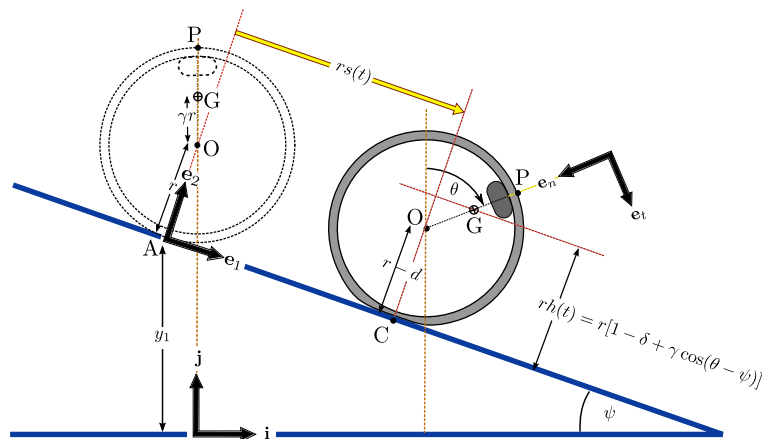
Slegs die noodsaaklikste definisies word hier gegee; die volledige wiskundige model word in die bylaag ontwikkel, en is soortgelyk aan die modelle in [6, 2, 1]. Die notasie stem egter nie oral ooreen nie.

Die belangstellende leser word aangeraai om eers die bylaag deur te werk voordat hy/sy verder met die artikel aangaan.

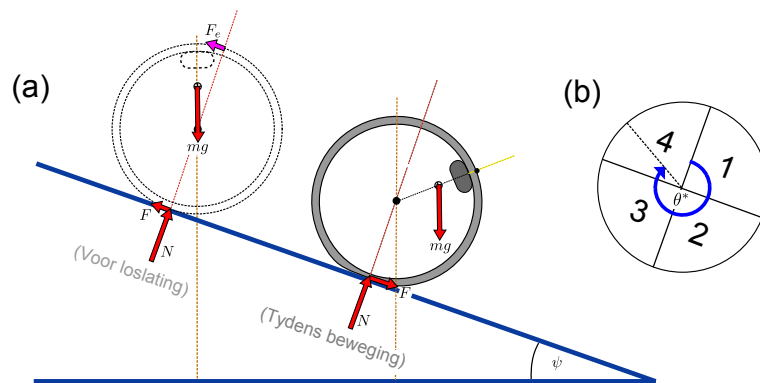
### 2.1 Geometrie en kragte

Ons beskou hier 'n elastiese wiel wat afrol teen 'n skuinsvlak met hellingshoek  $\psi$ , soos aangedui in figuur 2. Die wiel word gedefinieer deur die totale massa  $m$  en die buite-radius  $r$ , met middelpunt  $O$ , massamiddelpunt  $G$  en belasting by punt  $P$ . Die posisie van  $G$  word bepaal in terme van die *eksentrisiteit*  $\gamma$ , waar  $OG = \gamma r$ . Die traagheidsmoment om 'n as deur  $O$  (loodreg op die wiel), is  $I_o = \kappa_o m r^2$ , waar  $\kappa_o$  die dimensielose *traagheidsfaktor* is.

Die posisie van die wiel word aangedui deur die hoekverplasing  $\theta$ , met kloksgewys as positief en met  $\theta = 0$  in die beginposisie by  $A$  met  $OP$  vertikaal. Die vlak is altyd lank genoeg dat die wiel hop voordat die einde van die vlak bereik word. In die eerste groep voorbeelde in hierdie artikel begin die beweging uit ewewig en rus by punt  $A$  wanneer die krag wat in figuur 3 aangedui word as  $F_e$  verwyder word.



Figuur 2. Geometrie van 'n eksentries-belaaiete fietswiel op 'n skuinsvlak



**Figuur 3. Kragte op 'n eksentries-belaaide fietswiel en die definisie van kwadrante**

Tyd in sekondes word deur  $t$  aangedui, en die tydafgeleide van byvoorbeeld hoekverplasing deur  $\dot{\theta}$ . Dit is gerieflik om met dimensielose hoeveelhede te werk, aangedui deur  $\tau$ ,  $\omega$  en  $\alpha$  vir onderskeidelik tyd, hoeksnelheid en hoekversnelling. Met  $(\ )'$  die afgeleide m.b.t.  $\tau$ , en  $g$  die gravitasieversnelling, geld

$$\tau = \sqrt{g/r} t, \quad \omega = \theta' = \sqrt{r/g} \dot{\theta} \quad \text{en} \quad \alpha = \omega' = (r/g) \ddot{\theta}. \quad (1)$$

Soos voorheen in [2, 1] aangeneem, word die elasticiteit van die wiel gemodelleer deur aan te neem dat die radius na die kontakpunt, OC, elasties vervorm terwyl die res van die wiel star is. Met ander woorde, ons neem aan dat  $OC = r - d(t) = r(1 - \delta(t))$ , en definieer  $\delta(t) = d(t)/r$  as die dimensielose *elastiese vervorming*.

Figuur 2 toon ook die drie stelle eenheidsvektore wat gebruik word om rigtings aan te dui, naamlik  $\mathbf{e}_1$  en  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_n$  en  $\mathbf{e}_t$ , asook  $\mathbf{i}$  en  $\mathbf{j}$ .

Die posisie van O, vanaf die beginpunt A gemeet en aangedui deur  $\mathbf{r}_O$ , word in dimensielose vorm geskryf as

$$(1/r)\mathbf{r}_O = s(t) \mathbf{e}_1 + [1 - \delta(t)] \mathbf{e}_2. \quad (2)$$

Hier is  $s(t)$  die dimensielose verplasing parallel aan die vlak. Rol sonder om te gly word gekenmerk daardeur dat die kontakpunt C op daardie oomblik in rus is, sodat  $s' = (1 - \delta)\omega$ .

Die snelheid en versnelling van G relatief tot O word die gerieflikste geskryf in terme van die normaal en tangente eenheidsvektore  $\mathbf{e}_n$  en  $\mathbf{e}_t$ :

$$(1/\sqrt{rg})\mathbf{v}_{G/O} = \gamma\omega \mathbf{e}_t; \quad (1/g)\mathbf{a}_{G/O} = \gamma\omega^2 \mathbf{e}_n + \gamma\alpha \mathbf{e}_t. \quad (3)$$

Die drie eksterne kragte wat op die wiel inwerk word in Figuur 3(a) aangedui. Dit is die gewig  $mg$ , die normaalreaksie  $N$ , en die tangensiale wrywingskrag  $F$ . Soos voorheen word aangeneem dat die wiel rol sonder om te gly indien  $|F| \leq \mu N$ , en dat  $|F| = \mu N$  terwyl die wiel gly, waar  $\mu$  die *wrywingskoeffisiënt* is. Dit word in alle gevalle aangeneem dat  $\mu$  groot genoeg is om te verseker dat die wiel sal rol sonder om te gly met aanvang van die beweging.

Die wiel hop wanneer die normaalreaksie nul word, en die wiel word dan as 'n projektiel

gelanseer, met die gewig as die enigste krag. Die massamiddelpunt  $G$  volg 'n paraboliese baan en die wiel roteer om  $G$  met 'n konstante hoeksnelheid wat deur  $\omega^*$  aangedui word. Die lanseerhoek word aangedui deur  $\theta^*$ , gedefinieer deur die eienskap dat  $N(\theta^*) = 0$ . In die latere besprekings is dit gerieflik om te verwys na die kwadrant waarin die lanseerhoek val; die vier kwadrante soos in hierdie artikel gebruik, word in Figuur 3(b) aangedui.

Die dimensielose lanseersnelheid,  $\mathbf{v}^* = (1/\sqrt{rg})\mathbf{v}_G(\theta^*)$ , se grootte en rigting is bepalend vir die grootte van die hop, en word bepaal as

$$\mathbf{v}^* = (s')^* \mathbf{e}_1 - (\delta')^* \mathbf{e}_2 + \gamma\omega^* \mathbf{e}_t. \quad (4)$$

In die voorbeelde wat volg, word die nul-normaalreaksie toegelig met sogenaamde *D'Alembert-diagramme*, genoem na die Franse wiskundige wat in die 18de eeu 'n mekanikebeginsel geformuleer het wat in vereenvoudigde vorm daarop neerkom dat Newton se tweede wet geskryf kan word as

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a}_G = \mathbf{0}.$$

In die geval van die elastiese wiel word dit geskryf as

$$[F \mathbf{e}_1 + N \mathbf{e}_2 - mg \mathbf{j}] - mg [s'' \mathbf{e}_1 - \delta'' \mathbf{e}_2 + \gamma\omega^2 \mathbf{e}_n + \gamma\alpha \mathbf{e}_t] = \mathbf{0}. \quad (5)$$

In sommige gevalle word die volgorde van die komponentvektore omgeruil ten einde duideliker diagramme te verkry.

Die bewegingsvergelings word verkry uit Newton se tweede wet, soos in die bylaag getoon. Die stelsel van drie tweedegraadse gewone differensiaalvergelings word met die ode45-funksie in MATLAB [3] numeries opgelos.

Die hoekimpuls-hoekmomentum-beginsel word gebruik in die bespreking van sommige verskynsels. In dimensielose vorm, vir momente om  $G$ , is dit

$$H_G = \kappa_G(\omega_2 - \omega_1), \quad (6)$$

waar  $H_G$  die (dimensielose) hoekimpuls om  $G$  aandui. Inspeksie van figuur 2 toon dat

$$H_G = \int [(N/mg)\gamma \sin(\theta - \psi) - (F/mg)h] d\tau, \quad (7)$$

met  $h = (1 - \delta + \gamma \cos(\theta - \psi))$  soos in figuur 2 aangedui, en waar 'n bepaalde integraal oor die betrokke tydinterval geïmpliseer word. Kyk die bylaag vir meer besonderhede.

## 2.2 Die interne krag

By die kontakpunt  $C$  word die band vervorm en gevolglik ontstaan 'n interne krag. In die vorige publikasies, [2, 1], is dit gemodelleer as 'n lineêre elastiese krag  $F_i = kd$ , en is die dimensielose elastiese konstante  $e$  gedefinieer sodat

$$F_i/(mg) = e\delta; \quad e = kr/(mg). \quad (8)$$

Uit Newton se derde wet volg dit dat by die kontakpunt geld dat  $N = F_i$ .

Daar word bevind dat hierdie model lei tot baie groot ossillerende versnellings  $\delta''$ . Ten einde die fietswiel se gedrag meer realities te modelleer word dit hier uitgebrei om ook viskeuse demping in te sluit, en dan is

$$N/(mg) = F_i/(mg) = e\delta + c\delta'; \quad e = kr/(mg); \quad c = (2\sqrt{e})\xi. \quad (9)$$

Hier is  $c$  die (dimensielose) *dempkonstante* en  $\xi$  die *dempverhouding*. (Kyk ook die bylaag).

In die klassieke-meganika-konteks van swaar, kritieke en ligte demping word hier slegs gevalle van ligte demping beskou, met ander woorde  $\xi < 1$ . Daar sal egter onderskei word tussen gevalle met *min demping* vir  $\xi < 0,4$ , en *baie demping* vir groter waardes.

Ons sal ook ietwat arbitrêr onderskei tussen 'n *sagte band* met  $e < 100$ , 'n *stywe band* met  $e > 250$ , en 'n *normale band* vir die ander waardes.

In die volgende afdeling word drie teoretiese voorbeelde beskou. Voorbeeld 1 is die limietgeval van 'n starre band,  $e \rightarrow \infty$ . Voorbeeld 2 is 'n sagte band met  $e = 50$  met die limietgeval van geen demping,  $c = 0$ . Voorbeeld 3 is 'n algemene geval van 'n sagte band met baie demping,  $e = 50$  en  $\xi = 0,7$ .

Al die vergelykings word in dimensielose vorm geskryf deur  $m$ ,  $g$  en  $r$  as die fundamentele parameters te beskou. Die probleem word dan volledig gedefinieer in terme van ses parameters, naamlik  $\gamma$ ,  $\kappa_0$ ,  $e$ ,  $c$ ,  $\mu$  en  $\psi$ .

### 2.3 Parameters van die gelaaide fietswiel

Benaderde waardes van  $\gamma$ ,  $\kappa_0$  en  $e$  vir die fietswiel getoon in figuur 1 word eksperimenteel bepaal met 'n kombuis skaal en maatband, asook 'n stophorlosie om die periode van klein ossillasies van die wiel te meet. Die besonderhede hiervan word in die bylaag gevind.

Waardes van  $r = 0,33$  m,  $\gamma = 0,59$  en  $\kappa_0 = 0,54$  word voortaan in al die numeriese berekeninge gebruik.

Dit is gerieflik om te onderskei tussen die *teoretiese* voorbeelde in afdeling 3, en die *fisiese* voorbeelde in afdeling 4, waar die beweging van die werklike fietswiel nageboots word.

Vir die fisiese voorbeelde is die elastisiteitskonstante  $e$  afhanklik van die lugdruk in die band. Hier is  $d(0)$  gemeet as benaderd 3 mm, dus word  $e = r/d(0) = 110$  vir die fisiese voorbeelde gebruik. Die dikte van die rubber band plaas 'n beperking op die elastiese vervorming. Met die dikte gemeet as 33 mm, moet  $\delta < 0,1$  en  $e\delta < 11$  dus gehandhaaf word om te verhoed dat die wiel "deurstamp".

Ons het nie probeer om eksperimentele waardes vir  $\xi$  of  $\mu$  te bepaal nie. Die waardes word arbitrêr gekies om die beste numeriese resultate te gee.

Om van dimensielose tyd na sekondes om te skakel geld  $t = \sqrt{r/g} \tau = 0,183\tau$ , en vir die

hoeknelheid in radiale/sekonde is  $\dot{\theta} = \sqrt{g/r} \omega = 5,45\omega$ .

### 3. Fundamentele verskynsels

Ons begin deur 'n aantal fundamentele verskynsels te bespreek en toe te lig met drie voorbeelde. Die wiel se geometrie word deurgaans gemodelleer met  $\gamma = 0,59$  en  $\kappa_0 = 0,54$ . 'n Steil helling van  $\psi = 19^\circ$  word gebruik, met redelik lae wrywing,  $\mu = 0,3$ . Die parameters vir die interne krag word gekies om die verskillende verskynsels so goed moontlik te illustreer.

Ten einde die ondersoek te vereenvoudig word ook deurgaans gebruik gemaak van die ietwat onrealistiese beginvoorwaarde dat  $\omega_1 = 0$ . Gevolglik vereenvoudig die beginvoorwaardes na

$$\delta_1 = \cos \psi / e; \quad \theta(0) = 0; \quad \theta'(0) = 0; \quad s(0) = 0; \quad s'(0) = 0; \quad \delta(0) = \delta_1; \quad \delta'(0) = 0.$$

Eerstens word die verskynsel van 'n *sentrifugale hop* gedemonstreer met die spesiale geval van 'n *starre* wiel. Die effek van verskillende hellings op die beweging word deeglik ondersoek. Daarna word 'n *elastiese hop* getoon vir die spesiale geval van 'n *ongedempte* elastiese wiel. As derde voorbeeld word die algemene geval van 'n *gedempte* elastiese wiel beskou, en word onder andere getoon hoe die gedrag van die werklike fietswiel hierdeur nageboots kan word.

In alle vorige publikasies is die ontleding na die eerste hop gestaak. Hier word vir die eerste keer gekyk na die beweging wat hierop volg, 'n beweging wat bestaan uit afwisselende impulse en hoppe. In hierdie konteks bestaan die impuls uit die reaksiekragte op die wiel gedurende die tydinterval waartydens die wiel in kontak is met die vlak.

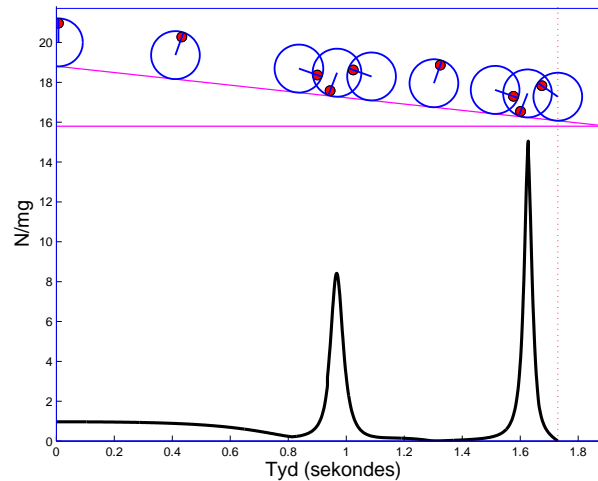
#### 3.1 Sentrifugale hop van 'n starre wiel

In hierdie voorbeeld word aangeneem dat die band baie styf gepomp word en dus as 'n starre wiel benader kan word. Die berekeninge word dan gebaseer op 'n vereenvoudigde wiskundige model, verkry deur  $\delta$ ,  $\delta'$  en  $\delta''$  gelyk aan nul te stel.

Ons begin die bespreking van die gedrag van die starre wiel met figuur 4, waar die dimensielose normaalkrag  $N/mg$  as 'n funksie van tyd getoon word. Die diagram bo in figuur 4 toon die wiel in verskillende posisies tydens die beweging, waar die rooi kolletjie die las aandui op die tydstip soos in die tyd-as getoon. Die getoonde posisies is die oorgange tussen die kwadrante wat in figuur 3(b) gedefinieer is.

Die lang tydsverloop tot by die einde van die eerste kwadrant dui op die aanvanklike lae hoeknelheid; die daaropvolgende twee kort tydintervalle dui op die hoë hoeknelheid terwyl die las deur kwadrante twee en drie beweeg. Die tweede omwenteling is merkbaar vinniger as die eerste, en die normaalkrag word nul na ongeveer  $1\frac{3}{4}$  omwentelings, na 'n tyd  $t = 1,73$  s soos aangedui deur die vertikale rooi stippellyn. Die las is nou in die vierde kwadrant van die tweede omwenteling.





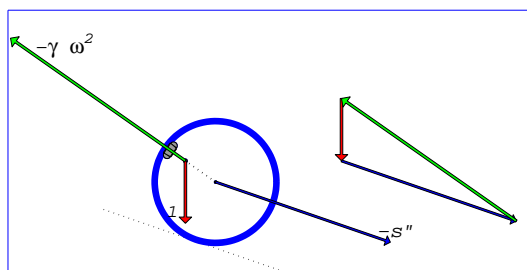
Figuur 4. Normaalreaksiekrags as 'n funksie van tyd

Die kromme toon twee pieke wanneer die las naby die kontakpunt is, en minima wanneer die las bo is, met die eerste minimum in die eerste of tweede kwadrant net na die beweging begin, 'n tweede minimum wat byna nul is in die vierde kwadrant van die eerste omwenteling, en dan die nulpunt in die vierde kwadrant van die tweede omwenteling.

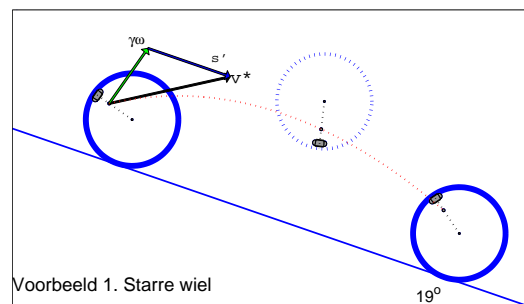
Die oorsaak van hierdie variasies in die grootte van die normaalkrag kan met behulp van D'Alembert-diagramme geïllustreer word. Figuur 5(a) toon so 'n diagram by die lanseerposisie, waar die reaksiekrags en die hoekversnelling nul is. Gevolglik vereenvoudig die dimensielose vorm van (5) vir 'n starre wiel na

$$-\mathbf{j} - (s'')^* \mathbf{e}_1 - \gamma(\omega^*)^2 \mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

In figuur 5(a) word hierdie vektore getoon in die posisies waar hulle op die wiel inwerk, en word dan as 'n geslote vektordiagram herhaal. Dit is duidelik dat die derde vektor (in groen aangedui), populêr bekend as die *sentrifugale krag*  $-\gamma(\omega^*)^2 \mathbf{e}_n$ , neig om die wiel "op te lig" en sodoende die normaalkrag na nul te dryf. Die blou en groen vektore is opmerklik groter as die rooi vektor wat  $mg$  voorstel. In hierdie geval is die waarde van die sentripetale versnelling  $3,42g$ , en die versnelling van die middelpunt op hierdie tyd is  $-2,9g$ . Hierdie verskynsel van versnellings groter as  $g$  is reeds in vorige artikels ondersoek en word nie hier verder bespreek nie.



(a) D'Alembert-diagram (lanseer-posisie)



(b) Hop in die vierde kwadrant

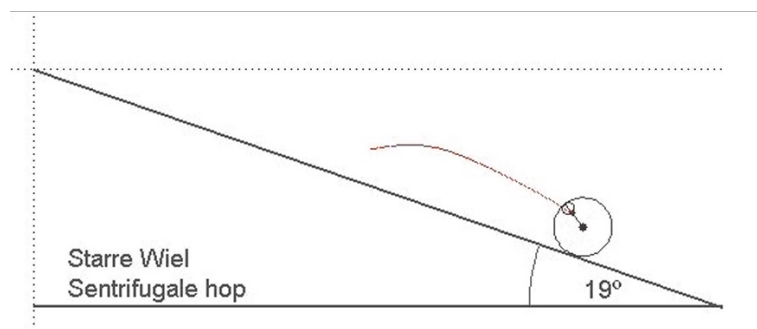
Figuur 5. Sentrifugale hop vir 'n starre wiel

Figuur 5(b) beeld die hop diagrammaties uit, met die wiel in die lanseerposisie, by die hoogste punt sowel as by die *impakpunt* waar die wiel weer die vlak tref. Soortgelyke figure in die res van hierdie artikel sal, soos hier, die wiel gestippeld toon by die hoogste posisie.

Die berekeninge toon dat die wiel tydens die hop vir 0,51 sekondes in die lug is, en in dié tyd deur 'n hoek van  $381^\circ$  roteer met 'n groot hoeksnelheid  $\omega^* = 2,41$ , wat neerkom op 13,1 rad/s of 2.1 omwentelings per sekonde.

Die lanseersnelheid, uit (4), word hier getoon as  $\mathbf{v}^* = \gamma\omega^* \mathbf{e}_t + (s')^* \mathbf{e}_1$  en is raaklynig aan massamiddelpunt G se paraboliese baan. Hierdie baan word deur rooi stippels aangedui. In hierdie geval is dit die groen  $\gamma\omega^*$ -komponent wat die wiel lanseer.

'n Animasie van hierdie beweging kan gesien word deur op onderstaande animasie 1 te klik. Die rooi kromme toon die paraboliese baan van massamiddelpunt G, en stem ooreen met die kromme in figuur 5(b).



**Animasie 1. Sentrifugale hop van 'n starre wiel**

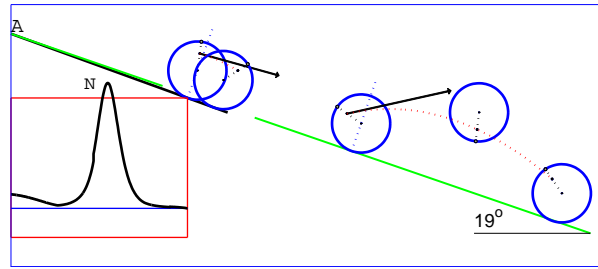
Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die animasie te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

### 3.2 Die invloed van die hellingshoek

Een aspek waaroor daar nie in vorige publikasies gerapporteer is nie, is die effek van verskillende hellingshoeke op die beweging, en word vervolgens ondersoek vir die geval van sentrifugale hoppe van 'n starre wiel.

In voorbeeld 1 word 'n steil helling van  $\psi = 19^\circ$  gebruik. Figuur 4 toon dat die hop plaasvind uit die tweede omwenteling se vierde kwadrant, of-te-wel by die derde minimum in die kromme vir  $N$ . Figuur 5(b) toon die groot hop wat dan ontstaan, soos ook getoon as die regterkantste hop in figuur 6.

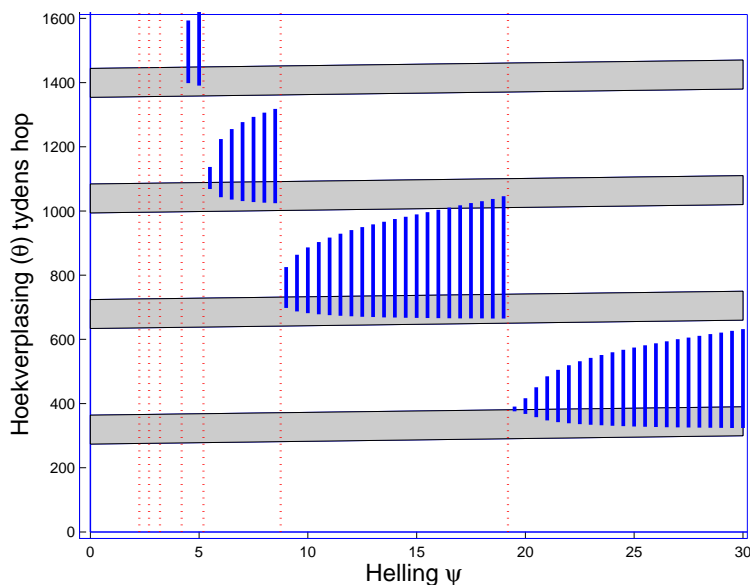
Indien die helling effens vergroot word na  $\psi = 20^\circ$ , vind 'n baie klein hop plaas by die *tweede* minimum, in die eerste omwenteling se vierde kwadrant. Dit word getoon as die linkerkantste hop in figuur 6, met die lanseerhoek net-net binne die vierde kwadrant van die eerste omwenteling en die lanseersnelheid in hierdie geval onderkant die horisontaal gerig. Die inlasdiagram van  $N$  is soortgelyk aan dié in figuur 4.



**Figuur 6.** 'n Klein hop by 'n helling van  $20^\circ$ , en 'n groot hop by 'n helling van  $19^\circ$

Met steiler hellings as in figuur 6 sal die hoppe al hoe groter word, steeds uit die vierde kwadrant. Vir hellings kleiner as  $19^\circ$  sal die lanseerspoed afneem en die hoppe al hoe kleiner word hoe vlakker die helling, tot by  $9^\circ$ . Indien die helling kleiner as  $9^\circ$  is, sal die wiel die tweede omwenteling voltooi en in die derde of later omwentelings hop.

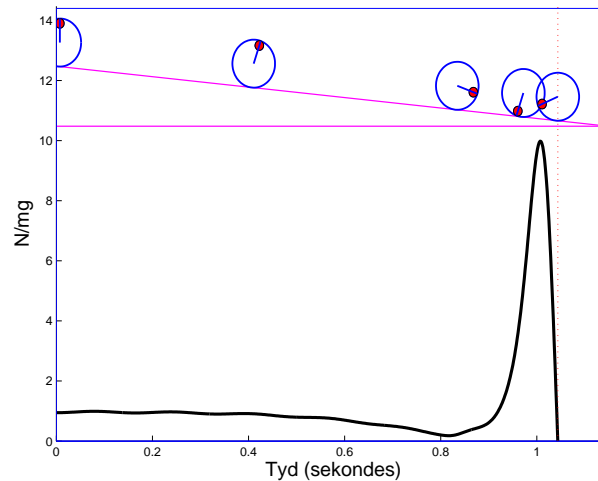
Hierdie resultaat word opgesom in figuur 7, wat die posisie en grootte van die eerste hop vir verskillende hellingshoeke wys. Die vertikale blou lyne is geteken tussen die begin- en eindhoeke vir die eerste hop op 'n helling  $\psi$ ; met ander woorde, die onderpunt is by die lanseerhoek  $\theta^*$ , en die boonste punt by die impakhoek  $\theta^+$ . Die grys horisontale bande toon die vierde kwadrante vir die eerste vier omwentelings, en die vertikale stippellyne toon die oorgange. Die spronge vir hellings kleiner as  $4,5^\circ$  word nie getoon nie.



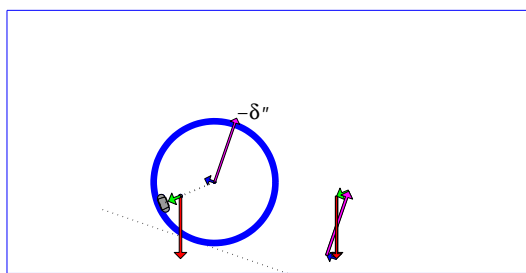
**Figuur 7.** Posisie en grootte van eerste hop as funksie van hellingshoek  $\psi$

### 3.3 Elastiese hop van 'n ongedempte elastiese wiel

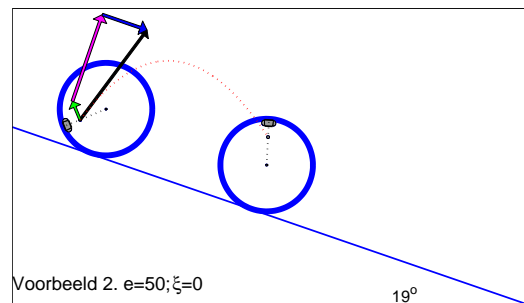
In voorbeeld 2 word 'n sagte band gekies, met  $e = 50$ , weer op 'n helling van  $19^\circ$  met  $\mu = 0,3$ . Die limietgeval van geen demping word hier geneem, in welke geval figure 8 en 9 toon dat die hop vanuit die *derde* kwadrant van die eerste omwenteling plaasvind, en wel as gevolg van die elasticiteit van die wiel.



Figuur 8. Normaalreaksiekrags as 'n funksie van tyd



(a) D'Alembert-diagram (lanseer-posisie)



(b) Hop in die derde kwadrant

Figuur 9. Elastiese hop met  $e = 50$ ,  $c = 0$  (voorbeeld 2)

Die lanseerhoeksnelheid van  $\omega^* = 0,597$  (of  $3,26$  rad/s) is hier veel kleiner as in die starre geval. Dit word weerspieël deur die veel kleiner groen vektore in figuur 9 en ook deur die klein hoekverplasing tydens die hop. Die rede hiervoor is dat die starre wiel eers meer as een volledige omwenteling later hop, en daar gevolglik veel meer potensiële energie omgesit word in kinetiese energie.

Figuur 9(a) toon dat die sentrifugale krag in hierdie geval die normaalkrags vergroot, maar dat die positiewe elastiese versnelling  $\delta''$  die normaalreaksie na nul dryf. Die lanseersnelheid, in figuur 9(b) getoon as

$$\mathbf{v}^* = \gamma\omega^* \mathbf{e}_t - (\delta')^* \mathbf{e}_2 + (s')^* \mathbf{e}_1,$$

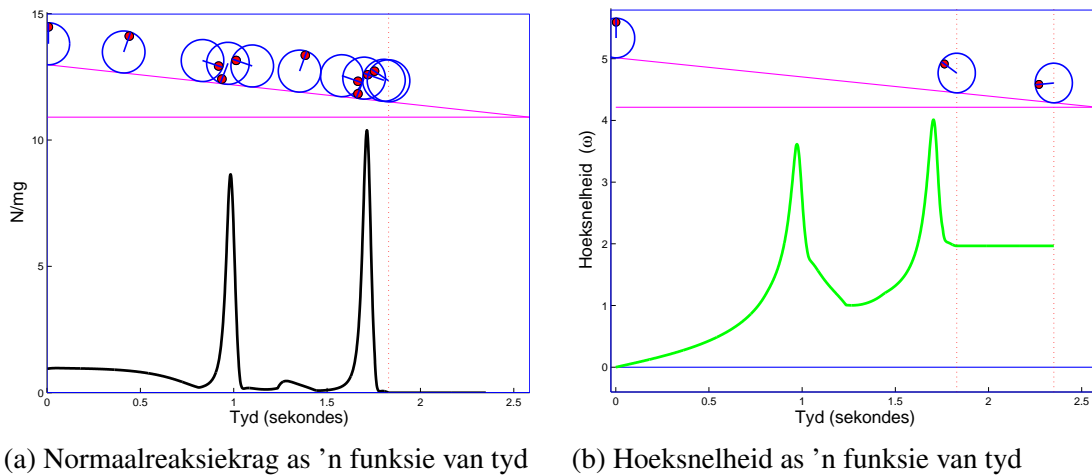
se grootste bydrae word deur die magenta  $(\delta')^*$ -komponent gelewer.

Hierdie gedrag word gevind selfs vir baie groot waardes van  $e$  en dit is nodig om die ossillasies te demp ten einde die wiel deur die derde kwadrant te laat rol.

### 3.4 Sentrifugale hop van 'n gedempte elastiese wiel

In voorbeeld 3 word die interne krag in die wiel gemodelleer deur (9),  $N/(mg) = e\delta + c\delta'$ . Indien die dempkonstante  $c$  groot genoeg is, sal die wiel deurrol na die vierde kwadrant toe.

Met redelik baie demping,  $c = 10$ , dus 'n dempverhouding  $\xi = 0,707$  vir  $e = 50$ , word figure 10 en 11 verkry vir 'n hop in die vierde kwadrant van die *tweede* omwenteling.

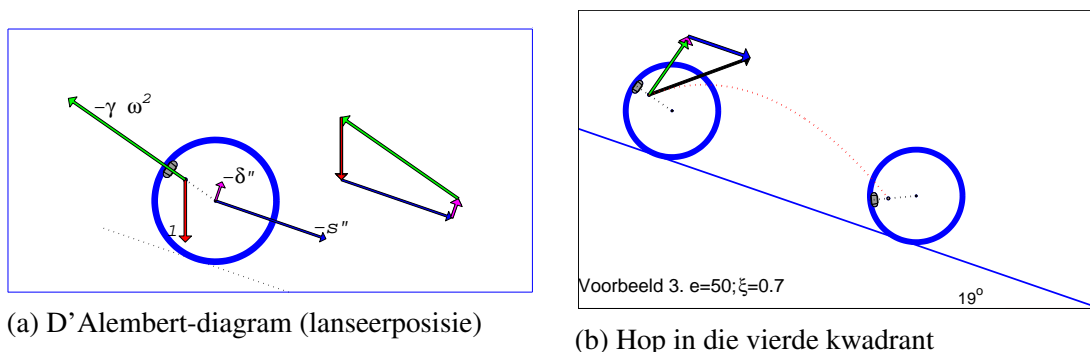


**Figuur 10. Voorbeeld 3** ( $e = 50$ ,  $\xi = 0,71$ ,  $\mu = 0,3$ )

'n Vergelyking van figure 8 en 10 toon dat die demping veroorsaak dat die tweede minimum positief bly, sodat die wiel nog 'n omwenteling voltooi en by die tweede besoek aan die vierde kwadrant hop.

Die diagram vir die hoeksnelheid in figuur 10(b) toon pieke soortgelyk aan dié van die normaalkrag. Die baie hoë hoeksnelhede wanneer die wiel deurrol van die tweede na die derde kwadrante is ook op die video aan die einde van die inleiding merkbaar. In hierdie voorbeeld is die hoeksnelheid tydens die hop,  $\omega^*$ , net minder as 2, wat neerkom op 'n rotasiespoed van 1,7 omwentelings per sekonde. Die maksimum hoeksnelheid is benaderd twee keer so groot, wat eintlik verrassend hoog is.

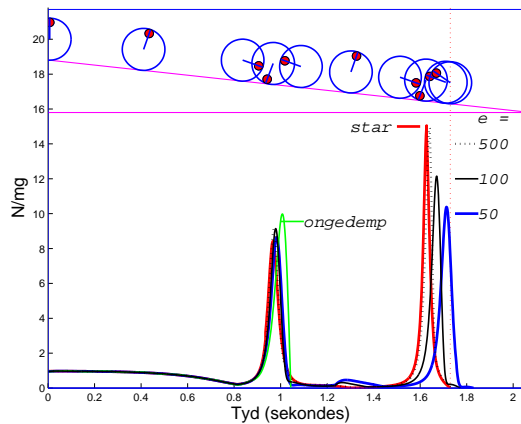
Die D'Alembert-diagram in figuur 11(a) toon dat die elastisiteit nou 'n klein bydrae maak en saamwerk met die sentrifugale krag om die hop te veroorsaak, maar (in hierdie geval) baie min bydra tot die lanseersnelheid soos in figuur 11(b) getoon.



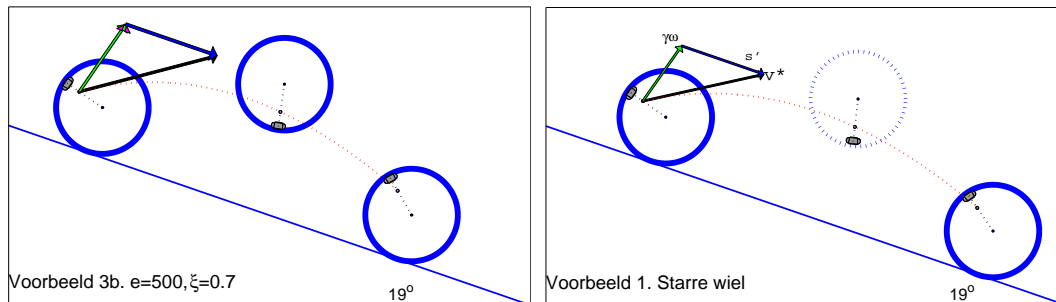
**Figuur 11. Sentrifugale hop vir 'n elastiese wiel met demping**

In figuur 12(a) word aangetoon hoe die gedrag van 'n starre wiel (rooi kromme) benader word deur  $e$  al hoe groter te maak, met 'n dempverhouding  $\xi = 0,7$ . In figuur 12(b) word die hop

getoon wat verkry word met  $e = 500$ ; vir die blote oog is dit identies aan figuur 5(b) vir die starre wiel, wat hier herhaal word as figuur 12(c).



(a) Normaalkrag vir verskillende  $e$ , met  $\xi = 0,7$



(b) Hop met  $e = 500$

(c) Hop van 'n starre wiel

**Figuur 12. Gedrag van elastiese wiel as benadering vir starre wiel**

Met hierdie model vir die interne krag kan die eerste hop van 'n starre wiel dus baie goed benader word deur die elastiese konstante  $e$  groot genoeg te maak.

### 3.5 Meervoudige hoppe van 'n elastiese wiel

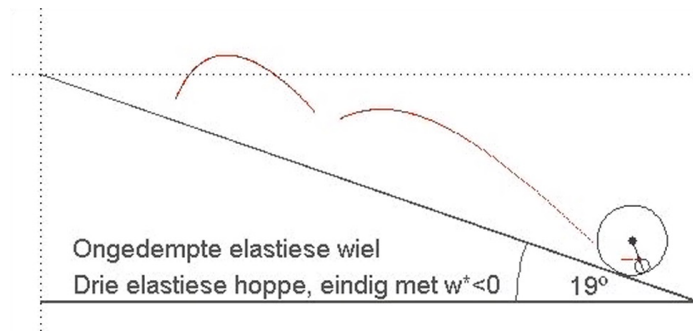
Video 1 aan die begin van hierdie artikel toon dat die wiel 'n aantal hoppe uitvoer. In hierdie afdeling word die tweede en derde hoppe ondersoek, waar hierdie hoppe volg op die impuls wat op die wiel inwerk wanneer die vlak aan die einde van 'n hop getref word. Die posisie en snelheid van die wiel net voor die vlak getref word is nou die beginvoorwaardes vir die beweging tydens die impuls.

Die woord "impuls" word hier in die ietwat populêre sin gebruik om die totale effek van al drie kragte op die wiel aan te dui tydens die (gewoonlik kort) tydinterval waartydens die wiel in kontak is met die pad tussen twee hoppe. Daarteenoor word *hoekimpuls* (of-te-wel impulsmoment) gebruik in die strenger sin as die tydintegraal van die moment van hierdie kragte.

Ons keer terug na voorbeeld 2, naamlik die elastiese wiel sonder demping. Animasie 2 toon die eerste drie hoppe van hierdie beweging. Die elastiese vervorming word hier getoon asof die



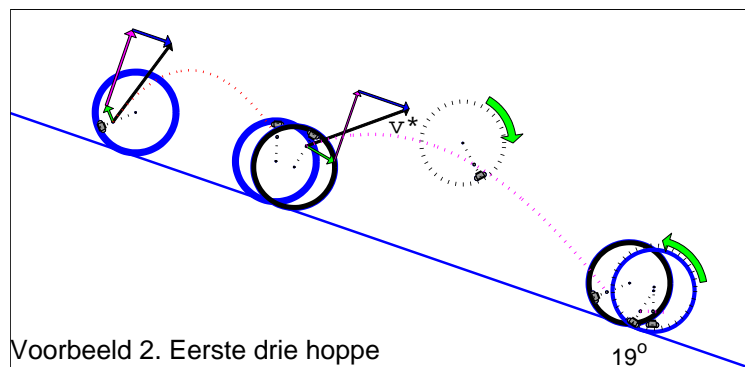
wiel die vlak binnedring, en is duidelik sigbaar elke keer dat die las onder deurrol.



### Animasie 2. Drie hoppe van 'n elastiese wiel (Voorbeeld 2)

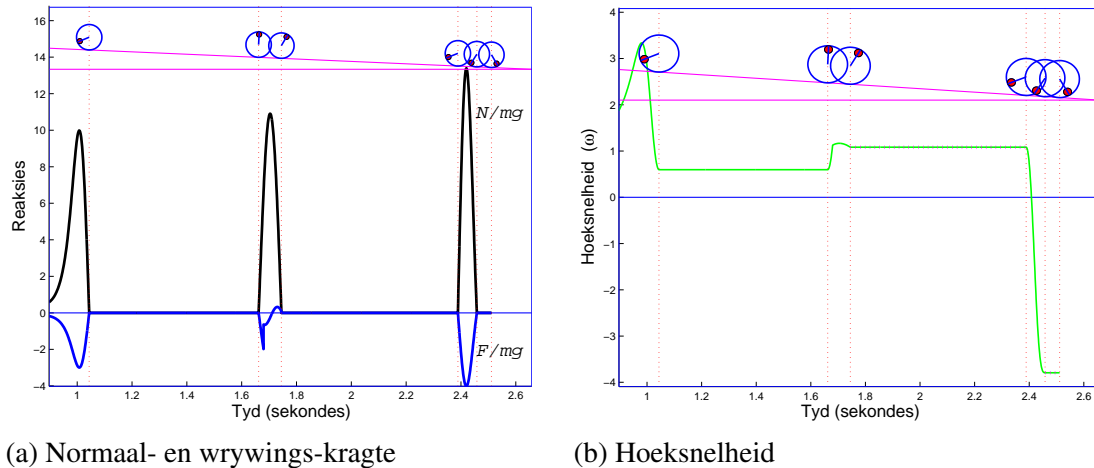
Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die animasie te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinierende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinierende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

Die eerste elastiese hop is reeds bespreek en in figuur 9(b) getoon. Die eerste impuls veroorsaak 'n groot hop uit die vierde kwadrant, met die *elastiese* effek oorheersend. Dit word gevolg deur 'n tweede impuls en 'n klein, byna vertikale, elastiese hop met *negatiewe* hoeksnelheid. Figuur 13 toon hierdie hoppe, met die tweede hop in swart geteken. Die eerste twee hoppe het opvallend groot elastiese  $\delta'$ -komponente in die lanseersnelheid.



**Figuur 13. Eerste drie hoppe van 'n ongedempte elastiese wiel**

'n Verklaring van hierdie gedrag word gevind deur  $H_G$ , die hoekimpuls om punt G, te ondersoek met behulp van figuur 14(a). Die tydasse van figure 14(a) en (b) toon die laaste deel van die rol- en gly-beweging, en dan die eerste hop gevolg deur die eerste impuls, die tweede hop, nog 'n impuls, en eindig na die derde hop. Tydens die hoppe is die reaksiekragte nul en die hoeksnelhede konstant.



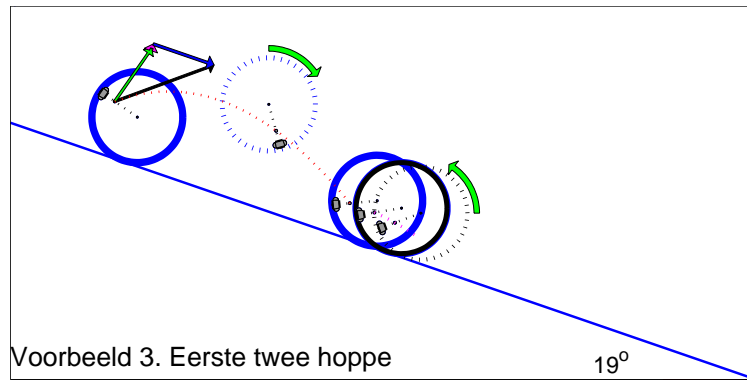
**Figuur 14. Eerste twee impulse (voorbeeld 2)**

Figuur 14(a) toon die reaksiekragte, waar die swart kromme die normaalrag aandui, en die blou kromme die wrywingsrag. Die normaalrag toon die eienskappe wat gewoonlik toegesê word aan 'n *impulsiewe krag*, naamlik 'n krag wat vinnig toeneem en dan vinnig wegkwy; albei impulse word dus geklassifiseer as *kort* of *normale* impulse. (Sien ook die volgende sub-afdeling). Die vertikale rooi stippellyne dui die begin en die einde van die hoppe aan.

Die hoekimpuls word bereken uit vergelyking (7),  $H_G = \int [(N/mg)\gamma\sin(\theta - \psi) - (F/mg)h]d\tau$ . Die eerste impuls in figuur 14(a) toon dat die normaalrag aanvanklik 'n negatiewe moment veroorsaak, maar dat die moment positief is nadat die wiel deurrol na die eerste kwadrant. Die hefarm is deurgaans klein. Die negatiewe wrywingsrag, daarenteen, het 'n groot hefarm en veroorsaak 'n positiewe moment. Die gesamentlike effek lewer 'n totale hoekimpuls met 'n klein positiewe waarde. Dit veroorsaak 'n klein toename in die hoeksnelheid van die tweede hop, soos gesien kan word in die groen kromme in figuur 14(b). Die hoekimpulshoekmomentum-beginsel, (6), kan ook gebruik word om die hoeksnelheid vir die tweede hop te bereken as  $\omega_2^* = \omega_1^* + H_G/\kappa_G$ . Die rooi stippels toon hierdie waardes aan.

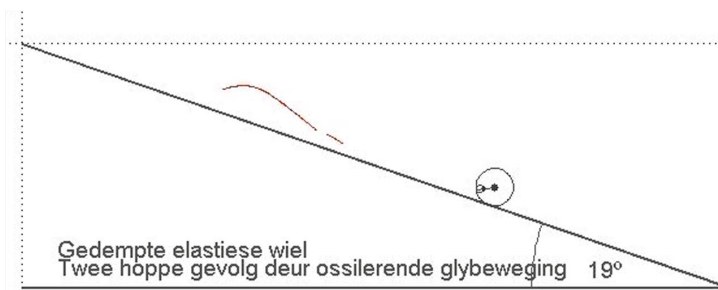
Tydens die tweede impuls veroorsaak die normaalrag 'n baie groot negatiewe moment om G, wat nou in die derde kwadrant is. Dan is  $H_G < 0$  en die hoeksnelheid word tydens die impuls negatief, soos getoon in figuur 14(b). Die derde hop vind dus plaas met 'n groot negatiewe hoeksnelheid.

Die soortgelyke animasie vir voorbeeld 3 toon 'n beweging met 'n heel ander patroon. Hier vind die eerste impak plaas in die derde kwadrant, soos getoon in figuur 11(b). Gevolglik veroorsaak die normaalreaksie 'n negatiewe hoekimpuls om G en 'n gepaardgaande omkeer van die rigting van die hoeksnelheid. Hierdie klein tweede hop word in figuur 15 getoon, en kan ook in animasie 3 waargeneem word. Die rooi krommes dui weer die paraboliese bane van G tydens die hoppe aan.



**Figuur 15. Eerste twee hoppe van 'n elastiese wiel met baie damping**

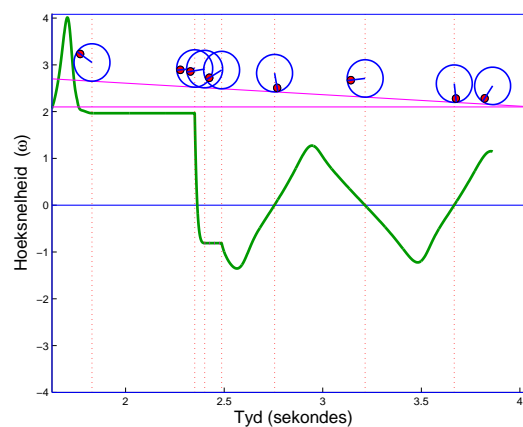
In hierdie geval vind daar nie 'n derde hop plaas nie, maar wel 'n ossillerende glybeweging teen die helling af, soos duidelik in die animasie van die beweging waarneembaar is.



**Animasie 3. Twee hoppe van 'n gedempte, elastiese wiel (Voorbeeld 3)**

Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die animasie te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

Die patroon van die beweging kan heel aanskoulik afgelei word uit die hoeksnelheid-diagram. Vir voorbeeld 3, figuur 15, vind ons byvoorbeeld 'n groot sentrifugale eerste hop gevolg deur 'n klein elastiese hop met negatiewe hoeksnelheid. Hierdie patroon is duidelik waarneembaar ook in figuur 16, wat ook aantoon hoedat die hoeksnelheid na die tweede hop ossileer.



**Figuur 16. Hoeksnelheid-diagram vir voorbeeld 3**

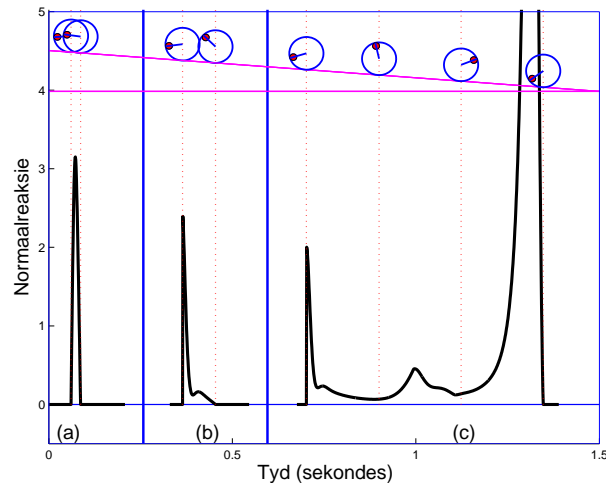
Soortgelyke diagramme sal in afdeling 4 gebruik word om die animasies met die video's te vergelyk.

Die wesentliche verskil in die gedrag van voorbeelde 2 en 3 is toe te skryf aan die verskil in die demping vir die twee gevalle. Hierdie is slegs twee voorbeelde van die ryke verskeidenheid van bewegingspatrone wat gevind word.

### 3.6 Klassifikasie van impuls en hoppe

Dit is gerieflik om te onderskei tussen drie verskillende tipes impuls wat deur die normaalkrag veroorsaak word. Die vorm van die  $N-t$ -diagram word as maatstaf gebruik.

Ons definieer 'n *normale impuls* as 'n kort impuls soos reeds getoon in figuur 14(a). Dit stem ooreen met die algemene persepsie van 'n impulsiewe krag, naamlik 'n krag wat skielik baie groot word en dan vinnig na nul kwyn. Hierdie tipe impuls kom voor wanneer die demping baie klein is, en word ook in figuur 17(a) getoon. Die normale impuls wat hier getoon word, is verkry op 'n helling van  $10^\circ$  met 'n wiel sonder demping, en die ander parameters soos aangedui.



(a) Normale impuls (b) medium-impuls (c) Lang impuls

**Figuur 17. Voorbeelde van die drie tipes impuls, met  $\mu = 0,3$  en  $e = 200$**

Indien die demping geneem word as  $c = 10$  (dit wil sê  $\xi = 0,35$ ), word 'n *medium-impuls* verkry soos getoon in figuur 17(b). Die demping veroorsaak dat die impuls nie met die eerste minimum eindig nie, maar dat die wiel verder rol vanaf die derde na die vierde kwadrant voordat dit weer hop.

'n *Lang impuls* kom voor wanneer die wiel die omwenteling voltooi en weer deur die tweede kwadrant rol. Figuur 17(c) wys so 'n voorbeeld, wat verkry is deur die helling te verander na  $8^\circ$  en  $c = 10$  te behou.

Daar sal ook ietwat arbitrêr onderskei word tussen klein, medium- en groot hoppe, met die lengte van die tydinterval van die hop,  $\Delta\tau^*$ , as maatstaf. Ons definieer *klein hoppe* as hoppe met  $\Delta\tau^* < 1$ , benaderd 0,2 sekondes, en *groot hoppe* as hoppe wanneer  $\Delta\tau^* > 2,5$ , ongeveer 0,5 sekondes. Die laaste hop van voorbeelde 2 en 3 word dus as klein geklassifiseer, en die ander hoppe as groot.

#### 4. Nabootsing van die fietswiel op 'n skuins pad

Ons herinner die leser aan die video wat aan die einde van die inleiding getoon is, waar 'n fietswiel wat 'n aantal hoppe uitvoer, getoon word. Om die artikel af te sluit poog ons om twee soortgelyke bewegings met die wiskundige model na te boots.

Die patrone van die twee bewegings verskil merkbaar, en word kwalitatief beskryf in terme van klein, medium- of groot hoppe, afgewissel deur normale (dit wil sê kort), medium- of lang impulse.

Rowwe metings toon dat die helling van die pad ongeveer  $8^\circ$  tot  $8,5^\circ$  is. Die parameters vir die wiel is dié soos in afdeling 2.3 bespreek, naamlik  $\gamma = 0,59$ ,  $\kappa_o = 0,54$  en  $e = 110$ . Die dempkonstante wat die beste resultate gee, is  $c = 11,7$ , of-te-wel  $\xi = 0.558$ . Geen poging is aangewend om die wrywingskoeffisiënt te meet nie, maar dit is realisties om 'n redelik groot waarde aan  $\mu$  toe te ken, in die orde van 0,5 tot 0,8.

In al die vorige voorbeelde was die beginvoorwaarde dat die wiel uit 'n posisie van rus begin beweeg. Hierdie voorwaarde kan nie in die praktyk nagekom word nie, as gevolg van die onstabiele van die wiel in die ewewigspesie. Derhalwe is al die video's verfilm nadat die wiel 'n klein aanvanklike snelheid gegee is, en ons gebruik voortaan die *aanvanklike hoeksnelheid*  $\omega_1$  as 'n bykomende invoerparameter in al die voorbeelde wat volg. Ons skat dat hierdie waarde in die orde van 0,05 tot 0,1 is, wat neerkom op 'n hoeksnelheid van 0,27 tot 0,55 rad/s.

As gevolg van hierdie aanvanklike hoeksnelheid is  $\delta_1 = (1 - \gamma\omega_1^2) \cos \psi / e$ . Ons neem steeds aan dat die wiel aanvanklik rol, sodat die aanvanklike snelheid van die middelpunt gegee word deur  $s'_1 = (1 - \delta_1)\omega_1$ . Die beginvoorwaardes vir die volgende voorbeelde is dus:

$$\delta_1 = (1 - \gamma\omega_1^2) \cos \psi / e; \quad \theta(0) = 0; \quad \theta'(0) = \omega_1; \quad s(0) = 0; \quad s'(0) = (1 - \delta_1)\omega_1; \quad \delta(0) = \delta_1; \quad \delta'(0) = 0.$$

##### 4.1 Voorbeeld F2

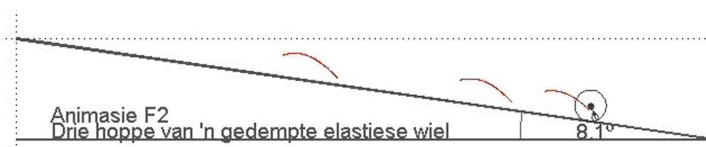
As eerste voorbeeld beskou ons video F2 se eerste drie hoppe, wat as volg beskryf kan word: drie sentrifugale hoppe, geskei deur 'n lang impuls en 'n medium-impuls.



### Video F2.'n Voorbeeld van 'n hoppende fietswiel

Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die video te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

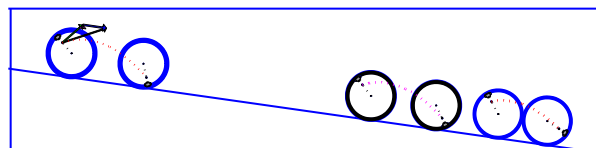
Animasie F2 boots hierdie beweging redelik goed na, en is verkry met die helling  $\psi = 8,1$ , die wrywingskoëffisiënt  $\mu = 0,7$  en die aanvanklike hoeksnelheid  $\omega_1 = 0,05$ . Die eerste hop is groter as die een op die video, maar dit word wel gevolg deur 'n lang impuls, medium-hop, medium-impuls en nog 'n medium-hop, soos ook in figure 18 en 19 gesien kan word.



### Animasie F2. Nabootsing van Video F2

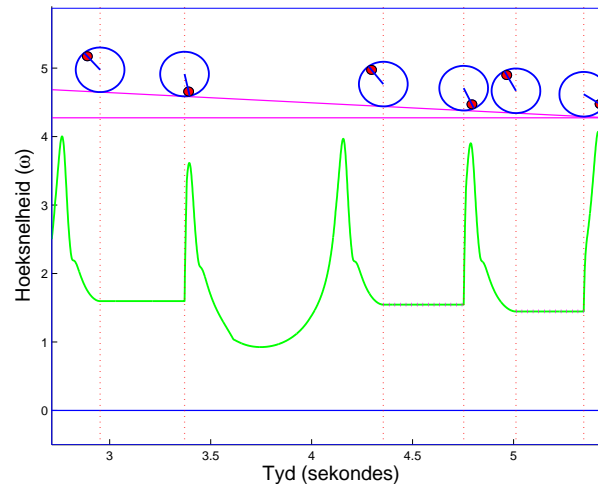
Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die video te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

Soos voorheen, toon figure 18 en 19 die hoppe en die hoeksnelheid vir hierdie voorbeeld. Dit is opvallend dat die hoeksnelhede van die hoppe baie min verskil, wat impliseer dat albei die hoekimpulse in hierdie voorbeeld baie klein is.



**Figuur 18. Eerste drie hoppe (voorbeeld F2):**  $\mu = 0,7$ ,  $\psi = 8,1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0,05$





**Figuur 19. Hoeksnelheid tydens die eerste drie hoppe (voorbeeld F2)**

#### 4.2 Voorbeeld F3

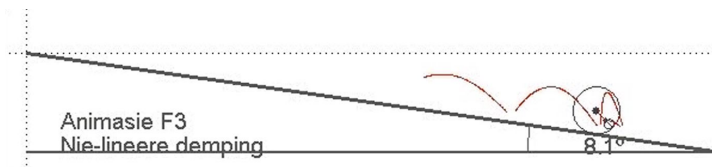
As laaste voorbeeld beskou ons die video van Voorbeeld F3, met 'n heel ander patroon, naamlik 'n medium-hop, gevolg deur 'n medium-impuls en groot tweede hop, gevolg deur 'n normale impuls en 'n bykans vertikale derde hop waartydens die wiel nie roteer nie. Die vierde hop is agteruit met 'n negatiewe hoeksnelheid.



**Video F3. 'n Buitengewone beweging van 'n hoppende fietswiel**

Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die video te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

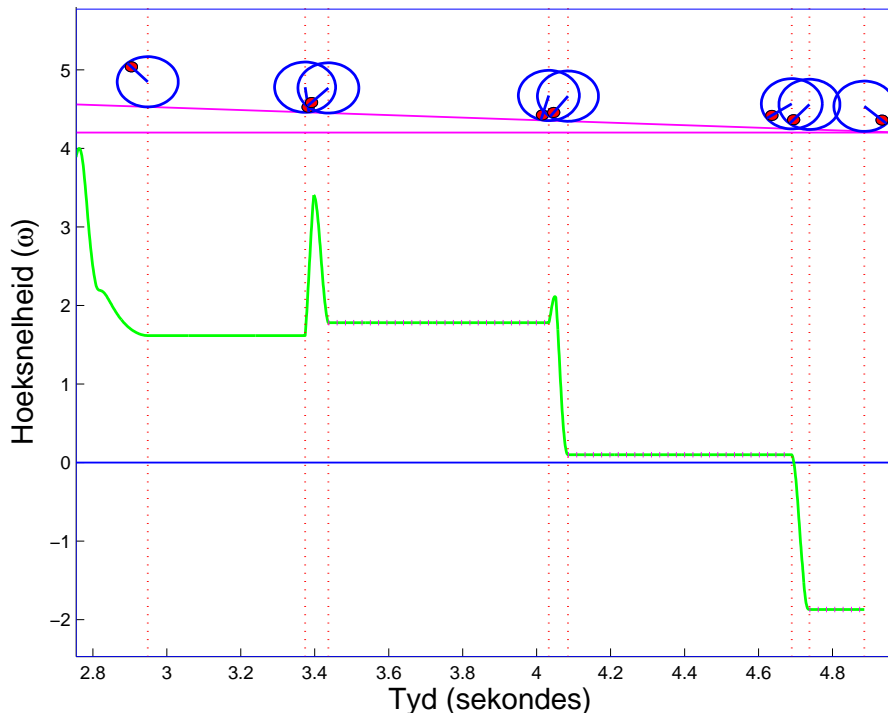
'n Redelik goeie nabootsing van video F3 word verkry deur  $\mu = 0,582$  te neem, met die ander parameters onveranderd vir die eerste fase van die beweging. Maar die model moes ietwat onrealisties aangepas word om die finale normale impuls en negatiewe hop te kry, deur die waarde van  $c$  drasties te verminder na die eerste hop. Met  $c = 3,5$  vir die eerste impuls, en  $c = 2$  vir die tweede en derde impuls, word drie normale impulse gekry, met bykans geen hoeksnelheid in die derde hop nie en eindig die beweging met 'n klein elastiese hop met 'n negatiewe hoeksnelheid.



### Animasie F3. Nabootsing van Video F3

Gaan na die YouTube-opsomming op die LitNet-artikelblad om na die video te kyk:  
[litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/](http://litnet.co.za/die-fassinerende-meganika-van-hoppende-fietswiele/)

Hierdie resultaat word ook in figure 20 en 21 getoon. Die hoeksnelheidsdiagram in figuur 20 toon die volgende: die eerste impuls, na die eerste hop, laat die hoeksnelheid feitlik onveranderd, aangesien die wiel die vlak tref met die radius OG aan die einde van die tweede kwadrant en die hoekimpuls gevolglik feitlik nul is. Met die tweede en derde impuls word die vlak getref met die wiel in die begin van die derde kwadrant, met die gevolg dat die hoekimpuls negatief is en die rotasierigting omkeer.

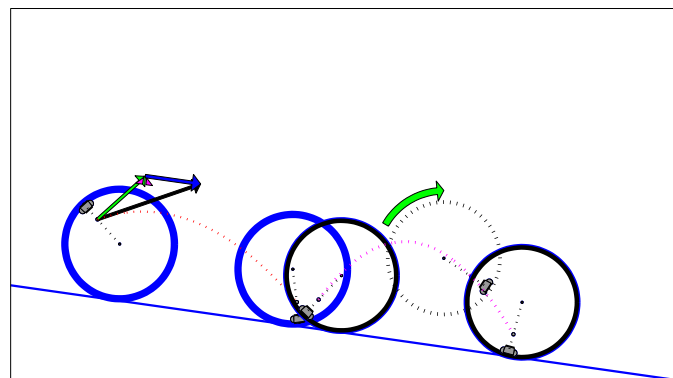


**Figuur 20. Hoeksnelheid vir voorbeeld F3:**  $\mu = 0,582$ ,  $\psi = 8,1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0,05$  en  $c = 11,7/3,5/2$

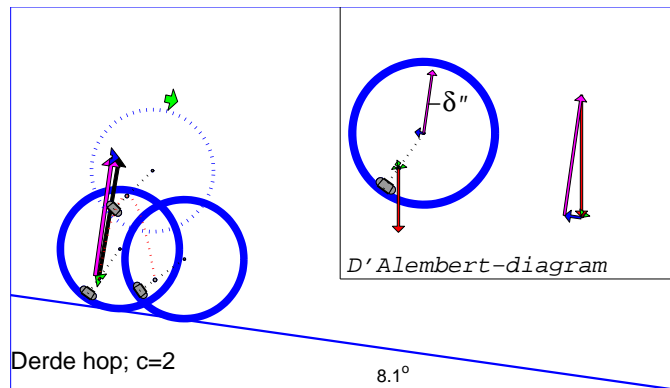
Figuur 21(a) toon 'n medium-groot sentrifugale hop gevolg deur 'n groot elastiese hop. Die derde hop is verrassend hoog, en die diagram van die lanseersnelheid in figuur 21(b) toon die rede, naamlik dat die loodregte  $\delta'$ -komponent (magenta) hier 'n groot negatiewe waarde het en die wiel wegskiet. Die hoeksnelheid tydens die hop is baie klein. Die D'Alembert-diagram by die lanseerposisie word ook getoon, en wys dat die elastiese  $\delta''$  die normaalkrag nul maak.

Die vierde hop word in figuur 21(c) getoon, waar die lanseersnelheid nou opwaarts (na links) is vanweë die groot negatiewe waarde van  $s'$ , die blou vektor, wat weer op sy beurt deur die antikloksgetyde rotasie van die wiel veroorsaak word. Die D'Alembert-diagram is soortgelyk

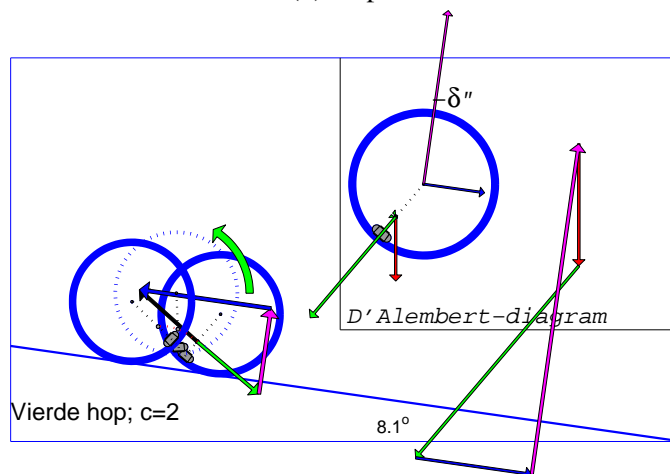
aan die een vir die derde hop, maar die versnellings is veel groter vanweë die groter sentrifugale krag.



(a) Hoppe 1 en 2



(b) Hop 3



(c) Hop 4

**Figuur 21. Die vier hoppe van voorbeeld F3**

## 5. Samevatting

'n Lineêr elastiese model met damping (vergelyking (9)) word vir die eerste keer gebruik om die interne krag in eksentries-belaaide fietswiele te modelleer. Daar word onder andere aange-

toon dat hierdie model goed daarin slaag om die eerste hop van 'n starre wiel na te boots deur die elastiese konstante  $e$  groot genoeg te maak, mits daar genoeg demping is (figuur 12).

Hierdie model kan ook in sommige gevalle die tweede en derde hoppe van 'n fietswiel redelik goed naboots, soos getoon in voorbeeld F2.

Die grootte van die tweede en later hoppe van die wiskundige model is buitengewoon sensitief vir die posisie van die las by die impak na die vorige hop. Hierdie verskynsel dui daarop dat ons hier met 'n redelik chaotiese sisteem te doene het, in die sin dat klein veranderinge in die parameters soms lei tot baie groot veranderinge in die patroon van impulse en hoppe. Hierdie aspek verdien verdere aandag.

Hierdie eenvoudige model kon egter nie die komplekse beweging van voorbeeld F3 naboots nie. Deur dit egter op 'n ietwat onrealistiese wyse aan te pas deur die waarde van die dempkonstante tydens die beweging te verander, kon 'n redelik goeie nabootsing verkry word.

'n *Nielineêre elastiese model* sal vermoedelik gebruik moet word om video F3 realisties na te boots. Maar dis ook 'n storie vir 'n ander dag!

## Verwysings

- [1] Littlewood, J.E. 1986. *Littlewood's Miscellany*. Cambridge University Press.
- [2] Mackenzie, D. en Fred Almgren. 1997. *Notices of the Am. Math. Society*, **44**, 1102–6).
- [3] Tokieda, T.F. 1997. The Hopping Hoop. *Am. Math. Monthly*, **104**, 152–3.
- [4] Butler, J.P. 1999. Hopping Hoops Don't Hop. *Am. Math. Monthly*, **106**, 565–8.
- [5] Pritchett, T. 1999. The Hopping Hoop Revisited. *Am. Math. Monthly*, **106**, 609–17.
- [6] Theron, W.F.D. 2000. The rolling motion of an eccentrically loaded wheel. *Am. J. Phys.*, **68**, 812–20.
- [7] Theron, W.F.D. en N.M. du Plessis, 2001. The dynamics of a massless hoop. *Am. J. Phys.*, **69**, 354–9.
- [8] Theron, W.F.D. 2002. The Dynamics of an Elastic Hopping Hoop. *Mathl. Comput. Modelling*, **35**, 1135–47.
- [9] Theron, W.F.D. en M.F. Maritz. 2008. The amazing variety of motions of a loaded hoop. *Mathl. Comput. Modelling*, **47**, 1077–88.
- [10] Taylor, A. en M. Fehrs. 2010. The dynamics of an eccentrically loaded hoop. *Am. J. Phys.*, **78**, 496–8.
- [11] Maritz, M.F. en W.F.D. Theron, 2012. Experimental verification of the motion of a loaded hoop. *Am. J. Phys.*, **80**, 594–8.
- [12] Theron, W.F.D. 2008. *Analysis of the rolling motion of loaded hoops*, PhD-thesis, Universiteit Stellenbosch.

[13] MATLAB, The Mathworks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, Massachusetts 01760–2098.

### Bylaag: Die fassinerende meganika van hoppende fietswiele

Onderstaande teorie is soortgelyk aan dié wat in die vorige publikasies gebruik is, en stem tot 'n groot mate ooreen met Hoofstuk 2 in [1]. Een klein maar belangrike verskil is die definisie van die nulposisie vir die hoekverplasing.

Hierdie bylaag word geskryf as 'n onafhanklike dokument, as die volledige uiteensetting van die wiskundige model; gevolglik word die definisies en die ter-saaklike figure van die artikel herhaal. Die nommers van die figure en vergelykings stem nie ooreen met dié in die hoofteks nie.

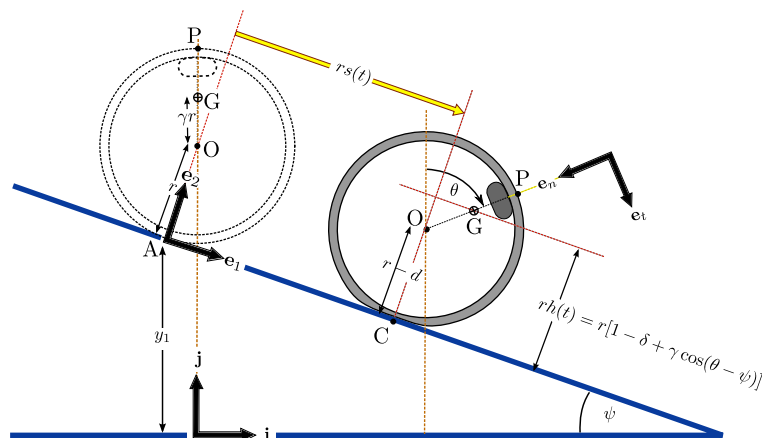
### Geometrie

Ons beskou hier 'n elastiese wiel wat afrol teen 'n skuinsvlak met hellingshoek  $\psi$ , soos aangedui in figuur 1. Die vlak is altyd lank genoeg sodat die wiel hop voordat die einde van die vlak bereik word.

Die wiel met buiteradius  $r$  en middelpunt  $O$  word belas met 'n voorwerp by punt  $P$ . Die totale massa is  $m$  en die massamiddelpunt  $G$  is geleë op afstand  $OG = \gamma r$  vanaf  $O$ , met  $\gamma$  die *eksentrisiteit* van die wiel.

Drie stelle eenheidsvektore word gebruik om rigtings aan te dui. Vektore  $\mathbf{i}$  en  $\mathbf{j}$  word gebruik vir die paraboliese beweging van  $G$  tydens die hop, en  $\mathbf{e}_1$  en  $\mathbf{e}_2$ , parallel en loodreg op die vlak, vir die beweging van die middelpunt  $O$ . Dit is verder gerieflik om die beweging van  $G$  relatief tot  $O$  in terme van die normaal- en tangente eenheidsvektore  $\mathbf{e}_n$  en  $\mathbf{e}_t$  te beskryf. Rotasie word kloksgewys om die as loodreg op die vlak gemeet:

$$\mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1.$$



Figuur 1. Geometrie van 'n eksentries-belaaide fietswiel op 'n skuinsvlak

Die traagheidsmoment om 'n as deur O (loodreg op die wiel), is  $I_o = \kappa_o mr^2$ , waar  $\kappa_o$  die dimensielose *traagheidsfaktor* is. Vir momente om G,  $I_G = \kappa_G mr^2$ , is

$$\kappa_G = \kappa_o - \gamma^2. \quad (10)$$

Die posisie van die wiel word bepaal deur die hoekverplasing  $\theta$ , met kloksgewys as positief en met  $\theta = 0$  in die beginposisie by A met OP vertikaal.

Tyd in sekondes word deur  $t$  aangedui, en die tydafgeleide van byvoorbeeld hoekverplasing deur  $\dot{\theta}$ . Dit is gerieflik om voortaan net met dimensielose hoeveelhede te werk. Dimensielose tyd word gedefinieer as  $\tau = \sqrt{g/r} t$ . Die afgeleide m.b.t.  $\tau$  is dan

$$\frac{d(\cdot)}{d\tau} = (\cdot)' = \sqrt{r/g} \frac{d(\cdot)}{dt} = \sqrt{r/g} (\dot{\cdot}).$$

Die (dimensielose) hoeksnelheid en hoekversnelling word respektiewelik aangedui deur  $\omega$  en  $\alpha$ , sodat

$$\tau = \sqrt{g/r} t, \quad \omega = \theta' = \sqrt{r/g} \dot{\theta} \quad \text{en} \quad \alpha = \omega' = (r/g) \ddot{\theta}. \quad (11)$$

Soos voorheen in [1, 2] aangeneem, word die elasticiteit van die wiel gemodelleer deur aan te neem dat die radius na die kontakpunt, OC, elasties vervorm terwyl die res van die wiel star is. Met ander woorde, ons neem aan dat  $OC = r - d(t) = r(1 - \delta(t))$ , en definieer  $\delta = d/r$  as die dimensielose *elastiese vervorming*, met  $\delta_1 = d(0)/r$  die waarde by die beginposisie. Om saam te vat:

$$OC = r - d(t) = r(1 - \delta(t)); \quad \delta(t) = d(t)/r; \quad \delta_1 = d(0)/r. \quad (12)$$

Wanneer momente geneem word, is dit gerieflik om gebruik te maak van die hoogte van G, soos aangedui deur  $rh$  op figuur 1, met

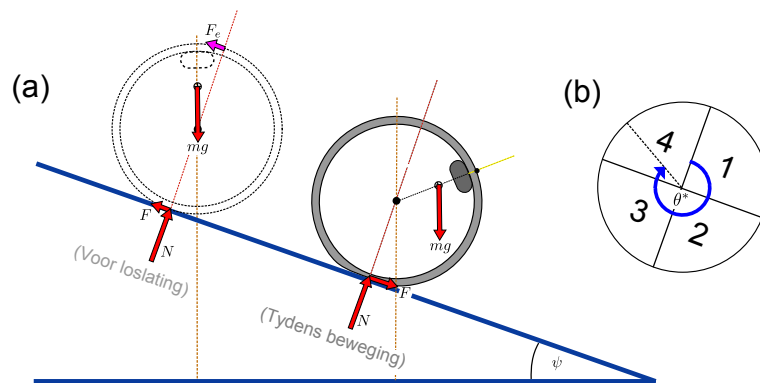
$$h(t) = [1 - \delta(t) + \gamma \cos \theta_g(t)], \quad \theta_g(t) = \theta(t) - \psi, \quad (13)$$

waar die hoek tussen  $\mathbf{e}_2$  en  $-\mathbf{e}_n$  aangedui word deur  $\theta_g$ .

## Kragte

Die drie kragte wat op die wiel inwerk, word in figuur 2 aangedui. Hulle is die gewig  $mg$ , die normaalreaksie  $N$ , en die wrywingskrag  $F$ . Soos voorheen word aangeneem dat die wiel rol sonder om te gly indien  $|F| \leq \mu N$ , en dat  $|F| = \mu N$  terwyl die wiel gly, waar  $\mu$  die *wrywingskoëffisiënt* is. Dit word in alle gevalle aangeneem dat  $\mu$  groot genoeg is om te verseker dat die wiel sal rol sonder om te gly tydens die eerste fase van die beweging.





**Figuur 2. Kragte op 'n eksentries belaaide fietswiel en die definisie van kwadrante**

Figuur 2 toon ook die krag  $F_e$  wat nodig is om die wiel in ewewig te hou in die aanvangsposisie. Vir momente-ewewig om punt A geld dat  $F_e = mg \sin \psi (1 - \delta_1) / (2 - \delta_1)$ . Die beweging begin wanneer  $F_e$  verwyder word.

In vorige publikasies, byvoorbeeld [1, 2], is die interne krag gemodelleer deur 'n lineêre elastiese veerkrag, met  $F_i = kd$ . Die dimensielose *elastiese konstante* is gedefinieer as  $e = kr/(mg)$ , sodat

$$F_i/(mg) = e\delta; \quad e = kr/(mg).$$

Ten einde die fietswiel se gedrag meer realisties te modelleer is gevind dat hierdie nie voldoende is nie en lei tot baie groot ossilerende versnellings  $\delta''$ . Ten einde hierdie te demp is die model uitgebrei om ook viskeuse demping in te sluit, naamlik

$$F_i = kd + C_v \dot{d},$$

met  $C_v$  die viskeuse dempkonstante in (N s/m).

Standaardteorie van vibrasies definieer die kritieke dempkonstante as  $C_{cr} = \sqrt{4mk}$ , en die dempverhouding as  $\xi = C_v/C_{cr}$ . In dimensielose vorm word die interne krag dan geskryf as

$$F_i/mg = [k/(mg)]r(d/r) + \xi[\sqrt{4mk}/(mg)]\sqrt{g/r} [r(d/r)']$$

wat vereenvoudig na

$$F_i/(mg) = e\delta + c\delta'; \quad e = kr/(mg); \quad c = 2\xi\sqrt{e}. \quad (14)$$

Die *dempverhouding*  $\xi$  is hier 'n invoer-parameter wat gebruik word om die (dimensielose) *viskeuse dempkonstante*  $c$  te bereken.

In die ewewigposisie is  $kd(0) = mg \cos \psi$ . Die aanvanklike elastiese vervorming is dan  $\delta_1 = d(0)/r = \cos \psi/e$ . Die waarde van  $e$  kan eksperimenteel bepaal word deur  $d(0)$  en  $r$  te meet, verkieslik op 'n horisontale vlak. Om saam te vat:

$$\delta_1 = \cos \psi/e; \quad e = r \cos \psi/d(0).$$

## Kinematika

Die posisie van O, gemeet vanaf A, word gegee deur die posisievektor  $\mathbf{r}_O$ , waar

$$(1/r)\mathbf{r}_O = s(t) \mathbf{e}_1 + [1 - \delta(t)] \mathbf{e}_2, \quad (15)$$

met  $s(t)$  die dimensielose verplasing van O parallel aan die vlak.

Rol sonder om te gly word gekenmerk daardeur dat die kontakpunt C op daardie oomblik in rus is, sodat

$$s' = (1 - \delta)\omega; \quad s'' = (1 - \delta)\alpha - \delta'\omega. \quad (16)$$

Die posisievektor van G relatief tot O is

$$(1/r)\mathbf{r}_{OG} = [\gamma \sin \theta_g] \mathbf{e}_1 + [\gamma \cos \theta_g] \mathbf{e}_2; \quad \theta_g = \theta - \psi. \quad (17)$$

Deur te differensieer m.b.t. tyd is die snelheid en versnelling van G,  $\mathbf{v}_G$  en  $\mathbf{a}_G$ , dan in dimensielose vorm:

$$(1/\sqrt{gr})\mathbf{v}_G = [s' + \omega\gamma \cos \theta_g] \mathbf{e}_1 - [\delta' + \omega\gamma \sin \theta_g] \mathbf{e}_2; \quad (18)$$

$$(1/g)\mathbf{a}_G = [s'' + a_{G1}] \mathbf{e}_1 - [\delta'' + a_{G2}] \mathbf{e}_2, \quad (19)$$

waar

$$a_{G1} = \alpha \gamma \cos \theta_g - \omega^2 \gamma \sin \theta_g; \quad a_{G2} = \alpha \gamma \sin \theta_g + \omega^2 \gamma \cos \theta_g \quad (20)$$

nuttige afkortings is.

Dit is verder gerieflik om by die teken van vektordiagramme gebruik te maak van die normaal- en tangente eenheidsvektore  $\mathbf{e}_n$  en  $\mathbf{e}_t$ . Aangesien G in 'n sirkel om O beweeg is

$$(1/\sqrt{gr})\mathbf{v}_{G/O} = \gamma\omega \mathbf{e}_t; \quad (1/g)\mathbf{a}_{G/O} = \gamma\omega^2 \mathbf{e}_n + \gamma\alpha \mathbf{e}_t. \quad (21)$$

### Die beginvoorwaardes

Daar sal in alle gevalle aangeneem word dat die wiel begin beweeg met die massa by die hoogste punt soos getoon in figuur 2. Dus  $\theta(0) = 0$  en  $s(0) = 0$ .

Die aanvanklike hoeksnelheid  $\theta'(0) = \omega_1$  word as 'n bykomende invoerparameter gegee.

Vir die  $\mathbf{e}_2$ -komponente in figuur 2(a) is  $mg \cos \psi - kd(0) = m\gamma r(\dot{\theta}(0))^2 \cos \psi$ , waaruit volg dat  $\delta_1 = d(0)/r = (1 - \gamma\omega_1^2) \cos \psi/e$ .

As gevolg van die aanname dat die wiel aanvanklik rol sonder om te gly is  $s'(0) = (1 - \delta_1)\omega_1$ . Ons neem aan dat  $\delta'(0) = 0$ .

Die beginvoorwaardes is dus, met  $\delta_1 = (1 - \gamma\omega_1^2) \cos \psi/e$ ,

$$\begin{aligned}\theta(0) &= 0; \quad \theta'(0) = \omega_1; \\ s(0) &= 0; \quad s'(0) = (1 - \delta_1)\omega_1; \\ \delta(0) &= \delta_1; \quad \delta'(0) = 0.\end{aligned}$$

## Kinetika

Van Newton se tweede wet vir komponente in die  $\mathbf{e}_1$ - en  $\mathbf{e}_2$ -rigtings, met (19), volg:

$$F = mg[-\sin \psi + s'' + a_{G_1}], \quad (22)$$

$$N = mg[\cos \psi - \delta'' - a_{G_2}]. \quad (23)$$

Momente word kloksgewys om G geneem,  $M_G = I_G \ddot{\theta}$ , met verwysing na figure 1 en 2, sodat:

$$N(\gamma r \sin \theta_g) - F(hr) = \kappa_G m r^2 \ddot{\theta}. \quad (24)$$

Hierdie vergelykings definieer 'n sisteem met drie vryheidsgrade, te wete  $\theta$ ,  $s$  en  $\delta$ .

Aangesien  $N = F_i$  van Newton se derde wet, kan (14) hier gebruik word. Van (23) volg dan dat  $e\delta + c\delta' = \cos \psi - \delta'' - a_{G_2}$ , en met (20):

$$\delta'' = \cos \psi - e\delta - c\delta' - \alpha \gamma \sin \theta_g - \omega^2 \gamma \cos \theta_g. \quad (25)$$

Van (24) en (14) volg ook dat

$$(e\delta + c\delta')(\gamma \sin \theta_g) - (F/mg)(h) = \kappa_G \alpha. \quad (26)$$

Een addisionele vergelyking (beperking / "constraint") is egter nodig om F, en sodoende die sisteem, op te los.

Terwyl  $|F| \leq \mu N$  sal die wiel rol sonder om te gly en geld (16),  $s'' = (1 - \delta)\alpha - \delta'\omega$ .

Die momente-vergelyking (26), saam met (22) en (20), vereenvoudig nou tot

$$[\kappa_G + h^2] \alpha = (e\delta + c\delta')(\gamma \sin \theta_g) + h(\sin \psi + \omega^2 \gamma \sin \theta_g + \delta'\omega). \quad (27)$$

Indien die wrywingskrag die maksimumwaarde bereik, is  $|F| = \mu N$  en die wiel begin gly. Ons definieer  $\mu_k = \mu$  in gevalle waar  $F > 0$ , en  $\mu_k = -\mu$  waar  $F < 0$ , sodat

$$F = \mu_k N \quad \text{en} \quad s'' = \mu_k(e\delta - c\delta') + \sin \psi - a_{G_1}, \quad (28)$$

uit (22). Dan vereenvoudig (26) na

$$\alpha = (e\delta + c\delta')(\gamma \sin \theta_g - \mu_k h) / (\kappa_G). \quad (29)$$

## Numeriese oplossing

Daar word aangeneem dat die wrywingskoeffisiënt groot genoeg is om aanvanklike rol te verseker. Dit lewer 'n sisteem van vyf eerste-orde-differensiaalvergelings, met onbekendes

$$X = [\theta, \omega, s, \delta, \delta'].$$

Die eerste afgeleides word as volg bereken:  $\omega' = \alpha$  uit (27),  $s' = (1 - \delta)\omega$  uit (16) en  $\delta''$  uit (25).

Om saam te vat. Met die notasie  $\omega = \theta'$  en  $\alpha = \omega' = \theta''$  word die oplossing vir rolbeweging bepaal uit:

$$\theta'' = [(e\delta + c\delta')(\gamma \sin \theta_g) + h(\sin \psi + \omega^2 \gamma \sin \theta_g + \delta' \omega)] / [\kappa_G + h^2];$$

$$s' = (1 - \delta)\omega;$$

$$\delta'' = \cos \psi - e\delta - c\delta' - \alpha \gamma \sin \theta_g - \omega^2 \gamma \cos \theta_g.$$

Vir die eerste fase is die beginvoorwaardes  $X_1 = X(0) = [0, \omega_1, 0, \delta_1, 0]$  en word die numeriese oplossing van  $X' = f(X)$  gevind m.b.v. die ode45-funksie in MATLAB [3].

Hierdie fase eindig wanneer  $|F| = \mu N$  en die wiel begin gly. Dit lewer 'n sisteem met ses onbekendes,

$$X = [\theta, \omega, s, s', \delta, \delta'],$$

waarvan die tweede afgeleides bepaal word deur (29), (28) en (25), of-te-wel

$$\theta'' = (e\delta + c\delta')(\gamma \sin \theta_g - \mu_k h) / (\kappa_G);$$

$$s'' = \mu_k(e\delta - c\delta') + \sin \psi - \alpha \gamma \cos \theta_g + \omega^2 \gamma \sin \theta_g;$$

$$\delta'' = \cos \psi - e\delta - c\delta' - \alpha \gamma \sin \theta_g - \omega^2 \gamma \cos \theta_g.$$

Die beginwaardes is die waardes wat bereken was vir die einde van die voorafgaande rolfase.

Dit is moontlik dat die wiel weer kan begin rol, in welke geval die beginvoorwaardes die berekende waardes aan die einde van die voorafgaande glyfase is.

Hierdie numeriese oplossing eindig altyd wanneer die normaalreaksie nul word aan die einde van 'n glyfase en die wiel by hierdie punt gelanseer word en hop. Die berekende waardes by hierdie punt word aangedui as  $\theta^*$ ,  $\omega^*$ , ens. Soos in die artikel bespreek, kan dit slegs uit 'n glyfase uit gebeur, en nooit uit 'n rolfase nie.

### Paraboliese baan

Aangesien lugweerstand deurgaans geïgnoreer word is die gewig die enigste krag terwyl die wiel in die lug is, en volg punt G 'n paraboliese baan terwyl die wiel met konstante hoeksnelheid om G roteer.

Hierdie beweging word die gerieflikste in die  $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ -assestelsel beskryf, met oorsprong by die lanseerposisie van G, en die tyd weer op nul gestel. By hierdie posisie is  $\delta = 0$  en die koördinate van O is dus

$$x_O^* = -\gamma r \sin \theta^*; \quad y_O^* = -\gamma r \cos \theta^*.$$

Die projekteersnelheid  $\mathbf{v}_G^*$  word geskryf as  $\mathbf{v}_G^* = v_{G_x}^* \mathbf{i} + v_{G_y}^* \mathbf{j}$ , waar

$$v_{G_x}^* = \sqrt{gr}[(s')^* \cos \psi - (\delta')^* \sin \psi + \gamma \omega^* \cos \theta^*];$$

$$v_{G_y}^* = \sqrt{gr}[-(s')^* \sin \psi - (\delta')^* \cos \psi - \gamma \omega^* \sin \theta^*].$$

Dan word die hoekverplasing  $\theta$ , en die kartesiese koördinate  $x_G$  en  $y_G$  vir G, as funksies van tyd gegee deur

$$\theta = \theta^* + \omega^* \tau; \quad x_G = r[v_{G_x}^* \tau]; \quad y_G = r[v_{G_y}^* \tau - \frac{1}{2} \tau^2].$$

Die middelpunt van die wiel, punt O, se koördinate is dan

$$x_O = x_G - \gamma r \sin \theta; \quad y_O = y_G - \gamma r \cos \theta.$$

Die loodregte afstand tussen die skuinsvlak en die wiel, aangedui deur  $h_p$ , is dan

$$h_p = (x_O - x_O^*) \sin \psi + (y_O - y_O^*) \cos \psi.$$

Die einde van die hop word bereik wanneer  $h_p = 0$ . Op hierdie oomblik word die veranderlikes aangedui deur  $\tau^+$ ,  $\theta^+$ ,  $\omega^+$  ens.

### Hoekmomentum

Die beginsel dat die totale hoekimpuls gelyk is aan die verandering in hoekmomentum kan gebruik word om die numeriese berekeninge te kontroleer.

Vir momente om G en vir enige tydinterval geld

$$\int [N\gamma r \sin \theta_g - Fhr] dt = I_G(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1).$$

Vir die hoekimpuls as gevolg van die reaksiekragte tydens die impak direk nadat die wiel weer die vlak tref nadat dit gehop het, vereenvoudig hierdie in dimensielose vorm na

$$\int [(N/mg)\gamma \sin \theta_g - (F/mg)h] d\tau = \kappa_G(\omega_2^* - \omega_1^*). \quad (30)$$

Die dimensielose hoekimpuls, aangedui deur  $H_G$ , is dus

$$H_G = \int [(N/mg)\gamma \sin \theta_g - (F/mg)h] d\tau.$$

### Bepaling van die geometriese parameters vir die fietswiel

Die waardes van  $\gamma$  en  $\kappa_o$  vir die fietswiel getoon in figuur 1 word benodig vir die wiskundige model, en word as volg m.b.v. eksperimentele metings bereken.

Met 'n gewone kombuis skaal is bepaal dat die totale massa  $m = 8$  kg is.

Die posisie van die massamiddelpunt word bepaal deur die wiel te balanseer op 'n dun plank en die nodige metings te neem. Hier is die buite radius gemeet as  $r = 0,33$  m en  $OG = 195$  mm; dus  $\gamma = 195/330 = 0,59$ .

Die traagheidsmoment word bepaal deur die periode van klein ossillasies te meet. 'n Opstelling word geprakseer sodat die wiel vrylik om 'n as loodreg op die vlak van die wiel kan ossileer, met die loodmassa onder in die stabiele posisie. Die periode word bepaal deur die tyd vir 'n aantal ossillasies te meet en die gemiddelde waarde te gebruik; hier is gevind dat die wiel 7 ossillasies in 10 sekondes voltooi. Uit die standaardoplossings vir eenvoudig-harmoniese bewegings is bekend dat die periode  $= 2\pi\sqrt{I_A/(mgL_{AG})}$ , waar  $L_{AG}$  die lengte is tussen die ophangpunt A en die massamiddelpunt G, hier gemeet as  $L_{AG} = 0,462$  m.

Hieruit kan opgelos word vir  $I_A = 1,8743$  kg.m<sup>2</sup>, en van die parallelle asse stelling volg dan  $I_G = I_A - m(L_{AG})^2 = 0,167$  kg.m<sup>2</sup> en  $I_O = I_G + m(\gamma r)^2 = 0,471$  kg.m<sup>2</sup>. Uit die definisie  $I_O = \kappa_o mr^2$  is  $\kappa_o = 0,54$ .

Om saam te vat:

$$\gamma = 0,59; \quad \kappa_o = 0,54; \quad \kappa_G = \kappa_o - \gamma^2 = 0,192.$$

Die waarde van  $e$  kan bepaal word deur die aanvanklike deursakking,  $d_1$ , op 'n horisontale vlak te meet. Vir ewewig is  $kd_1 - mg = 0$ , en uit die definisie volg dan  $e = kr/mg = kr/kd_1$ , of

$$e = r/d_1.$$

Dus sal 'n deursakking van byvoorbeeld 3 mm beteken dat  $e = 110$ .

Met  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> is die faktore om dimensielose hoeveelhede om te skakel na fisiese hoeveelhede:

Tyd:  $t = \sqrt{r/g} \tau = 0,1834\tau$  sekondes.

Hoeksnelheid:  $\dot{\theta} = \sqrt{g/r} \omega = 5,45\omega$  radiale/sekonde.

## Verwysings

- [1] Theron, W.F.D. 2008. *Analysis of the rolling motion of loaded hoops*, PhD-tesis, Universiteit Stellenbosch.
- [2] Theron, W.F.D. 2002. The Dynamics of an Elastic Hopping Hoop. *Mathl. Comput. Modelling*, **35**, 1135–47.
- [3] MATLAB, The Mathworks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, Massachusetts 01760–2098.